ATTI

DELLA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXLVIII

1951

SERIE OTTAVA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME X.

(1° semestre 1951)

ROMA
ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
1951

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 13 gennaio 1951

Presidenza del Socio G. CASTELNUOVO

NOTE DI SOCI

Congressi internazionali. — *Relazione* (*) *sul Congresso internazionale di Anatomia* del Socio GIUSEPPE LEVI.

Per la prima volta dopo la guerra gli studiosi di Morfologia dell'uomo di quasi tutti i paesi del mondo, si riunirono a Congresso a Oxford dal 24 al 28 luglio 1950 sotto la presidenza di W. E. Le Gros Clark; segretario del Congresso era G. Wedell. Il precedente Congresso internazionale degli anatomici si era tenuto a Milano nel 1936. L'onorifico incarico di rappresentare a Oxford la nostra Accademia fu affidato al prof. Nello Beccari ed a me. Numerosissimi gli intervenuti, in grande prevalenza inglesi e nord-americani. I congressisti furono ospitati nei pittoreschi « Colleges » della celebre città universitaria.

Dei morfologi italiani erano presenti: Amprino, Andreassi, Beccari, Brusa, Gina Castelnuovo, Filogamo, G. Levi, F. Rossi, Pescetto, Sacerdote, Vigliani.

Il grande numero di comunicazioni presentate rese indispensabile la ripartizione degli argomenti svolti in molte sezioni, e più precisamente: Anatomia generale, Istologia, Embriologia e Morfogenesi, Neurologia (due sezioni, l'una per l'apparato nervoso centrale, l'altra per il periferico), Antropologia fisica, Endocrinologia, Nomenclatura anatomica.

In questa riunione si è affermato una volta di più l'orientamento moderno dell'Anatomia umana; orientamento sia d'ordine metodologico che nel contenuto; vale a dire di introdurre nell'analisi dei fatti morfologici l'esperimento, e d'altro lato di non limitarsi alla pura descrizione delle forme, ma di indagarne il significato funzionale. Ed è in particolar modo nello studio dei centri e delle vie nervose che quest'opportunità è maggiormente sentita. A quest'orientamento anatomo-funzionale sono improntate le ben note ricerche degli istituti di Anatomia e di Fisiologia di Oxford (di Le Gros Clark, di Glees e di vari altri), come pure quelle dei neurologi americani (Dusser de Barenne, Fulton, Bucy, Marion Hines e

(*) Svolta nella seduta del 13 gennaio 1951.

molti altri). Tra le comunicazioni di neurologia presentate a questo Congresso ricorderemo quella di Le Gros Clark sulla proiezione dell'area olfattoria della cavità nasale sul bulbo olfattorio; quelle di Glees e collaboratori sugli effetti di lesioni del *gyrus cinguli* ed aree adiacenti; quelle di Glees e collaboratori sulla terminazione del trattato spino–talamico e del lemnisco mediale; quelle di Bargmann sul sistema ipotalamo–ipofisario, le quali portano un'importante conferma alla ben nota ipotesi di Scharrer della neurosecrezione e della sua importanza per la funzione della neuroipofisi; infine quelle di Benninghof, il quale avrebbe dimostrata un'ipertrofia funzionale di neuroni dei plessi viscerali in determinate condizioni sperimentali.

In complesso la riunione di Oxford riuscì interessante. Però mi sia concesso di esporre una mia opinione personale sull'opportunità di indire congressi internazionali, nei quali tutte le comunicazioni presentate sono accolte senza discriminazione; opinione che del resto è condivisa da vari studiosi.

Nessun dubbio che lo scambio di vedute tra ricercatori di vari paesi e che hanno orientamenti differenti è vantaggioso per il progresso degli studi. Ma tale scambio di vedute diviene praticamente impossibile nei congressi internazionali, nei quali intervengono molte centinaia di persone. Il gran numero di comunicazioni richiede la suddivisione del congresso in molte sezioni, dimodochè gli intervenuti non possono ascoltare che un numero ristretto di comunicazioni e sono costretti a rinunziare a discutere sovra argomenti che pure lo interessano.

Al sistema attuale di concedere a tutti gli intervenuti di presentare delle comunicazioni, dovrebbe essere sostituito quello dei simposi internazionali sovra argomenti determinati. Si dovrebbero invitare singoli studiosi a riferire sovra argomenti di maggiore attualità e di maggiore interesse; alla discussione sovra le relazioni potrebbero parteçipare poi gli intervenuti alla riunione.

In breve io sono convinto che i congressi internazionali nella loro veste attuale non rispondono più ai fini che si propongono. Va da sè che con questo appunto pongo una questione di principio e che non intendo di rivolgere una critica all'organizzazione del Congresso, che fu ottima. I giorni trascorsi nell'ambiente affascinante di Oxford, anche in grazia alla cortesia dei colleghi inglesi, non facilmente saranno dimenticati dagli intervenuti alla riunione.

Congressi internazionali. — *Relazione* (*) *sul VII Congresso della Società internazionale di Biologia cellulare* del Socio Giuseppe Levi.

La Società di Biologia cellulare, la quale tenne le proprie riunioni all'Università di Yale a New Haven dal 4 all'8 settembre scorso, si propone di continuare l'opera iniziata dall'antica Società di Citologia sperimentale. L'origine di questa Società risale ad un convegno indetto, per iniziativa di Rhoda Erdmann, nel 1927 a Budapest in occasione del Congresso internazionale di Zoologia. La seconda riunione si tenne ad Amsterdam nel 1930, la terza a Cambridge nel 1933,

(*) Svolta nella seduta del 13 gennaio 1951.

la quarta a Copenaghen nel 1936, la quinta a Zurigo nel 1938; nella riunione di Zurigo fu deliberata la costituzione di una Società di « Citologia sperimentale », della quale fu eletto presidente J. Runnström. Nel 1940 si sarebbe dovuta tenere la sesta riunione a Stoccolma, ma questa non avvenne per lo scoppio della guerra. Soltanto nel 1947 fu possibile di tenere a Stoccolma il settimo congresso, al quale intervennero numerosissimi biologi di tutto il mondo. A Stoccolma fu meglio precisato che in passato il programma della Società; all'antico nome di Citologia sperimentale fu sostituito quello di Biologia cellulare; mutamento significativo, perchè con questa denominazione si prospettava piuttosto il contenuto di questi studi che il metodo d'indagine.

A presidente della Società di Biologia cellulare fu eletto J. Runnström di Stoccolma, a vicepresidenti: E. Fauré-Fremiet, E. Newton Harvey, G. Levi; a segretario J. F. Danielli. Furono invitati a far parte della Società studiosi di vari paesi già noti per gli studi di biologia cellulare.

Mercè il contributo materiale di varie istituzioni americane (il Commonwealth Fund, l'American Cancer Society, l'Anna Fuller Fund, il Jave Coffin Childs Memorial Fund) nonchè dell'U. N. E. S. C. O fu possibile di invitare alla riunione vari citologi europei. Dei biologi italiani erano presenti al congresso i seguenti: G. Bertani, A. Buzzati-Traverso, G. Levi, A. Monroy, S. Ranzi.

Non è senza significato la circostanza che quest'importante convegno sia stato tenuto negli Stati Uniti. Infatti i biologi americani ebbero una parte preminente nell'affermarsi e nello svolgersi della biologia cellulare. Basti ricordare i nomi di Jacques Loeb, di Edmund Wilson, di E. H. Morgan, di Montgomery, di R. G. Harrison. Si può dire che il Programma del congresso di Yale sia stato già tracciato nella prefazione scritta da Edmund Wilson nel suo trattato di citologia generale 30 anni or sono « La citologia dapprima prettamente morfologica, si è estesa diventando una biologia cellulare, nella quale l'osservazione e l'esperimento, la morfologia e la fisiologia s'intrecciano strettamente tra loro e colla biofisica e colla biochimica. Il risultato fu di creare una nuova citologia, una nuova fisiologia cellulare, una nuova embriologia cellulare, una nuova genetica ».

Per il contenuto delle comunicazioni il Congresso di New Haven differì da quello di Stoccolma; infatti mentre in quest'ultimo le comunicazioni di genetica e di altri argomenti di biologia generale ebbero larga parte, nel congresso di Yale il contenuto delle comunicazioni rimase limitato alla biologia cellulare ed i vari capitoli di questa disciplina furono felicemente raggruppati nelle varie sedute. Di ciò va data lode al presidente d'onore del comitato americano R. G. Harrison (il quale, come tutti sanno, colla scoperta del metodo della cultura dei tessuti ebbe una parte preminente nello sviluppo della biologia cellulare), al presidente e rispettivamente al segretario del comitato americano Newton Harvey e Nicholas, nonchè al segretario della società, dott. Danielli.

Le comunicazioni svolte presentate al congresso furono distribuite nel modo seguente:

1° Organizzazione chimica del protoplasma; 2° Struttura del nucleo e dei cromosomi; 3° Relazioni d'interdipendenza tra nucleo e citoplasma; 4° Mitosi; 5° Nutrizione della cellula; 6° Intima struttura delle cellule; 7° Fecondazione;

8° Enzimi durante lo sviluppo embrionale; 9° Riproduzione di particelle del citoplasma; 10° Superficie della cellula.

Tra le comunicazioni presentate segnaleremo le seguenti: Caspersson riferì sugli ulteriori sviluppi che egli diede al suo ben noto metodo di microspettroscopia. Randall ed i suoi collaboratori hanno studiato col microscopio elettronico la struttura della membrana nucleare e la composizione chimica del succo nucleare nell'oocite di anfibi ed in cellule di Locusta. Nell'oocite di anfibi il succo nucleare sarebbe costituito da aminoacidi ciclici e sarebbe privo di acido nucleinico. La membrana nucleare sarebbe costituita da uno strato poroso esterno di proteine e e di lipoidi, e da uno strato interno molto sottile, costituito essenzialmente da proteine; i pori dello stato esterno hanno un diametro di 400 Å e si troverebbero alla distanza di circa 1000 Å (Callan). Francis O. Schmitt ha studiato col microscopio elettronico la struttura del cilindrasse delle fibre nervose gigantesche di Loligo e di Myxicola; nel contenuto del cilindrasse non fissato, disperso in acqua, ha dimostrato l'esistenza di filamenti lisci molto sottili (di circa 100 Å di spessore); dopo fissazione divengono contorti e nodosi; questi filamenti costituiscono presumibilmente la base delle neurofibrille dell'istologia classica. Fernandez Moran ha studiato pure col microscopio elettronico l'ultrastruttura della guaiana mielinica e del cilindrasse di fibre nervose di vertebrati sezionate al microtomo. Fankhauser ha portato nuovi contributi a quanto egli aveva già dimostrato sui rapporti tra poliploidismo, grandezza cellulare e grandezza somatica. Se il citoplasma dell'uovo di anfibio viene artificialmente ridotto (frammenti di uovo) od aumentato (uova gigantesche) la grandezza dell'embrione varia proporzionalmente alla massa di citoplasma dell'uovo. Ma in stadi più inoltrati dello sviluppo la grandezza della larva diviene normale. Parimenti un corredo cromosomico maggiore del normale (poliploidismo) determina, com'è noto, una grandezza cellulare proporzionale al numero dei cromosomi. Ma la maggiore grandezza cellulare viene durante lo sviluppo compensata da una corrispondente riduzione del numero delle cellule. Lo sviluppo e la differenziazione dell'embrione si adattano dunque in modo considerevole alla grandezza cellulare.

Warren Lewis dimostrò una cinematografia dei mutamenti che si producono durante la locomozione dell'ameba gigantesca « Chaos chaos »; questa dimostrazione è destinata a documentare la ben nota ipotesi di Lewis che la contrazione del plasmogel superficiale ha un'importanza essenziale nei fenomeni di movimento delle cellule.

Una bellissima cinematografia di Fell e Hugues ottenuta col microscopio a contrasto di fase in cellule coltivate *in vitro* dimostrò i mutamenti che si producono nel citoplasma e nel nucleo durante la mitosi. Nel nucleo in riposo vivente si distinguono: *a*) i nuclei; *b*) granuli più refrangenti aderenti ai nucleoli oppure alla membrana nucleare; il controllo col metodo Feulgen dimostra che questi granuli, a differenza dei nucleoli sono costituiti da acido timonucleinico, sono dunque cromocentri; *c*) sottili filamenti i quali emergono dai cromocentri e che sono pure Feulgen positivi; questi filamenti corrispondono probabilmente ai cromonemi. Quando il nucleo interfasico entra in mitosi, i cromocentri si frammentano in particelle più piccole, ciascuno dei quali formano l'estremità di un cromonema.

Dopo l'anafase i cromosomi di ciascuna cellula figlia si rigonfiano e si trasformano in una rete di sottili filamenti (cromonemi). Gey, Bang e Hellermann hanno dimostrato un eccellente film cinematografico di cellule normali e neoplastiche coltivate in vitro, atto ad illustrare le differenze citologiche tra cellule normali e neoplastiche. Ricorderemo infine i contributi di biologi italiani. Ranzi riferì sulle sue ricerche sulle trasformazioni delle proteine durante lo sviluppo embrionale; lo sviluppo dell'ectoderma di echini, della notocorda di anfibi e ciclostomi e la formazione della placca neurale sono caratterizzate da una depolimerizzazione delle particelle fibrillari. Invece la formazione dell'entoderma degli echini sembra accompagnato da un'aggregazione di particelle fibrillari. La depolimerizzazione e la non depolimerizzazione delle proteine fibrillari sembrano avere importanza causale nei processi di determinazione embrionale. Monroy ha riferito i risultati di ricerche sui sistemi di proteine nell'uovo di echini.

Chimica fisica. — *Effetti di iperconiugazione al legame carbonilico* (*). Nota di GIOV. BATTISTA BONINO e PAOLO CHIORBOLI, presentata (**) dal Socio G. B. BONINO.

In recenti lavori apparsi in questi « Rendiconti » (1) si è mostrato come la frequenza Raman caratteristica del gruppo C = O nelle aldeidi e nei chetoni non saturi o aromatici risulti perturbata da un effetto di « coniugazione » tra il gruppo carbonilico e i doppi legami olefinici o i nuclei aromatici con i quali il C = O può coniugarsi in una molecola.

Un calcolo di prima approssimazione di questo effetto è stato sviluppato sulla base della conoscenza degli indici di legame che possono essere calcolati con il noto metodo degli orbitali, risolvendo le appropriate equazioni secolari riferibili alle varie strutture considerate.

Si è osservato nei detti lavori come la concordanza fra calcolato e trovato mostri delle deviazioni sistematiche, se pure non gravi, ogni qual volta al gruppo C = O è legato un gruppo metilico.

Ci siamo proposti di indagare fino a qual punto ci si possa rendere conto di tali anomalie non trascurando nel calcolo degli indici di legame π un eventuale effetto di « iperconiugazione » (2) del metile sul gruppo C = O.

Dal punto di vista degli spettri Raman è noto che la frequenza propria del gruppo C = O, che nell'aldeide formica cade a 1744 cm^{-1}, si abbassa in modo sensibilissimo nello spettro Raman dell'aldeide acetica a 1716 cm^{-1} e in quello dell'acetone a 1708 cm^{-1}. In queste molecole il gruppo C = O è legato rispetti-

(*) Lavoro eseguito nel Centro Studi di Chimica Fisica del Consiglio Nazionale delle Ricerche, presso l'Istituto Chimico « G. Ciamician » della Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 9 dicembre 1950.

(1) Questi « Rendiconti » [VIII], vol. VIII, 183, 248 (1950); vol. IX, 17 (1950).

(2) Ved. per esempio PAULING, SPRINGALL e PALMER, « J. Am. Chem. Soc. », *61*, 927 (1939); MULLIKEN e coll. « J. Am. Chem. Soc. », *63*, 41, 1770 (1941).

vamente ad uno e due gruppi metilici ed in esse pertanto si verificano le condizioni necessarie per l'effettuarsi dei citati fenomeni di « iperconiugazione ».

Siccome la frequenza propria di oscillazione del gruppo C = O – come si è discusso in una precedente Nota [3] – appare indipendente, entro certi limiti, dalla massa dei sostituenti al carbonio carbonilico, può essere interessante studiare fino a che punto, ferma restando questa ultima ipotesi di lavoro, le variazioni della frequenza del C = O sovra ricordate si possano ricondurre ad un fenomeno di « iperconiugazione » del C = O stesso a gruppi alchilici.

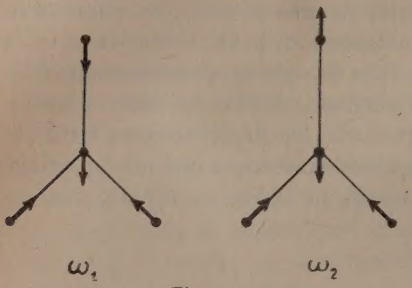


Fig. 1.

Però a questo punto è necessario un chiarimento sul significato della detta frequenza di oscillazione.

Per il calcolo della frequenza caratteristica del gruppo C = O per i vari chetoni e le varie aldeidi considerati, si è assunto come valore fondamentale della frequenza del C = O imperturbato quello dell'aldeide formica ($\omega = 1744\ cm^{-1}$). Si osservi però che nell'aldeide formica detta frequenza è quella propria della oscillazione ω_2 (fig. 1); nei chetoni e nelle aldeidi presi in esame nei nostri calcoli la frequenza che cade nella zona fra 1650 e 1800 cm^{-1}, praticamente

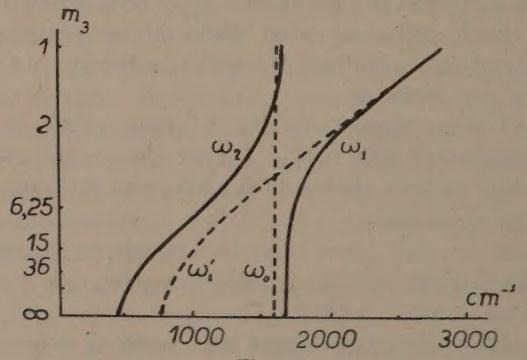


Fig. 2.

indipendente dalle masse dei sostituenti legati al C = O, è propria dell'oscillazione normale ω_1, come si rileva dal diagramma di Burkard [4] riportato in fig. 2.

Si deve però osservare che nelle molecole del tipo $X_2C = O$, per valori delle masse di X maggiori di 6 (come nei casi da noi trattati) l'oscillazione normale ω_1 (che per valori delle masse di X minori di 2 è essenzialmente una oscillazione C — X; fig. 3) viene ad essere invece sostanzialmente una oscil-

(3) Questi « Rendiconti » [VIII], vol. IX, 17 (1950).

(4) Burkard, « Proc. Ind. Acad. », *8*, 365 (1938); Ved. anche: Herzberg, *Infrared and Raman Spectra of polyatomic Molecules*. Van Nostrand (New York, 1947), p. 200.

lazione del legame C = O. Ciò si può chiaramente vedere dallo stesso diagramma di Burkard, riportando, insieme con le curve che dànno la variazione di ω_1 e ω_2 con la massa m_3 del sostituente X per molecole del tipo $X_2C=O$, anche i diagrammi analoghi relativi alla frequenza ω_1' per molecole del tipo CX_2 (fig. 4) e alla frequenza ω_0 del gruppo libero C = O (ove si assumono, a scopo compa-

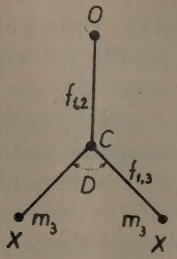


Fig. 3.

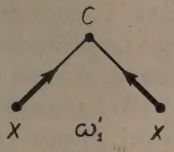


Fig. 4.

rativo, sempre le stesse costanti di forza, per studiare semplicemente l'effetto di massa). Si vede allora che per piccoli valori di m_3 la ω_1 ($X_2C=O$) approssima la ω_1' (CX_2), che è oscillazione del legame C — X, mentre per grandi valori di m_3 la stessa ω_1 approssima ω_0. Il contrario avviene per la ω_2.

Insomma variando il valore delle singole masse che prendono parte ad una vibrazione, variano in genere le caratteristiche della vibrazione stessa, che può trasformarsi da un tipo in altro tipo. Per vedere in modo particolarmente significativo come vari il carattere di una data vibrazione col variare delle masse interessate ad essa, si può, seguendo ancora il Burkard, riportare in diagramma, in funzione delle masse, il contributo delle varie costanti di forza all'energia potenziale totale V della molecola nella vibrazione considerata. Per esempio per il caso che a noi interessa della vibrazione ω_1, nel diagramma della figura 5 è riportato il contributo percentuale delle costanti di forza $f_{1,2}$, $f_{1,3}$, D (fig. 3) all'energia potenziale totale V in funzione della massa m_3. Si vede che mentre per piccoli valori di m_3 il contributo preponderante all'energia potenziale è dato da $f_{1,3}$, sicchè in tali condizioni la oscillazione in esame deve considerarsi come oscillazione propria dei legami C — X, per valori di massa m_3 da circa 6 in su il contributo prevalente all'energia potenziale è fornito da $f_{1,2}$, ossia dalla oscillazione propria del legame C = O, a cui praticamente si riduce l'oscillazione normale considerata.

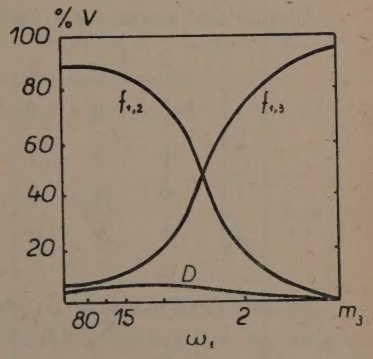


Fig. 5.

Si potrà calcolare, nel caso della acetaldeide e in quello dell'acetone, l'effetto della « iperconiugazione » del metile al gruppo C = O impostando l'equazione seco-

lare del problema e tenendo conto formalmente di un appropriato « integrale di risonanza » fra l'atomo di carbonio carbonilico e gli atomi di carbonio extra-carbonilici legati al gruppo aldeidico o chetonico.

Per la valutazione di questo speciale effetto occorrerà dunque valutare il rapporto $\gamma = \beta_{iper.}/\beta_{c=c}$ tra l'integrale di risonanza $\beta_{iper.}$ dovuto all'effetto di « iperconiugazioni » e l'ordinario integrale $\beta_{c=c}$.

In un lavoro apparso nel 1941 Mulliken, Rieke e Brown [5], in base a dati termochimici, hanno valutato appunto questo rapporto γ. Nella tabella VIII del detto lavoro a p. 53 sono raggruppati diversi valori di γ che oscillerebbero fra $\gamma = 0{,}11$ e $\gamma = 0{,}12$. I valori maggiori di γ, e cioè quelli che si avvicinano di più a 0,12 che a 0,11, corrispondono ai casi nei quali il carbonio, che è oggetto dell'« iperconiugazione », si trova presumibilmente anzichè nello stato di valenza « tetraedrico », in quello « trigonale ». Questo stato è da attribuire ragionevolmente anche al carbonio del gruppo carbonilico. Abbiamo assunto perciò nei nostri calcoli il valore di $\gamma = 0{,}12$.

Per gli altri parametri del calcolo ci riferiamo ai precedenti lavori di questa serie e cioè poniamo:

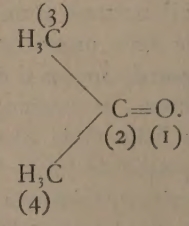
$$\frac{\beta_{c=o}}{\beta_{c=c}} = \mu = 2 \quad ; \quad h = \frac{H_{rr} - H_{cc}}{\beta_{c=c}} = -1{,}2$$

$$\rho_j = \frac{\alpha - E_j}{\beta}$$

(H_{rr} è l'integrale coulombiano relativo all'atomo r).

L'equazione secolare per l'acetone viene allora così espressa:

	1	2	3	4	
1	$\rho - h$	μ	0	0	
2	μ	ρ	γ	γ	$= 0$
3	0	γ	ρ	0	
4	0	γ	0	ρ	



Passando dall'equazione dei chetoni a quella delle aldeidi sature, se si conviene di porre in 4 il gruppo alchilico e in 3 l'idrogeno aldeidico, verranno annullati i termini 2-3 e 3-2 mentre resteranno inalterati gli altri.

La risoluzione dell'equazione secolare ci permette di ricavare i valori dei livelli ρ_j ed i coefficienti normalizzati c_{rj} delle combinazioni lineari. Il doppio della somma dei prodotti $c_{rj}\, c_{sj}$ per il legame C = O estesa ai livelli « leganti » ci dà il cosidetto indice di legame π, ($I_{c=o}$), corrispondente al solo legame π del doppio legame carbonilico totale. Da questi indici di legame π si può passare alla forza di richiamo e alla frequenza di oscillazione nel modo già discusso in un precedente lavoro [6].

(5) Mulliken, Rieke e Brown, « J. Am. Chem. Soc. », *63*, 53 (1941).
(6) Bonino e Scrocco, questi « Rendiconti » [VIII], vol. VI, 421 (1949).

TABELLA.

COMPOSTO	$I_{C=O}$	$2\bar{K}\cdot 10^{-5}$	ω_{C-O} in cm^{-1} calcolato	$\omega_{C=O}$ in cm^{-1} speriment.	$\Delta\omega$ (cm^{-1})	$\Delta\omega$ %	*Note*
Aldeidi (iperconiugazione semplice)							
1) H—C(=O)—H	(1,0000)	(13,450)	(1744)	1744	—	—	(1)
aldeide formica							
2) (CH_3)—C(=O)—H	0,9532	13,054	1717	1716	1	0,06	(2)
aldeide acetica							
3) (C_2H_5)—C(=O)—H	0,9532	13,054	1717	1722	5	0,29	(2)
aldeide propionica							
4) (C_3H_7)—C(=O)—H	0,9532	13,054	1717	1718	1	0,06	(2)
aldeide butirrica							
5) (C_4H_9)—C(=O)—H	0,9532	13,054	1717	1717	0	0	(2)
aldeide valerianica							
6) (C_5H_{11})—C(=O)—H	0,9532	13,054	1717	1720	3	0,17	(2)
aldeide capronica							
Chetoni (iperconiugazione doppia)							
1) (CH_3)—C(=O)—(CH_3)	0,9487	13,016	1715	1706	9	0,53	(2)
acetone							
2) (C_2H_5)—C(=O)—(CH_3)	0,9487	13,016	1715	1711	4	0,23	(2)
metil-etilchetone							
3) (C_2H_5)—C(=O)—(C_2H_5)	0,9487	13,016	1715	1710	5	0,29	(2)
dietil chetone							
4) (C_3H_7)—C(=O)—(CH_3)	0,9487	13,016	1715	1710	5	0,29	(2)
metil propilchetone							

(1) SUTHERLAND e DENNISON, «Proc. Roy. Soc.» (London), *148*, 259 (1934).
(2) KOHLRAUSCH e KOPPI, «Z. f. Phys. Chem.» (B), *24*. 370 (1934).

Nella precedente tabella sono dati i valori dell'indice di legame $I_{c=o}$ del gruppo C = O per alcune aldeidi e chetoni alifatici, la forza di richiamo, la frequenza $\omega_{c=o}$ in cm^{-1}, calcolata partendo dalla frequenza dell'oscillazione del C = O dell'aldeide formica. Nella colonna 5 sono dati, sempre in cm^{-1}, i valori delle frequenze $\omega_{C=O}$ ricavate dagli spettri Raman.

Il confronto tra calcolato e trovato è abbastanza soddisfacente. La differenza media (dei valori assoluti) tra calcolato e trovato negli esempi riportati è di circa 3–4 cm^{-1}, differenza che non ha un significato sensibile dato che nello spettro Raman la riga del C = O appare sotto forma di una banda della quale non è possibile, nelle condizioni sperimentali a cui vanno riferiti i valori della tabella, localizzare il baricentro a meno di 3–4 numeri d'onda.

La teoria che abbiamo esposto permetterebbe dunque (entro i limiti di validità delle ipotesi poste) di ricondurre l'abbassamento della frequenza del C = O nelle aldeidi e nei chetoni saturi ad un effetto di « iperconiugazione » dei gruppi CH_2 e CH_3 legati al gruppo carbonilico stesso.

In un prossimo lavoro studieremo se una tale semplice ipotesi sia sufficiente a renderci conto delle variazioni della frequenza propria del C = O in aldeidi e chetoni non saturi o aromatici nei quali, all'effetto di coniugazione ordinaria del C = O ad un doppio legame C = C o ad un nucleo aromatico si possa aggiungere un effetto di « iperconiugazione » quale quello chiarito in questa Nota.

Scienza della Nutrizione. — *Sul meccanismo di azione di alcuni fattori lipotropi nella steatosi epatica da florizina.* Nota di Ugo Lombroso e Lodovico Arrigo, presentata (*) dal Socio U. Lombroso.

L'imponente letteratura degli ultimi 15 anni, che riguarda in particolar modo l'azione lipotropa della colina è pressochè concorde nell'affermare che il suo meccanismo di azione sia quello di rappresentare un materiale per la sintesi dei fosfolipidi (Jost [20], Artom [2] ecc.).

Ed anche attualmente si vanno continuamente accrescendo i contributi sperimentali positivi (Artom–Fishman [3], Foà–Weinstein–Kleppel [19], Entenmann–Chaikoff–Friendlander [17], Welch–Landau [30], Entenmann–Chaikoff–Zilversmith [18], Treadwell–Mc Kibbin–Taylor [29], Pasargiklian–Marazzi–Pasargiklian M. [26] ecc.), i quali dimostrano come la somministrazione di colina influenzi, incrementandolo, il tasso di lecitina nel fegato e nel sangue.

Anche la Scuola di Best [8–9–10], che ha studiato per la prima, il meccanismo di azione della colina nelle steatosi epatiche, si era inizialmente orientata sopratutto in questo senso. Lo stesso Best però ha prospettato l'ipotesi che la colina eserciti anche un'azione diretta sulla combustione dei grassi, a simiglianza di ciò che pare avvenire per il cosidetto lipocaic (Milla–Trombetta [24], Baccari–

(*) Nella seduta del 9 dicembre 1950.

Guerritore [4] ecc.), e più ancora che avvii, attraverso meccanismi non ben definiti, la trasformazione dei lipidi in glucidi.

Effettivamente Best ed Hershey [9] riferirono alcune esperienze su cani spancreati, in cui, somministrando lecitina, avrebbero osservato un aumento nell'eliminazione giornaliera di glucosio. Dai dati riferiti da questi Autori sulla contemporanea escrezione azotata dei medesimi animali, risulta però che mai essi ottennero nelle urine un rapporto D/N (il cui massimo raggiunto è su 3) che superi quello che si può attribuire alla semplice glicogenesi dalle proteine.

Cedrangolo e Coll. [12–13–14] hanno studiato la possibilità della formazione di glicogeno nel fegato di animali sottoposti ad avvelenamento florizinico (il quale porta a molti fenomeni, simili a quelli della pancreasectomia, elevata glicosuria, steatosi epatica, diminuito assorbimento intestinale e peritoneale di grassi, ecc.), allorchè si impieghi la colina, come fattore lipotropo. Questi Autori, hanno seguìto altresì il comportamento dei fosfolipidi nelle stesse condizioni, trovando che essi diminuiscono e quindi verrebbe a non essere accettabile la concezione del loro intervento, nei meccanismi chimici di mobilizzazione dei grassi.

Il Cedrangolo dunque trova un aumento, nel fegato di cane florizinato ed indi trattato con colina, anche di 10 volte a carico del glicogeno e, in base a considerazioni numeriche, ritiene che esso sia tale da non poter essere giustificato con la semplice partecipazione del radicale glicerolico alla glicogenogenesi. Egli afferma perciò che anche l'ac. grasso vi debba intervenire direttamente.

Anche Conte Marotta [15] ha trovato che il glicogeno aumenta nei ratti trattati con colina, allorchè questi sono tenuti a digiuno ed indi florizinati, mentre, nello stesso tempo, diminuiscono i corpi chetonici nelle urine. Con questi dati, l'A. afferma che si è perciò « portati a supporre che, per azione della colina il grasso risulti meno chetogenetico, appunto perchè trasformato in glucidi ». Conte Marotta ricorda inoltre come Deuel e Coll. [16] sostengano, appunto in base alla diminuita chetonuria da colina, che questa non influenza il processo di ossidazione del grasso epatico. Affermazione questa che non trova conferma in un recente lavoro di Zilversmith–Entenmann–Chaikoff [31], i quali concludono addirittura che la colina più che come parte integrante dei fosfolipidi, entri nel metabolismo dei grassi, attivandone direttamente la combustione. D'altronde Kahane–Levy [22] hanno osservato come la colina accresca costantemente il consumo di ossigeno, da parte di fettine di fegato ed anche di rene.

Per quanto riguarda più precisamente la possibilità di dimostrare *in vitro* la formazione di glicogeno dagli acidi grassi, anche da quelli a corta catena carboniosa, vi sono i dati di Buchanan–Hasting–Nesbet [11] e di Lifson–Lorber–Sakami–Wood [23], i quali ebbero risultati positivi partendo dall'acido propionico e dal butirrico ed ancora con l'acido acetico. È infine anche da ricordare come Ardy–Gallo [1], impostando differentemente il problema, cioè studiando il comportamento della percentuale in grasso nel fegato di cane spancreato, non constatarono una corrispondenza, con aggiunta di colina, tra lipodieresi e glicogenogenesi. Ad ogni modo, le condizioni sperimentali dei vari Autori sono così diverse che non tutti i dati raccolti risultano utilizzabili, nel senso che diverse evenienze sperimentali possono sussistere anche con un'apparente contradditorietà dei risultati.

In seguito, il quesito originario (cioè possibilità per i lipidi di essere metabolizzati in idrati di carbonio, sotto l'azione della colina) non è stato più ripreso, a quanto ci consta e d'altronde le conclusioni degli Autori che lo avevano studiato con procedimenti diretti come Best-coll. e Cedrangolo e coll. non ci apparvero sufficientemente dimostrate dai loro risultati sperimentali, poichè essi non si erano tra l'altro preoccupati di controllare se, nel periodo in cui era in corso il trattamento con colina, la lisi proteica avesse potuto giustificare, anche parzialmente, la neoformazione di glicogeno. Se infatti il « turnover » proteico fosse divenuto più attivo in queste condizioni, le stesse considerazioni degli studiosi della scuola napoletana, per quanto riguarda la connessione logica tra diminuzione dei grassi ed aumento del glicogeno nel fegato potrebbero essere estese ad un eventuale comportamento tra aumento del glicogeno e diminuzione delle proteine nell'organo.

Abbiamo pertanto creduto di riprendere le esperienze su animali florizinati, i quali rappresentano una condizione particolarmente idonea, per controllare se effettivamente la colina determini una trasformazione di grassi in glucidi. Infatti in genere, nell'animale florizinato, si ha un fegato con una discreta infiltrazione grassa (la quale raggiunge rapidamente valori del 13% circa di grassi sul tessuto fresco, nostra media) ed il rapporto D/N risulta piuttosto elevato. Si poteva quindi pensare di superare, se la colina avesse agito positivamente, il valore di 3,5 che rappresenta, secondo Minkowski, l'equivalente teorico dell'origine proteica dell'extra zucchero. Abbiamo voluto seguire altresì il metabolismo gassoso degli animali florizinati, poichè la somministrazione di colina avrebbe dovuto abbassarlo molto, qualora un materiale meno ossigenato (lipidi), si fosse ossidato a glucidi, i quali, non venendo bruciati nell'animale florizinato (Sarzana [28]) sarebbero escreti attraverso il rene.

Nelle nostre esperienze, abbiamo utilizzato ratti bianchi adulti, maschi del peso medio di gr. 220. Un primo gruppo fu tenuto a dieta contenente il 20% di zuccheri, indi trattato per 8 giorni con mmg. 130 pro kg. di florizina, in soluzione acquosa coll'1,5% di carbonato di sodio e successivamente trattato per 5 giorni con mmg. 180 pro kg. di cloridrato di colina. Un secondo gruppo fu tenuto per 4 giorni a dieta priva di glucidi, indi florizinato e trattato con colina. Un terzo gruppo subì lo stesso trattamento, ricevendo però, come fattore lipotropo, la metionina. Infine un 4° gruppo di animali fu tenuto come controllo a dieta priva di zuccheri e trattato con florizina.

Sui fegati prelevati ad ogni animale, al momento dell'uccisione per dissanguamento, si eseguirono dosaggi dei grassi totali, dell'azoto totale, del glicogeno e dei corpi chetonici. Nelle tabelle I e II, sono riportati, per brevità, i valori medi del Q. R., dell'escrezione in glucosio ed azoto totale nelle urine e dei valori del rapporto D/N per ogni giornata di esperimento.

I nostri dati ci dimostrano che:

1° la colina può effettivamente aumentare la glicosuria, ma ciò avviene in modo evidente solo quando nella dieta è presente una percentuale tale di idrati di carbonio (25% nelle esperienze di Best, 20% nelle nostre), la quale, venendo eliminata rapidamente con le urine, non permette di determinare il rapporto di Minkowski.

Tabella I.

	Q. R.	Glicosuria mmg. nelle 24 h	Azoto totale mmg. nelle 24 h	D/N
1° Gruppo: Ratti trattati con mmg. 130 pro Kg. e pro die di florizina:				
1ª giornata	0,78	510	203	2,45
2ª »	0,74	630	241	2,61
3ª »	0,72	444	206	2,15
4ª »	0,69	388	187	2,05
5ª »	0,70	401	199	2,01
6ª »	0,71	315	209	1,5
7ª »	0,70	227	213	1,06
8ª »	0,71	158	152	1,00
9ª »	0,72	105	185	0,56
10ª »	0,72	110	190	0,58
2° Gruppo: Ratti trattati con mmg. 130 pro Kg. e pro die di florizina e con mmg. 180 di colina. Dieta contenente il 20 % di glucidi.				
1ª giornata	0,58	1002	295	3,4
2ª »	0,61	1024	225	4,00
3ª »	0,64	680	284	2,39
4ª »	0,63	535	209	2,56
5ª »	0,67	451	178	2,47
3° Gruppo: Ratti trattati con mmg. 130 pro Kg. di florizina e 180 di colina–Dieta priva di glucidi.				
1ª giornata	0,68	645	270	2,39
2ª »	0,67	430	281	1,53
3ª »	0,70	282	235	1,2
4ª »	0,72	150	214	0,70
4° Gruppo: Ratti trattati con 130 mmg. pro Kg. di florizina e 180 di metionina pro die. Dieta priva di glucidi.				
1ª giornata	0,78	460	210	2,16
2ª »	0,79	298	260	1,14
3° »	0,82	180	212	0,86
4ª »	0,81	119	180	0,60

2° Tale aumento di glicosuria, se il ratto è tenuto a dieta priva di glucidi, è modesto, e mantiene sempre al disotto di 3 il rapporto D/N. Se l'inietto di colina viene ripetuto, l'aumento scompare già dopo i primi due giorni. Ed è bene notare, a questo proposito, che anche nelle esperienze di Best, si assiste ad analogo fenomeno, allorchè è ripetuta la somministrazione di lecitina, senza tuttavia che l'A. sottolineasse tale dato.

3° La metionina non determina un aumento, rispetto ai controlli, né nella eliminazione di glucosio, né nel rapporto D/N.

4° Il Q. R. mostra una modesta diminuzione nei ratti trattati con colina rispetto a quelli solo florizinati, diminuzione che corrisponde ad un maggiore consumo di ossigeno. Quest'ultimo dato però potrebbe essere largamente giustificato da un incremento della glicogenogenesi dalle proteine oppure da un aumento nell'eliminazione dei corpi chetonici dai vari emuntori, senza dovere necessariamente attribuirlo ad una glicogenesi in corso dai lipidi.

La metionina poi innalza, se pure leggermente, i valori medi del Q. R., forse perchè essa è di per sè parzialmente glicogenetica.

5° Si conferma nel fegato degli animali trattati con florizina la diminuzione nella percentuale di grassi totali, la quale risulta apprezzabile usando colina e più consistente ancora impiegando la metionina.

TABELLA II.

Fegato.

(Valori medi su 1 gr. di tessuto fresco)

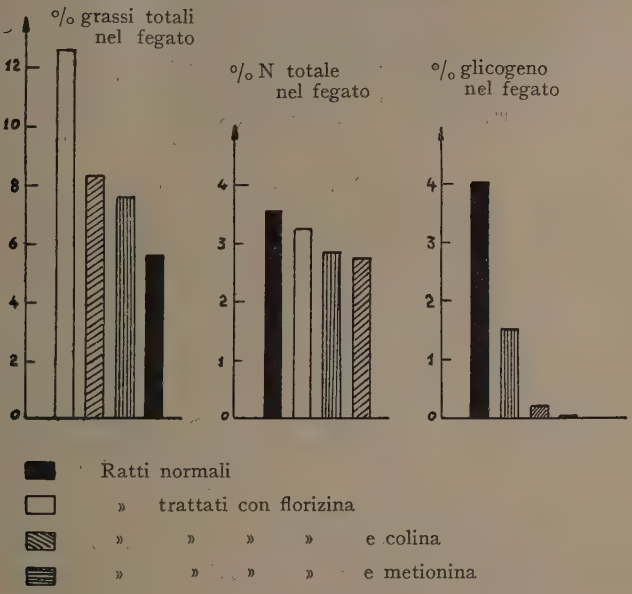
	Peso secco mmg.	Grassi totali mmg.	Azoto tot. mmg.	Corpi chetonici mmg.	Glicogeno mmg.
Ratti normali (10 animali)	314	55	35,1	0,089	40
Ratti trattati con florizina (8 animali)	328	125	32,5	0,398	—
Ratti trattati con florizina e colina. (8 animali)	247	81	26,20	0,524	2
Ratti trattati con florizina e metionina (4 animali)	250	65	27,1	0,434	15

L'aumento del glicogeno è modesto nel primo caso e notevole (fino al 1,5% circa di tessuto fresco), coll'impiego della metionina. Ciò però non rappresenta la dimostrazione diretta che glicogeno si sia formato proprio dai lipidi, come

parrebbe anche indicare la proporzionalità esistente tra maggiore attività lipotropa della metionina e maggiore percentuale di glucidi presenti, rispetto ai corrispondenti dati della colina.

Tale aumento può infatti trovare in altri fattori (ad esempio aumentata proteolisi o eventuali equilibri di distribuzione tra glicogeno periferico ed epatico, ecc.) una sua logica spiegazione. Alcuni Autori infatti come Hess [20] e Sanfilippo [27] affermano che la metionina non interviene, almeno in modo apprezzabile, sulla capacità glicogenogenetica del fegato.

I valori dell'azoto totale, che diminuiscono nel fegato sia col trattamento per mezzo di colina che di metionina potrebbero dare in parte ragione dell'au-



mento del glicogeno; tanto più che la diminuzione dell'azoto totale è maggiore in senso assoluto e percentuale tra il gruppo di animali solo florizinati e quello degli animali florizinati e trattati con sostanze lipotrope rispetto alla differenza tra il gruppo animali normali e solo florizinati, dimodochè non si può obiettare che la maggior quantità di lipidi nel parenchima sia la causa diretta di tale diminuzione. Essa risulta ad ogni modo percentualmente cospicua. In teoria sarebbe sufficiente per spiegarci la genesi del glicogeno di per se stessa, e questa possibilità, per quanto semplicemente ipotetica, presenta più verosimiglianza della genesi del glicogeno dai grassi poichè è noto che la somministrazione di lipidi negli animali spancreati non modifica secondo la maggioranza degli Autori, la perdita in glucidi, mentre invece la somministrazione di proteine produce sempre un notevole aumento nell'escrezione del glucosio, la cui formazione avverrebbe, secondo Minkowski, nel rapporto di 1 (N) a 3,5 (D).

Il comportamento dei corpi chetonici nel tessuto epatico si è rivelato univoco sia col trattamento con colina che con metionina, cioè i loro valori sono modestamente aumentati rispetto a quelli dei ratti solo florizinati. In alcuni casi, e precisamente nelle giornate di maggiore perdita di glucosio colle urine, si procedette ad alcuni dosaggi della chetonuria, che diedero valori molto simili nelle varie disposizioni sperimentali. Si confermano così in parte, per questo riguardo, i dati di quelli Autori (Deuel, Conte Marotta, Baccari e Coll.), che non trovarono una modificazione apprezzabile nel tasso dell'escrezione dei corpi chetonici, durante il trattamento coi due suddetti fattori lipotropi.

Si può concludere perciò a nostro avviso, che gli argomenti portati da Best e da Cedrangolo, per cui la colina determinerebbe una trasformazione di lipidi in glucidi, non possono essere considerati senz'altro sufficienti. Le medesime considerazioni valgono anche per la metionina, per quanto essa determini, più della colina, un aumento nel fegato di idrati di carbonio.

Bibliografia.

[1] Ardy C.-G. Gallo, « Boll. Soc. ital. Biol. sp. », *12*, 315, 316 e 815 (1937).
[2] Artom C., « Archivio Fisiologia », *32*, 57 (1933).
[3] Artom C.–W. H. Fishman, « Journ. Biol. Chem », *148*, 415 e 423 (1943).
[4] Baccari V.-A. Guerritore, « Bollettino Soc. It. Biol. Sper. », *24*, 842 (1948).
[5] Baccari V. e G. Cavina, « Bollettino Soc. It. Biol. Sper. », *25*, 1019 (1949).
[6] Baccari V.–F. Fidanza–G. Giusti, « Bollettino Soc. It. Biol. Sper. », *25*, 1021 (1949).
[7] Baccari V.–F. Fidanza–G. Giusti, « Bollettino Soc. It. Biol. Sper. », *26*, 590 (1950).
[8] Best C. H.-H. J. Channon–H. J. Ridout, « Journ. Physiol. », *81*, 409 (1934).
[9] Best C. H.–H. J. M. Hershey, « Journ. Physiol. », *75*, 49 (1932).
[10] Best C. H.–H. J. Ridout, « Ann. Rev. of Bioch. », *349*, VIII (1939).
[11] Buchanan J. M.-A. B. Hasting–F. B. Nesbet, « Journ. Biol. Chem. », *150*, 413 (1943).
[12] Cedrangolo F., « Arch. Sc. Biol. », *24*, 26 (1938).
[13] Cedrangolo F.–V. Baccari, « Arch. Sc. Biol. », *24*, 311 (1938).
[14] Cedrangolo F.–R. Conte Marotta, « Arch. Sc. Biol. », *22*, 569 (1936).
[15] Conte Marotta R. « Arch. Sc. Biol. », *24*, 396 (1938).
[16] Deuel H. J.-Murray S.–L. F. Hallmann–D. D. Tyler, « Journ. Biol. Chem. », *120*, 277 (1937).
[17] Entenmann C.–I. L. Chaikoff–H.D. Friendlander, « Journ. Biol. Chem. », *162*, 111 (1946).
[18] Entenmann C.–I. L. Chaikoff D. B. Zilversmith, « Journ. Biol. Chem. », *166*, 15 (1946).
[19] Foà P. P.-H. R. Weinstein–B. Kleppel, « Arch. of Bioch. », *19*, 208 (1948).
[20] Hess W. C., « Journ. Biol. Chem. », *181*, 23 (1949).
[21] Jost H., « Zeitschr. Physiol. Chem. », *197*, 190 (1931).
[22] Kahane E.-J. Levy, « Bull. Soc. Chem. Biol. », *29*, 755 (1947).
[23] Lifson N.–V. Lorber–W. Sakami–H. G. Wood, « Journ. Biol. Chem. », *176*, 1263 (1948).
[24] Mc. Kibbin J. M.–W. E. Taylor, « Journ. Biol. Chem. », *185*, 357 (1950).
[25] Milla E.–P. Trombetta, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », *23*, 97 (1947).
[26] Pasargiklian M.–M. Baldini–E. Pasargiklian, « Arch. Fisiologia », XLIX, 260 (1950).
[27] Sanfilippo G., « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », *25*, 1472 (1949).
[28] Sarzana G., « Gazz. Int. Med. e Chim. », *14* (1934).
[29] Treadwell C. R., « Journ. Biol. Chem. », *176*, 1149 (1948).
[30] Welch A. D.–R. L. Landau, « Journ. Biol. Chem. », *144*, 581 (1942).
[31] Zilversmith D. B.–C. Entenmann–I. L. Chaikoff, « Journ. Biol. Chem. », *176*, 193 (1948).

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Geometria. — *Sull'unirazionalità dell'intersezione di più quadriche.* Nota di LEONARD ROTH, presentata (*) dal Corrisp. B. SEGRE.

1. È noto (1) da tempo che la varietà V_r intersezione completa di m quadriche generiche di $[r+m]$ è birazionale non appena contenga qualche $[m-1]$. In questa Nota dimostriamo che V_r è unirazionale non appena contenga qualche $[m-2]$; più precisamente proviamo che

L'intersezione completa di m quadriche generiche di $[r+m]$ $(m>2)$ *è unirazionale e rappresentabile sopra un'involuzione di ordine* $2m-2$, *purchè* $r \geqq m^2/2-2$.

La dimostrazione poggia su una semplice proprietà delle varietà proiettivamente generate. Consideriamo la varietà W_{r-2} di $[r]$, luogo dei punti comuni agli r iperpiani

$$(1) \qquad \begin{cases} \lambda_0 a_{00} + \lambda_1 a_{01} + \cdots + \lambda_{r-2} a_{0,r-2} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_0 a_{r-1,0} + \lambda_1 a_{r-1,1} + \cdots + \lambda_{r-2} a_{r-1,r-2} = 0, \end{cases}$$

ove a_{ij} $(i = 0, 1, \cdots, r-1 \; ; \; j = 0, 1, \cdots, r-2)$ rappresenta una funzione lineare generale omogenea delle coordinate omogenee di $[r]$. Discende facilmente che W_{r-2} è di ordine $r(r-1)/2$ e che possiede un sistema ∞^{r-1} di rette $(r-1)$-secanti di cui una, ed una sola, passa per il punto generico di $[r]$.

Se invece supponiamo che a_{ij} sia funzione lineare delle coordinate di un punto di $[r+1]$, le analoghe equazioni rappresentano una W_{r-1} dello stesso ordine, con la proprietà che, per il punto generico di $[r+1]$, passa un solo piano incontrante W_{r-1} secondo una curva di ordine $r-1$.

Segue immediatamente dalle (1) che W_{r-2} è birazionale ed inoltre che W_{r-1} e pure le varietà $W_r, W_{r+1} \cdots$ definite in modo analogo sono anch'esse birazionali.

Consideriamo ora la V_m comune a m quadriche di $[2m]$, non più in posizione generica bensì passanti per un $[m-2]$. Essendo $(x_0, x_1, \cdots, x_{2m})$ coordinate omogenee in $[2m]$ possiamo supporre che le equazioni di $[m-2]$ siano $x_0 = 0, x_1 = 0, \cdots, x_{m+1} = 0$; allora ciascuna delle quadriche contenenti V_m è rappresentata da un'equazione della forma

$$(2) \qquad (\mathfrak{L} x_0, x_1, \cdots, x_{m+1})^2 + a_{i0} x_{m+2} + a_{i1} x_{m+3} + \cdots + a_{i,m-2} x_{2m} = 0$$

$$(i = 0, 1, \cdots, m-1),$$

ove a_{ij} è funzione lineare omogenea di $x_0, x_1, \cdots, x_{m+1}$.

(*) Nella seduta del 13 gennaio 1951.

(1) Ved. L. GAUTHIER, « Bull. Soc. Roy. Liège », *13*, 191 (1944); L. ROTH, « Annali di Mat. » (4), *29*, 91 (1949).

Proiettando V_m da $[m-2]$ sul $[m+1]$ complementare del simplesso fondamentale, otteniamo una forma Φ_m^{m+1} di equazione

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} (\mathfrak{X} x_0, x_1, \cdots, x_{m+1})^2 & a_{00} & a_{01} & \cdots a_{0,m-2} \\ (\mathfrak{X} x_0, x_1, \cdots, x_{m+1})^2 & a_{10} & a_{11} & \cdots a_{1,m-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\mathfrak{X} x_0, x_1, \cdots, x_{m+1})^2 & a_{m-1,0} & a_{m-1,1} & \cdots a_{m-1,m-2} \end{vmatrix} = 0.$$

Evidentemente Φ_m^{m+1} contiene la W_{m-1}, proiettivamente generabile, rappresentata dalle equazioni

$$(4)\qquad \begin{Vmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots a_{0,m-2} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots a_{1,m-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m-1,0} & a_{m-1,1} & \cdots a_{m-1,m-2} \end{Vmatrix} = 0.$$

Ora, pel punto generico di Φ_m^{m+1} passa un solo piano incontrante W_{m-1} secondo una curva di ordine $m-1$; e questo piano sega ulteriormente Φ_m^{m+1} secondo una conica passante pel punto suddetto. Così possiamo costruire su Φ_m^{m+1} un sistema ∞^{m-1} di coniche, di indice 1, ciascuna delle quali è $(2m-2)$-secante W_{m-1}. Il sistema è birazionale, poichè le coniche sono in corrispondenza birazionale coi piani che le contengono e questi corrispondono biunivocamente ai punti di un $[m-1]$ fisso. E siccome Φ_m^{m+1} contiene un sistema birazionale, di indice uno, di coniche $(2m-2)$-secanti la varietà birazionale W_{m-1}, che è semplice per Φ_m^{m+1}, segue da un teorema di Enriques [2] che Φ_m^{m+1} è unirazionale e rappresentabile sopra una I_{2m-2}.

Consideriamo infine la V_r intersezione completa di m quadriche generiche di $[r+m]$ $(r>2)$. Se $r \geqq m^2/2-2$, essa contiene [3] degli spazi lineari di dimensione $m-2$; proiettandola su $[r+1]$ da uno di questi, otteniamo una forma Φ_r^{m+1} contenente una W_{r-1} del tipo suindicato. Fissando un gruppo generico di $2m$ punti di $[r+1]$, possiamo costruire un solo $[2m]$ passante per essi e per il punto P generico di Φ_r^{m+1}; e per P passa un solo piano giacente in $[2m]$ il quale incontra Φ_r^{m+1} secondo una curva riducibile di cui la componente per P è una conica $(2m-2)$-secante W_{r-1}. Il sistema di coniche così ottenute è evidentemente birazionale, onde segue dal teorema di Enriques che Φ_r^{m+1} è unirazionale e rappresentabile sopra una I_{2m-2}.

Il caso particolare $m=3$ di questo risultato è dovuto a Fano [4] che l'ha ottenuto con un ragionamento geometrico; però questo si traduce facilmente in simboli algebrici che conducono al caso generale qui esposto.

(2) F. Enriques, « Annali di Mat. » (3), *20*, 109 (1913).
(3) A. Predonzan, « Rend. Acc. Lincei » (8), *5*, 238 (1948).
(4) G. Fano, *Scritti matematici offerti a L. Berzolari* (Pavia, 1936), 329.

Meccanica. — *Le equazioni di seconda approssimazione nella nuova teoria relativistica unitaria di Einstein.* Nota I di PAOLO UDESCHINI, presentata (*) dal Corrisp. B. FINZI.

In una precedente Nota (1) ho rilevato che in prima approssimazione, quando cioè la metrica dello spazio–tempo si scosta da quella pseudopitagorica soltanto per termini del 1° ordine e pure del 1° ordine sono le parti emisimmetriche del tensore fondamentale, le equazioni della teoria unitaria, nelle regioni vuote dello spazio, coincidono con quelle della teoria relativistica gravitazionale, per quanto riguarda la gravitazione, e con quelle di Maxwell relative ad un campo elettromagnetico neutro, per quanto riguarda l'elettromagnetismo. Le equazioni del campo unitario si possono scindere in due gruppi distinti contenenti ciascuno soltanto le incognite funzioni riguardanti ciascuno dei due campi fondamentali e la teoria unitaria non porta alcun nuovo risultato.

Non bastano dunque termini del 1° ordine ma è necessario spingersi almeno ad una seconda approssimazione se si vuol trovare qualche nuovo risultato.

In questa Nota dò le equazioni di seconda approssimazione, col risultato che il campo gravitazionale e quello elettromagnetico non si separano più, ma risultano intimamente fusi in un unico campo, quello unitario.

Il campo elettromagnetico influisce su quello gravitazionale, non soltanto attraverso la sua energia, e viceversa il secondo influisce sul primo. Dimostro così che la velocità della luce non sente soltanto il campo gravitazionale della materia e dell'energia, come nella teoria einsteiniana della gravitazione, ma anche quello elettromagnetico. La velocità della luce, che nella statica einsteiniana della gravitazione è una funzione armonica (nelle regioni vuote dello spazio), nella statica unitaria soddisfa ad una equazione di Poisson: il suo laplaciano unitario uguaglia un invariante costruito col tensore derivato del campo magnetico.

1. EQUAZIONI DEL CAMPO UNITARIO IN SECONDA APPROSSIMAZIONE. – In prima approssimazione il tensore fondamentale ha l'espressione:

$$g_{ik} = a_{ik} + b_{ik} \tag{0}$$

dove $a_{ik} = a_{ki} = 0$ per $i \neq k$, $a_{ik} \begin{cases} = 1 & \text{per } i = k = 0 \\ = -1 & \text{per } i = k = 1, 2, 3 \end{cases}$ e b_{ik} sono quantità del 1° ordine. I coefficienti di connessione di prima approssimazione sono:

$$\Gamma^{l}_{(kj)} = \frac{1}{2} a^{lj} (b_{ji,k} + b_{kj,i} - b_{ik,j}). \tag{1}$$

Essi verificano le equazioni:

$$\underset{\vee}{\Gamma^{s}_{si}} = \underset{\vee}{b_{is,}}{}^{s} = 0 \tag{2}$$

(*) Nella seduta del 9 dicembre 1950.

(1) P. UDESCHINI, *Le equazioni di prima approssimazione nella nuova teoria relativistica unitaria di Einstein.* « Acc. Naz. dei Lincei », vol. IX, pp. 256-261, fasc. 5 (1950).

$$(3)\quad L^{s}_{(ik),s} - \frac{1}{2}\left(L^{s}_{(\underline{is}),k} + L^{s}_{(\underline{ks}),i}\right) = \frac{1}{2}\left(b_{\underline{ij}}{}^{,j} - \frac{1}{2} b_{,i}\right)_{,k} + \frac{1}{2}\left(b_{\underline{jk}}{}^{,j} - \frac{1}{2} b_{,k}\right)_{,i} -$$

$$- b_{ki}{}^{,j}{}_{,j} = 0\,, \quad \text{con} \quad b = a^{ij} b_{ij}\ (2).$$

In seconda approssimazione poniamo:

$$(4)\qquad g_{ik} = a_{ik} + b_{ik} + c_{ik} \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3).$$

dove a_{ik} è noto e b_{ik}, soluzione delle (2) e (3), è pure supposto noto.

Poniamo anche

$$(5)\qquad \Gamma^{l}_{(ki)} = L^{l}_{(ki)} + M^{l}_{(ki)}$$

dove i coefficienti $L^{l}_{(ki)}$ sono dati dalla (1) e sono pure supposti noti. c_{ik} ed $M^{l}_{(ki)}$ sono i divari di 2° ordine rispettivamente del tensore fondamentale e dei coefficienti di connessione rispetto ai termini del 1° ordine b_{ik} ed $L^{l}_{(ki)}$ precedentemente calcolati. Le equazioni del campo unitario sono (3):

$$(6)\quad \begin{cases} g_{ik,l} = g_{sk}\,\Gamma^{s}_{(il)} + g_{is}\,\Gamma^{s}_{(lk)} \\ \Gamma_i = \Gamma^{s}_{\underset{\vee}{is}} = 0\ ;\ R_{ik} = \Gamma^{s}_{(ik),s} - \frac{1}{2}\left(\Gamma^{s}_{(\underline{is}),k} + \Gamma^{s}_{(\underline{ks}),i}\right) + \Gamma^{s}_{(ik)}\,\Gamma^{t}_{(\underline{st})} - \Gamma^{s}_{(it)}\,\Gamma^{t}_{(sk)} = 0. \end{cases}$$

In seconda approssimazione, trascurando i termini d'ordine superiore al 2°, le (6) diventano:

$$(7)\quad \begin{cases} b_{ik,l} + c_{ik,l} = (a_{sk} + b_{sk})\,L^{s}_{(il)} + a_{sk}\,M^{s}_{(il)} + (a_{is} + b_{is})\,L^{s}_{(lk)} + a_{is}\,M^{s}_{(lk)} \\ \Gamma_i = L^{s}_{\underset{\vee}{is}} + M^{s}_{\underset{\vee}{is}} = 0\ ;\ R_{ik} = L^{s}_{(ik),s} - \frac{1}{2}\left(L^{s}_{(\underline{is}),k} + L^{s}_{(\underline{ks}),i}\right) + M^{s}_{(ik),s} - \\ \qquad - \frac{1}{2}\left(M^{s}_{(\underline{is}),k} + M^{s}_{(\underline{ks}),i}\right) + L^{s}_{(ik)}\,L^{t}_{(\underline{st})} - L^{s}_{(it)}\,L^{t}_{(sk)} = 0. \end{cases}$$

Grazie alle equazioni (1), (2) e (3) si ottiene, per il calcolo dei termini di 2° ordine, il sistema seguente:

$$(8)\quad \begin{cases} c_{ik,l} = a_{sk}\,M^{s}_{(il)} + a_{is}\,M^{s}_{(lk)} + b_{sk}\,L^{s}_{(il)} + b_{is}\,L^{s}_{(lk)} \\ M^{s}_{\underset{\vee}{is}} = 0 \quad ; \quad M^{s}_{(ik),s} - \frac{1}{2}\left(M^{s}_{(\underline{is}),k} + M^{s}_{(\underline{ks}),i}\right) + L^{s}_{(ik)}\,L^{t}_{(\underline{st})} - L^{s}_{(it)}\,L^{t}_{(sk)} = 0. \end{cases}$$

Dalla prima delle (8) permutando circolarmente gli indici, per somma e sottrazione, si traggono facilmente i termini di 2° ordine $M^{l}_{(ik)}$, dei coefficienti di connessione, essi hanno l'espressione:

$$(9)\quad M^{l}_{(ki)} = \frac{1}{2}\,a^{jl}\left(c_{ji,k} + c_{kj,i} - c_{ik,j}\right) - a^{jl}\left(b_{\underset{\vee}{si}}\,L^{s}_{(jk)} + b_{\underset{\vee}{ks}}\,L^{s}_{(ij)} + b_{\underline{js}}\,L^{s}_{(ki)}\right).$$

La seconda delle (8) diviene allora:

$$(10)\qquad c_{\underset{\vee}{is}}{}^{,s} = a^{js}\left(b_{\underset{\vee}{rs}}\,L^{r}_{(\underline{ji})} + b_{\underset{\vee}{ir}}\,L^{r}_{(\underline{sj})} + b_{\underline{jr}}\,L^{r}_{\underset{\vee}{is}}\right)$$

(2) Cfr. le formule (6), (8), (10), (11) della mia Nota precedentemente citata.

(3) Cfr. EINSTEIN, II^a appendice del libro *The Meaning of Relativity*, Princeton University, trad. it. Einaudi editore (1950).

nella quale il secondo membro è noto dalla prima approssimazione, anzi tenendo presente l'espressione (1) dei simboli di connessione di prima approssimazione, può scriversi così:

$$(10') \qquad \overset{\vee}{c}_{is}{}^{,s} = b^{rs}\overset{\vee}{b}_{ir,s} + b^{rs}\underset{\vee}{b}_{ir,s} + \overset{\vee}{b}_{ir}\left(\underset{\vee}{b}^{rs}{}_{,s} - \frac{1}{2}b^{,r}\right).$$

L'ultima delle (8), indicando con $D^{l}_{(ki)}$ il II° termine al secondo membro di (9), che è noto quando lo sia la prima approssimazione, diviene:

$$\frac{1}{2}\left(c_{ij}{}^{,j} - \frac{1}{2}c_{,i}\right)_{,k} + \frac{1}{2}\left(c_{jk}{}^{,j} - \frac{1}{2}c_{,k}\right)_{,i} - \frac{1}{2}c_{ki}{}_{,j}{}^{j} - \frac{1}{2}\mathfrak{D}^{s}_{(ik),s} + \frac{1}{4}\left(\mathfrak{D}^{s}_{(is),k} + \mathfrak{D}^{s}_{(ks),i}\right) +$$
$$+ \Gamma^{s}_{(ik)}\underset{\vee}{L}^{r}_{(sr)} - \underset{\vee}{L}^{s}_{(ir)}\underset{\vee}{L}^{r}_{(sk)} = 0.$$

Assumiamo, come è sempre lecito e come del resto si fa in relatività generale, il sistema di riferimento in modo che

$$c_{ij}{}^{,j} - \frac{1}{2}c_{,i} = 0.$$

Osservando che per la (10) $\overset{\vee}{c}_{is}{}^{,s} = 1/2\,\mathfrak{D}^{s}_{is}$, si ottiene:

$$(11) \quad c_{hi}{}_{,j}{}^{j} = a^{js}\left(\underset{\vee}{b}_{rs}\underset{\vee}{L}^{r}_{(ji)} + \underset{\vee}{b}_{ir}\underset{\vee}{L}^{r}_{(sj)} + \underset{\vee}{b}_{jr}\underset{\vee}{L}^{r}_{(is)}\right)_{,k} + a^{js}\left(\underset{\vee}{b}_{rk}\underset{\vee}{L}^{r}_{(js)} + \underset{\vee}{b}_{sr}\underset{\vee}{L}^{r}_{(kj)} + \underset{\vee}{b}_{jr}\underset{\vee}{L}^{r}_{(sk)}\right)_{,i} -$$
$$- 2\,a^{js}\left(\underset{\vee}{b}_{rk}\underset{\vee}{L}^{r}_{(ji)} + \underset{\vee}{b}_{ir}\underset{\vee}{L}^{r}_{(kj)} + \underset{\vee}{b}_{jr}\underset{\vee}{L}^{r}_{(ik)}\right)_{,s} + 2\,\underset{\vee}{L}^{r}_{(ih)}\underset{\vee}{L}^{s}_{(rs)} - 2\,\underset{\vee}{L}^{s}_{(ir)}\underset{\vee}{L}^{r}_{(sk)}.$$

In definitiva i coefficienti di connessione di seconda approssimazione sono somma di quelli di prima approssimazione $L^{l}_{(ki)}$ già calcolati, e delle parti di 2° ordine date dalla (9). Possiamo perciò scrivere:

$$(12) \qquad \Gamma^{l}_{(ki)} = \frac{1}{2}a^{jl}\left(g_{ji,k} + g_{kj,i} - g_{ik,j}\right) - a^{jl}\left(\underset{\vee}{b}_{si}\underset{\vee}{L}^{s}_{(ik)} + \underset{\vee}{b}_{ks}\underset{\vee}{L}^{s}_{(ij)} + \underset{\vee}{b}_{js}\underset{\vee}{L}^{s}_{(ki)}\right)$$

dove g_{ik} è dato da (4). Le equazioni di campo di seconda approssimazione relative ai termini c_{ik} sono le (10), o (10'), e (11).

Nell'approssimazione considerata la (10), o (10'), mostra che la divergenza della parte emisimmetrica di 2° ordine $\overset{\vee}{c}_{ik}$ del tensore fondamentale è una funzione conosciuta dei termini di 1° ordine. Così pure la (11) mostra che le parti di 2° ordine del tensore fondamentale, non sono più funzioni armoniche nello spazio-tempo ma, nell'approssimazione considerata, il loro d'alembertiano è funzione conosciuta dei termini di 1° ordine b_{ik}. In conclusione le (10), o (10'), e (11), nota la parte del 1° ordine, permettono di determinare la parte di 2° ordine c_{ik} del tensore fondamentale e quindi la (12) dà i coefficienti di connessione in seconda approssimazione (4).

Nota la soluzione di seconda approssimazione, con un procedimento analogo al precedente si potrebbero scrivere le equazioni di terza approssimazione e così via.

Però basta la seconda approssimazione per mettere subito in evidenza un fatto notevole, che costituisce la differenza essenziale che intercede fra i risultati di prima approssimazione e quelli di ulteriori approssimazioni.

(4) Con facili calcoli si può constatare come l'identità (4) della Nota prima citata sia verificata grazie alle (10).

Campo gravitazionale e campo elettromagnetico sono intimamente fusi nel campo unitario. Non è possibile, come in prima approssimazione, separare le equazioni del campo unitario (10) e (11) in due distinti gruppi: il primo contenente soltanto il tensore simmetrico g_{ik} (in seconda approssimazione $a_{ik} + b_{ik} + c_{ik}$) che dà la metrica, e atto a caratterizzare il campo gravitazionale in assenza di quello elettromagnetico; il secondo, contenente soltanto il tensore emisimmetrico g_{ik} (in seconda approssimazione $b_{ik} + c_{ik}$), atto a caratterizzare il campo elettromagnetico anche indipendentemente da quello gravitazionale. Si ha un unico gruppo di equazioni, quelle del campo unitario.

È dunque possibile mettere in evidenza come il campo elettromagnetico possa influire su quello gravitazionale e viceversa, e altresì determinare il divario fra la nuova teoria unitaria e la teoria gravitazionale della relatività generale (5). Quest'ultima anzi è contenuta nella prima, come caso particolare, allorchè si ritenga simmetrico il tensore fondamentale, annullando in tutte le formule g_{ik}.

2. Deduzione delle equazioni di seconda approssimazione della teoria gravitazionale. – Le equazioni di seconda approssimazione dell'ordinaria teoria einsteiniana della gravitazione, per le regioni vuote dello spazio, si deducono immediatamente dalle (10) e (11) pur di ritenere il tensore fondamentale simmetrico: $g_{ik} = a_{ik} + b'_{ik} + c'_{ik}$, dove b'_{ik} è un tensore simmetrico che dà la parte di primo ordine, e c'_{ik} è un tensore simmetrico che dà la parte di secondo ordine. Ma, dalle equazioni di prima approssimazione, si deduce che $b'_{ik} = b_{ik}$, così che $g_{ik} = a_{ik} + b_{ik} + c'_{ik}$. Esaminiamo che cosa diventano le (10), (11) e (12) quando si faccia $b_{ik} = 0$, $c_{ik} = 0$.

La (10), ricordando anche la (2), è identicamente soddisfatta.

La (11) diviene:

$$(11') \quad c'_{ki\,,\,j}{}^{j} = a^{js}\left[\left(b_{jr}\left\{\begin{matrix} r \\ i\,s \end{matrix}\right\}\right)_{,\,k} + \left(b_{jr}\left\{\begin{matrix} r \\ s\,k \end{matrix}\right\}\right)_{,\,i} - 2\left(b_{jr}\left\{\begin{matrix} r \\ i\,k \end{matrix}\right\}\right)_{,\,s}\right] + 2\left\{\begin{matrix} r \\ i\,k \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} s \\ s\,r \end{matrix}\right\} - 2\left\{\begin{matrix} s \\ i\,r \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} r \\ s\,k \end{matrix}\right\}$$

dove

$$\left\{\begin{matrix} r \\ i\,k \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\,a^{rj}\left(b_{ij\,,\,k} + b_{jk\,,\,i} - b_{ik\,,\,j}\right)$$

sono i simboli di Christoffel di prima approssimazione.

La (12) dà i simboli di Christoffel di seconda approssimazione:

$$(12') \quad \left\{\begin{matrix} l \\ k\,i \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left(a^{jl} - b^{jl}\right)\left(b_{ji\,,\,k} + b_{kj\,,\,i} - b_{ik\,,\,j}\right) + \frac{1}{2}\,a^{jl}\left(c'_{ji\,,\,k} + c'_{kj\,,\,i} - c'_{ik\,,\,j}\right) \text{ (6)}.$$

La (11') permette il calcolo dei termini di 2° ordine c'_{ik} del tensore fondamentale che dà la metrica, noti quelli del 1° ordine, e si constata che generalmente, $c'_{ik} \neq c_{ik}$.

(5) Tale influenza si risente pure nella recente Nota di Narlikar V. V. and Tiwari Ramgi, *On Einsteins generalized theory of gravitation II.* «Proc. Nat. Inst. Sci. India», *15*, 249-261 (1949), riguardante il campo gravitazionale isotropo d'una massa puntiforme a cui si sovrappone il campo elettromagnetico d'una radiazione monocromatica.

(6) Quest'ultima può ottenersi direttamente dalla definizione di simbolo di Christoffel di seconda specie, com'è facile constatare.

Meccanica. — *Su alcune questioni di elasticità ereditaria* (*). Nota di DARIO GRAFFI, presentata (**) dal Socio A. SIGNORINI.

1. Numerose ricerche, anche recenti (1), dimostrano che alcune proprietà dei materiali si possono rappresentare mediante la teoria della elasticità ereditaria di Boltzmann e Volterra (2). Riassumiamo brevemente questa teoria.

Si indichi con $\beta(t)$ l'omografia (3) degli sforzi interni all'istante t e in un punto generico P di un corpo, con $\rho\mathbf{F}(t)$ (ρ densità) le forze di massa per unità di volume, con $\mathbf{R}(t)$ le forze superficiali per unità di superficie, forze calcolate sempre all'istante t, supposti trascurabili i termini di inerzia, valgono ancora, nella predetta teoria, le equazioni dell'elasticità ordinaria:

$$(1) \qquad \rho\mathbf{F}(t) + \operatorname{grad}\beta(t) = 0 \qquad (2) \qquad \beta(t)\,\boldsymbol{n} = \mathbf{R}(t)$$

la prima in tutto il corpo, la seconda sulla superficie Σ che lo limita, $\boldsymbol{n}$ è il versore normale a Σ e diretto verso l'esterno del corpo stesso. Però la relazione fra omografia delle deformazioni $D\alpha(t)$ ($\alpha(t) = d\,\boldsymbol{s}(t)/d\mathrm{P}$, (dove $\boldsymbol{s}(t)$ è lo spostamento del punto generico P del corpo all'istante t) e omografia degli sforzi interni $\beta(t)$ non è più la legge di Hooke, ma un'equazione più generale, che, per i corpi isotropi e allo stato naturale negli istanti $t < 0$, può scriversi:

$$(3) \qquad D\alpha(t) = \frac{1+\sigma}{E}\beta(t) - \frac{\sigma}{E}\mathrm{I}_1(\beta(t)) + \int_0^t g(t,\tau)\,\beta(\tau)\,d\tau$$

$$- \int_0^t h(t,\tau)\,\mathrm{I}_1(\beta(\tau))\,d\tau$$

dove E e σ sono rispettivamente i moduli di Young e di Poisson (4). $D\alpha(\tau)$, $\beta(\tau)$ rispettivamente le omografie delle deformazioni e degli sforzi interni all'istante τ; $g(t,\tau)$, $h(t,\tau)$ due funzioni continue di t e τ, che chiameremo, rispettivamente, prima e seconda funzione di Volterra. Gli ultimi integrali di (3) sono i così-

(*) Sviluppo di una comunicazione tenuta al Congresso Internazionale dei Matematici di Cambridge Mass.

(**) Nella seduta del 13 gennaio 1951.

(1) Cfr. per esempio E. VOLTERRA, *Alcuni risultati di prove dinamiche su materiali*. «La Rivista del Nuovo Cimento», vol. 4, pp. 1-28 (1948); G. KRALL, *Statica dei mezzi elastici viscosi e sue applicazioni*. «Rendiconti Accademia dei Lincei», ser. VIII, vol. 2, pp. 233-37, 371-377 (1947).

(2) L. BOLTZMANN, *Zur theorie der Elastichen nachwirkung*, «Wiener Berichte», 70, Bd. II, pp. 275-300 (1874); V. VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions des lignes*. Paris, Gauthier-Villars, 1913, Cap. VI, VII e VIII.

(3) In questa Nota si adopera il calcolo vettoriale omografico di BURALI-FORTI e MARCOLONGO, calcolo esposto, per esempio, nel volumetto di P. BURGATTI, *Elementi di calcolo vettoriale omografico*. Hoepli, Milano (1937).

(4) Più precisamente i moduli di Young e di Poisson misurati all'istante iniziale.

detti termini ereditari; se, come spesso accade, le funzioni di Volterra dipendono solo dall'argomento $t - \tau$, l'ereditarietà si dice invariabile.

Assegnate le forze, la trattazione generale dei problemi di elasticità in base all'equazioni (1), (2), (3) si riconduce alla risoluzione di equazioni integro-differenziali di cui V. Volterra ha sviluppato ampiamente la teoria.

In questa Nota, considerato un corpo omogeneo e a connessione semplice [5], ricercheremo, in sostanza, particolari soluzioni di quelle equazioni integro-differenziali, soluzioni però relativamente semplici e forse non prive di interesse pratico. Cercheremo cioè di determinare condizioni per cui gli sforzi interni (ossia la omografia $\beta(t)$) sono, a parità di forze di massa e superficiali, gli stessi come nel caso non ereditario, che si ha, ovviamente, quando le funzioni di Volterra sono identicamente nulle. In altre parole, ricercheremo le condizioni affinchè la ereditarietà alteri gli spostamenti, ma non gli sforzi interni. Troveremo che ciò può accadere se l'invariante lineare della omografia degli sforzi interni (nel caso non ereditario) è, in ogni istante, funzione lineare delle coordinate, oppure se fra le funzioni di Volterra passa la relazione:

$$\frac{\sigma}{1+\sigma} g(t,\tau) - h(t,\tau) = 0 . \tag{4}$$

Nel primo caso rientrano importanti casi di deformazione elastica come estensione semplice, torsione, flessione uniforme, flessione sferica o più in generale le deformazioni trasversali (lo spostamento $\boldsymbol{s}$ è il rotazionale di un vettore) oppure longitudinale ($\boldsymbol{s}$ uguale al gradiente di uno scalare) quando le forze di massa sono nulle [6].

Nel secondo [7] si può facilmente risalire alla espressione dello spostamento e si può provare che gli sforzi interni sono gli stessi del caso non ereditario (a parità si intende di forze attive) anche se su alcune parti Σ_1 della superficie Σ del corpo non sono assegnate le forze, ma gli spostamenti sono nulli, oppure sono assegnate le componenti delle forze in due direzioni distinte $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ ed è nulla la componente dello spostamento in direzione normale ad $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$. Siccome ciò accade quando il corpo elastico è opportunamente vincolato a corpi da ritenersi rigidi si ha che, se è soddisfatta la (4), l'ereditarietà non altera gli sforzi interni e quindi le reazioni di vincolo.

Dimostreremo poi che nei sistemi piani, supposte nulle le forze di massa, l'ereditarietà non altera, in nessun caso, gli sforzi interni.

(5) È probabile che, in molti casi, quest'ultima ipotesi sia superflua.

(6) Questi risultati sono, in parte, confermati da ricerche del prof. SIGNORINI che ha provato (*Sopra alcune questioni di statica dei sistemi continui*. « Annali della Scuola Normale superiore di Pisa », ser. 2ª, vol. 2, pp. 231–251, 1933), che se il tensore degli sforzi è lineare esso può esprimersi mediante le forze di massa e superficiali e indipendentemente dalla natura dei corpi.

(7) La (4) è certamente verificata se, come fa qualche autore, si trascura la contrazione laterale e la corrispondente ereditarietà, cioè quando si ammettono σ e $h(t,\tau)$ identicamente nulle.

Infine studieremo il caso in cui le forze di massa sono nulle e alla superficie del corpo invece delle forze sono assegnati gli spostamenti.

2. Sia dunque $\beta_0(t)$ l'omografia degli sforzi interni nel corpo considerato in assenza di ereditarietà e a parità di forze di massa e superficiali. Ovviamente $\beta_0(t)$ soddisfa (1) e (2) inoltre ad essa corrisponde una omografia di deformazione $D\alpha_0(t)$ data da:

$$(5) \qquad D\alpha_0(t) = \frac{1+\sigma}{E}\beta_0(t) - \frac{\sigma}{E} I_1(\beta_0(t))$$

e per la relazione di Saint–Venant:

$$(6) \qquad \mathrm{Rot\,K\,Rot}\, D\alpha_0(t) = \frac{1+\sigma}{E}\,\mathrm{Rot\,K\,Rot}\,\beta_0(t) - \frac{\sigma}{E}\,\mathrm{Rot\,K\,Rot}\, I_1(\beta_0(t)) = 0.$$

Ora $\beta_0(t)$ coinciderà con l'omografia degli sforzi interni $\beta(t)$, qualora si tenga conto dei termini ereditari, se la corrispondente $D\alpha(t)$, data da (3), soddisferà essa pure alle condizioni di Saint–Venant, essendo, come si è detto, (1) e (2) soddisfatte da $\beta_0(t)$. Si avrà così, tenendo conto di (6):

$$(7) \qquad \mathrm{Rot\,K\,Rot}\, D\alpha = \int_0^t g(t,\tau)\,\mathrm{Rot\,K\,Rot}\,\beta_0(\tau)\,d\tau -$$

$$- \int_0^t h(t,\tau)\,\mathrm{Rot\,K\,Rot}\, I_1(\beta_0(\tau))\,d\tau =$$

$$= \int_0^t \left(\frac{\sigma}{1+\sigma} g(t,\tau) - h(t,\tau)\right) \mathrm{Rot\,K\,Rot}\, I_1(\beta_0(\tau))\,d\tau = 0\,.$$

Ora questa equazione è certamente soddisfatta se fra le funzioni di Volterra passa la relazione (4) oppure se è in ogni istante [8]:

$$(8) \qquad \mathrm{Rot\,K\,Rot}\, I_1(\beta_0(t)) = 0\,.$$

(8) La (8) e la (4) sono conseguenze necessarie di (6) nei seguenti casi:

a) L'ereditarietà è invariabile cioè le funzioni di Volterra dipendono dall'argomento $t-\tau$. Allora detto $m(t-\tau)$ il primo membro di (4) $f(\tau)$ una generica componente di $\mathrm{Rot\,K\,Rot}\, D\alpha(\tau)$ si ha che deve essere nullo, per ogni t, $\int_0^t m(t-\tau) f(\tau)\,d\tau$. Applicando la trasformazione di Laplace (cfr. D. GRAFFI, *Sul teorema di reciprocità per le correnti elettriche variabili.* « Annali di Matematica pura e applicata », ser. IV, tomo 35 (1946) nota di p. 272) si ha $m(t-\tau)$ o $f(t)$ identicamente nulle cioè la (8) o la (4);

b) il primo membro di (4) che ora indicheremo con $m(t,\tau)$ è come, si presenta nelle ricerche del prof. Krall (loc. cit., nota 1), funzione solo di τ. Allora derivando si ha che vale o la (8) o la (4);

c) considerando la (7) come una equazione integrale di Volterra di prima specie con incognite le componenti $f(\tau)$ di $\mathrm{Rot\,K\,Rot}\, D\alpha(\tau)$ se $m(t,t) = 0$ si ha (cfr. VOLTERRA, *Leçons sur les equations integrales*. Paris, Gauthier–Villars, 1913, Cap. 2) necessariamente $f(\tau) = 0$ onde la (8).

Poichè, come è noto [9], se $I_1(\beta_0(t))$ (o che è lo stesso $I_1(D\alpha_0(t))$ proporzionale a $I_1(\beta_0(t))$) soddisfa a (8) esso è una funzione lineare delle coordinate; possiamo concludere, conforme al numero precedente, che l'ereditarietà non altera gli sforzi interni, se vale la (4), oppure se l'invariante lineare della omografia degli sforzi interni è, in assenza di ereditarietà, funzione lineare delle coordinate.

3. Se è valida la (4) si può scrivere:

$$(9)\qquad D\alpha(t) = \frac{1+\sigma}{E}\beta(t) - \frac{\sigma}{E} I_1(\beta(t)) +$$

$$+ \frac{E}{1+\sigma}\int_0^t \left(g(t,\tau)\frac{1+\sigma}{E}\beta(\tau) - \frac{\sigma}{E} I_1(\beta(\tau))\right) d\tau =$$

$$= D\alpha_0(t) + \frac{E}{1+\sigma}\int_0^t g(t,\tau)\, D\alpha_0(\tau)\, d\tau;$$

perciò, se $\boldsymbol{s}_0(t)$ è lo spostamento del punto P del corpo in assenza di ereditarietà (a meno di uno spostamento di corpo rigido), si ha per lo spostamento di P quando si tenga conto dei termini ereditari:

$$(10)\qquad \boldsymbol{s}(t) = \boldsymbol{s}_0(t) + \frac{E}{1+\sigma}\int_0^t g(t,\tau)\,\boldsymbol{s}_0(\tau)\, d\tau.$$

Consideriamo ora un corpo omogeneo, in cui sia valida la (4), soggetto a note forze di massa e a note forze superficiali sulla porzione Σ_1 della superficie Σ che lo limita, mentre sulla parte rimanente Σ_2 gli spostamenti siano nulli. Siano $\beta_0(t)$ e $\boldsymbol{s}_0(t)$ l'omografia degli sforzi interni e gli spostamenti dei punti del corpo qualora si trovi nelle condizioni ora specificate e manchino i termini ereditari; $\beta(t)$ e $\boldsymbol{s}(t)$ siano le stesse grandezze quando si tien conto di quei termini.

Ponendo $\beta(t) = \beta_0(t)$ resta verificata la (1) in tutto il corpo, la (2) su Σ_1 e poichè lo spostamento $\boldsymbol{s}(t)$ è dato dalla (10), esso risulta nullo come $\boldsymbol{s}_0(t)$ su Σ_2. Possiamo perciò concludere che $\boldsymbol{s}(t)$ dato da (10) e $\beta(t) = \beta_0(t)$ sono, rispettivamente, lo spostamento e l'omografia degli sforzi interni nel caso ereditario perchè soddisfano a tutte le condizioni che li determinano. Quindi il teorema già accennato nella introduzione: l'ereditarietà non altera gli sforzi interni in un corpo in cui vale la (4) qualora siano assegnate le forze di massa in tutto il corpo e le superficiali su una porzione della superficie Σ che lo limita, mentre sulla parte rimanente di Σ gli spostamenti sono nulli. L'estensione di questo teorema, indicata nella introduzione, è immediata.

(9) Cfr. P. Burgatti, *Teoria Matematica della elasticità*. Zanichelli, Bologna 1931, Cap. I.

4. Nel caso dei sistemi piani, se sono nulle le forze di massa si può facilmente provare, come si è già detto, che in ogni caso l'ereditarietà non altera gli sforzi interni.

Consideriamo un sistema piano cioè supponiamo $\beta(t)$ funzione solo di x e y (oltre si intende di t) e $\beta(t)\,\boldsymbol{k}$ uguale a zero, in altre parole, piana l'omografia $\beta(t)$. Allora introducendo la funzione di Airy $F(t)$ risultano subito soddisfatte le (1). Le (3) si possono scrivere, in forma cartesiana, indicando con $\varepsilon_{xx}(t)$, $\varepsilon_{yy}(t)$, $\varepsilon_{xy}(t)$ le componenti della omografia $D\alpha(t)$ lungo gli assi x, y (Δ^2 indica, al solito, l'operatore di Laplace):

$$(11)\quad \varepsilon_{xx}(t) = \frac{1+\sigma}{E}\frac{\partial^2 F(t)}{\partial y^2} - \frac{\sigma}{E}\Delta^2 F(t) + \int_0^t g(t,\tau)\frac{\partial^2 F(\tau)}{\partial y^2}\,d\tau - \int_0^t h(t,\tau)\Delta^2 F(\tau)\,d\tau$$

$$(12)\quad \varepsilon_{yy}(t) = \frac{1+\sigma}{E}\frac{\partial^2 F(t)}{\partial x^2} - \frac{\sigma}{E}\Delta^2 F(t) + \int_0^t g(t,\tau)\frac{\partial^2 F(\tau)}{\partial x^2}\,d\tau - \int_0^t h(t,\tau)\Delta^2 F(\tau)\,d\tau$$

$$(13)\quad \varepsilon_{xy}(t) = -\frac{1+\sigma}{E}\frac{\partial^2 F(t)}{\partial x\,\partial y} - \int_0^t g(t,\tau)\frac{\partial^2 F(\tau)}{\partial x\,\partial y}\,d\tau.$$

Ora, nel caso dei sistemi piani, le equazioni di Saint–Venant si riducono a[10]:

$$(14)\quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}(t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}(t)}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}(t)}{\partial x\,\partial y} = 0.$$

Quindi, sostituendo le (11) (12) e (13) in questa equazione, dopo facili calcoli ed essendo al solito $\Delta^4 F = \Delta^2(\Delta^2 F)$, si ha:

$$(15)\quad \Delta^4 F(t) + E\int_0^t (g(t,\tau) - h(t,\tau))\,\Delta^4 F(\tau)\,d\tau = 0.$$

La (15) si può considerare come una equazione integrale di Volterra nella incognita $\Delta^4 F(t)$. Deve essere perciò, per noti teoremi:

$$(16)\quad \Delta^4 F(t) = 0.$$

La $F(t)$ è quindi biarmonica come nel caso non ereditario e per la (2) soddisfa le stesse condizioni al contorno. L'ereditarietà non altera dunque la funzione di Airy e di conseguenza gli sforzi interni, come si era affermato.

5. Infine accenniamo al caso, meno importante, in cui le forze di massa sono nulle, e invece delle forze superficiali sono assegnati gli spostamenti

(10) Per una discussione approfondita sulle proprietà dei sistemi piani si veda G. SUPINO, *Il problema elastico piano e la sua interpretazione dello spazio.* «Rendiconti Accademia dei Lincei», serie VI, vol. 22, pp. 523-528 e 581–585 (1935).

della superficie del corpo. Conviene allora risolvere la (3) rispetto a $\beta(t)$ e scrivere [11]:

$$(17) \qquad \beta(t) = L\, I_1(D\alpha(t)) + 2\,K\,D\alpha(t) + \int_0^t \varphi(t,\tau)\, I_1(D\alpha(\tau))\, d\tau + \\ + 2\int_0^t \psi(t,\tau)\, D\alpha(\tau)\, d\tau$$

dove L, K, sono numeri che corrispondono alle costanti di Lamè, $\varphi(t,\tau), \psi(t,\tau)$ il coefficiente di funzioni che si possono esprimere mediante i moduli di Young, Poisson e le funzioni di Volterra.

Ora sia $\boldsymbol{s}_0(t)$ il valore dello spostamento del caso non ereditario (o, più precisamente, quando $\varphi(t,\tau), \psi(t,\tau)$ sono identicamente nulle) in corrispondenza ai prefissati valori al contorno. Determiniamo le condizioni per cui $\boldsymbol{s}_0(t)$ è lo spostamento anche nel caso ereditario. Si ha intanto, posto $\alpha_0(t) = (d\,\boldsymbol{s}_0(t)/d\mathrm{P})$ questo valore per l'omografia degli sforzi interni, sempre nel caso non ereditario:

$$(18) \qquad \beta_0(t) = L\, I_1(\alpha_0(t)) + 2\,K\,D\alpha_0(t)$$

da cui poichè $\beta_0(t)$ deve soddisfare a (1) con $\rho\mathbf{F}(t) = 0$ si ha:

$$(19) \qquad L\ \mathrm{grad}\ I_1(\alpha_0(t)) + 2\,K\ \mathrm{grad}\ D\alpha_0(t) = 0\,.$$

Ma se $\boldsymbol{s}_0(t)$ rappresenta anche gli spostamenti nel caso ereditario deve soddisfare a (1) anche la $\beta(t)$ data da (17) con $\alpha_0(t)$ in luogo di $\alpha(t)$. Quindi, ricordando (18), si ha:

$$(20) \qquad \int_0^t \left(\varphi(t,\tau) - \frac{L}{K}\psi(t,\tau)\right) \mathrm{grad}\ I_1(\alpha_0(\tau))\, d\tau = 0\,.$$

Questa equazione è certamente soddisfatta se $(c(t)$ indica una funzione della sola $t)$:

$$(21) \qquad I_1(D\alpha_0(t)) = c(t),$$

oppure se:

$$(22) \qquad \varphi(t,\tau) - \frac{L}{K}\psi(t,\tau) = 0\,.$$

In altre parole, a parità di spostamenti al contorno, l'ereditarietà non altera gli spostamenti di un corpo elastico se fra le funzioni che esprimono l'ereditarietà passa la relazione (22), oppure se, in ogni istante, è identica, in tutti i punti del corpo, la dilatazione cubica.

(11) È opportuno notare che V. Volterra nel libro citato nella nota (1) scrive questa equazione e non la (3). Però risolvendo due equazioni integrali di Volterra (la cui soluzione è abbastanza semplice, specie nel caso, molto comune in pratica, in cui $\varphi(t,\tau), \psi(t,\tau)$ sono somme di esponenziali di $t-\tau$, si può passare dalla (16) alla (3) e viceversa.

Astronomia. — *L'assorbimento atmosferico della radiazione solare a Campo Imperatore, sul Gran Sasso d'Italia.* Nota di TERESA FORTINI, presentata (*) dal Socio G. ARMELLINI.

1. Fin dal 1931, in un articolo pubblicato nel Calendario dell'Osservatorio Astronomico di Roma (1), il suo Direttore prof. G. Armellini aveva espresso il desiderio e l'opportunità che l'Osservatorio di Roma potesse un giorno avere a disposizione una succursale in alta montagna, per lavori di spettroscopia e fotometria stellare e nebulare.

Fig. 1.

Ora questo desiderio è divenuto realtà. La specola è sorta a Campo Imperatore, sul Gran Sasso d'Italia, a metri 2200 sul mare, in posizione assai facilmente accessibile, giacchè si trova a circa trecento metri di distanza dall'Albergo Turistico ed annessa stazione della funivia che congiunge Campo Imperatore col sottostante paese di Assergi, superando un dislivello di circa mille metri; e precisamente si trova lungo la dorsale che dal nominato Albergo sale verso il Corno Grande, e cioè verso la vetta del Gran Sasso d'Italia (m. 2921 sul mare). Nell'estate di questo anno 1950 sono stati ultimati i lavori murari (cfr. fig. 1) ed è stata messa

(*) Nella seduta del 9 dicembre 1950.

(1) Cfr. « Calendario dell'Osservatorio Astronomico di Roma » per il 1931, p. 84.

a posto una cupola astronomica, a doppia parete, di otto metri di diametro interno, dove dovrà essere collocato un grande riflettore Schmidt a corto fuoco di 36 pollici di apertura, già ordinato alla Penn Optical Company (S. U.) insieme con un grande prisma obbiettivo, per lavori di statistica spettroscopica.

2. In attesa del riflettore, ho avuto incarico dal Direttore dell'Osservatorio prof. G. Armellini di eseguire un primo saggio sulla trasparenza atmosferica a Campo Imperatore ed a tale scopo mi sono recata sul posto nel luglio e nel settembre di questo anno, per eseguirvi misure piroeliometriche della radiazione solare. Specialmente nella gita di settembre, ho avuto la fortuna d'incontrare giornate eccezionalmente serene, in cui la trasparenza atmosferica era così elevata da permettermi di vedere il mare Adriatico fino alle opposte coste dalmate. Insieme alle mie, ho ridotto anche alcune osservazioni inedite, eseguite nel giugno 1947 dal prof. M. Cimino durante un suo soggiorno a Campo Imperatore.

3. Ho effettuato le misure con un piroeliometro a pila termoelettrica e milliamperometro di precisione, di proprietà dell'Osservatorio di Roma, costruito dalla casa Kipp (Olanda), che permette di misurare una variazione d'irradiazione di un millesimo di calorie-grammi per centimetro quadrato e minuto primo. Lo strumento è provvisto di quattro filtri di luce e cioè *rosso cupo*, *rosso*, *giallo* e *bleu*; e precisamente, secondo i dati forniti dalla stessa casa Kipp, il filtro rosso cupo è trasparente in modo quasi uniforme per lunghezze d'onda superiori a $\lambda = 6750$ Angstrom fino a circa 28.000 Angstrom; il filtro rosso per lunghezza d'onda superiori a $\lambda = 6000$ Angstrom; il filtro giallo per lunghezze d'onda superiori a $\lambda = 4500$ Angstrom (sempre in modo quasi uniforme fino a circa 28.000 Angstrom), mentre invece il filtro bleu ha un intervallo di trasparenza compreso tra $\lambda = 3500$ e $\lambda = 6500$ Angstrom, con un massimo piuttosto pronunciato per $\lambda = 4800$.

Ho eseguito le osservazioni in varie ore (sempre ovviamente in giornate serene), in modo da misurare l'irradiazione solare a differenti distanze zenitali. Nella seguente tabella, riporto la data e l'ora precisa (necessaria per il calcolo della distanza zenitale del Sole) in cui ho eseguito la misura, e le deviazioni dell'ago del galvanometro per la radiazione totale (T) del Sole e cioè con pila termoelettrica senza filtro, oppure per la radiazione filtrata con filtro bleu (B), giallo (G), rosso (R) e rosso cupo (RC). Insieme con le mie misure, riporto pure quelle eseguite dal prof. M. Cimino nel 1947.

4. Come vediamo dalla tabella, in generale e per evidenti ragioni, le deviazioni del galvanometro per tutte le lunghezze d'onda aumentano col crescere dell'altezza del Sole sull'orizzonte e sono quindi massime a mezzogiorno vero; le poche eccezioni sono probabimente dovute a formazioni temporanee di lievi nebulosità nell'alta atmosfera e debbono quindi essere considerate come errori accidentali di osservazione.

TABELLA I.

Risultati delle misure.

DATA	Ora	T	B	G	R	RC
1947-giugno 16	5^h27^m	37,73	6,63	29,50	24,80	22,56
	6 13	49,67	11,78	40,70	29,74	24,43
	6 49	59,10	13,00	43,00	30,99	24,43
	8 33	64,95	15,43	47,03	33,83	26,96
	9 06	66,10	15,80	49,60	34,90	28,00
	13 44	67,50	15,60	46,65	33,75	27,55
giugno 19	5 3	30,75	5,55	25,11	21,48	17,78
	6 0	51,10	10,64	40,23	30,64	24,81
	6 59	64,43	14,56	48,23	36,06	28,76
	7 56	68,80	15,50	50,27	36,97	29,63
	8 35	71,50	16,20	53,63	39,60	31,53
	9 43	70,87	15,94	52,27	38,77	30,44
giugno 21	6 20	53,60	11,77	42,23	32,00	24,63
	6 55	58,44	13,10	45,17	33,44	27,20
	7 28	61,70	13,66	47,06	34,63	27,86
	8 16	65,83	14,90	49,50	36,03	28,76
	9 31	68,73	16,07	52,00	37,23	30,50
1950-luglio 14	7 42	56,95	16,00	39.40	30,80	26,45
	8 54	60,70	17,65	41,25	31,40	26,80
	10 47	64,30	19,50	44,50	34.35	31,05
	12 4	60,85	16,15	40.35	30,40	27,15
	13 2	60,50	15,20	38,65	27,95	23,70
	15 7	56,35	15,55	38,55	28,50	25,55
	16 18	46,30	10,50	32,00	23,40	20,45
	17 11	44,40	11,30	31,20	23,20	20,50
	18 11	34,20	7,65	22,35	19,25	16,45
luglio 15	8 6	57,70	16,80	40,45	30,80	26,95
	9 30	60,70	16,95	41,15	31,50	27,95
	10 25	62,55	17,25	41,85	31,50	28,05
	11 31	63,00	17,85	42,65	32,10	28,00
settembre 17 . . .	11 4	63,97	14,16	43,37	31,67	27,97
	12 55	67,10	14,13	44,10	32,03	27,77
	11 12	59,20	12,05	40,40	28,65	25,45
	17 7	47,67	8,47	32,27	26,17	22,63
settembre 18 . . .	7 26	51,66	10,03	35,33	26,57	22,63
	9 9	59,53	12,97	40,57	29,20	25,57
	11 25	62,86	13,20	42,53	29,13	26,90
	13 55	62,37	12,84	42,20	29,70	25,87
	15 11	58,80	12,30	39,27	29,27	25,44

Per effettuare le riduzioni sono partita dalla nota formola di Lambert, perfezionata recentemente dal Bemporad [2], e cioè:

(1) $$i = Ia^{F(z)}$$

(2) Cfr. A. BEMPORAD, *L'assorbimento dell'atmosfera terrestre sulla luce degli astri*, in «Mem. Acc. Lincei», vol. V, 1904.

dove i indica l'energia misurata dall'osservatore; I l'energia che l'osservatore avrebbe trovato se – in quello stesso momento – avesse potuto eseguire la sua misura al di fuori dell'atmosfera terrestre ed alla stessa distanza dal Sole; a un coefficiente, minore dell'unità, che si chiama *coefficiente di trasparenza atmosferica* ed infine $F(z)$ una funzione della distanza zenitale z, calcolata da Bemporad e che praticamente differisce pochissimo da $\sec z$, almeno per valori non molto grandi di z. Ovviamente, se si avesse $a = 1$ e cioè se la trasparenza atmosferica fosse perfetta, risulterebbe sempre $i = I$.

Notando che l'energia misurata è proporzionale alla deviazione dell'ago del galvanometro, la (1) può scriversi anche sotto la forma

$$l = L\, a^{F(z)} \tag{2}$$

dove l indica la deviazione letta dall'osservatore ed L la lettura che si sarebbe avuta se fosse stato possibile di eseguire la misura fuori della nostra atmosfera. Più semplicemente, prendendo i logaritmi, la (2) diviene

$$\operatorname{Log} l = \operatorname{Log} L + AF(z) \tag{3}$$

dove abbiamo posto per brevità $A = \operatorname{Log} a$, e dove $F(z)$ è dato dalle tabelle del Bemporad per ciascuna distanza zenitale. Ora, poichè l è data dalla lettura

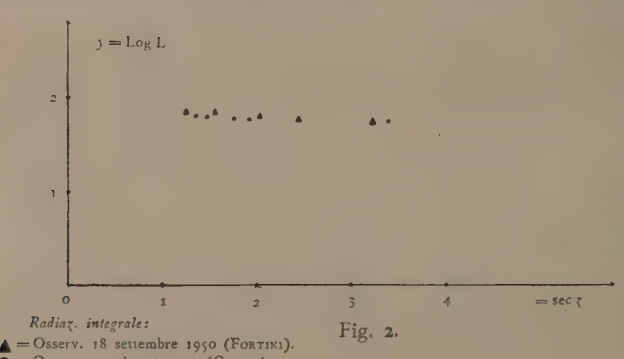


Fig. 2.

del galvanometro e z si calcola facilmente, conoscendo l'ora dell'osservazione, la declinazione del Sole e la latitudine del luogo, la (3) ha per incognite A ed L.

Osserviamo in proposito che A dipende dalla lunghezza d'onda dell'energia misurata e che L dipende sia dalla lunghezza d'onda, sia dalla distanza Δ del Sole dalla Terra al momento delle osservazioni. Di conseguenza, tenendo separate le osservazioni eseguite ciascun giorno con un dato filtro, λ e Δ risulteranno sensibilmente costanti e quindi anche L ed A saranno costanti, onde potremo trattare ciascun gruppo delle (3) col metodo dei minimi quadrati, prendendo appunto per incognite A e Log L.

5. I calcoli sono alquanto laboriosi, onde prima d'iniziarli ho voluto saggiare graficamente la bontà delle osservazioni, costruendo un diagramma cartesiano e prendendo per ascissa $F(z)$ e per ordinata $\operatorname{Log} l$. Ed ho trovato (fig. 2) che, per

ciascun giorno, i punti immagini delle osservazioni eseguite con un dato filtro, o misurando l'energia integrale, si dispongono con molta approssimazione lungo una linea retta, il cui coefficiente direttivo è appunto il valore di A per quel dato giorno e per quella lunghezza d'onda.

Eseguito questo saggio preliminare, ho calcolato col metodo dei minimi quadrati i valori di A e quindi di *a*, trovando per *a* i risultati riportati nella seguente

TABELLA II.

Coefficienti giornalieri di trasparenza atmosferica a Campo Imperatore.

Data	T	B	G	R	RC
1947-giugno-16	0,89	0,85	0,91	0,94	0,96 (Cimino)
19	0,88	0,85	0,90	0,91	0,91
21	0,88	0,85	0,90	0,93	0,91
1950-giugno-14	0,81	0,76	0,82	0,87	0,87 (Fortini)
15	0,84	0,81	0,86	0,90	0,90
17	0,91	0,87	0,91	0,95	0,93
18	0,91	0,88	0,92	0,95	0,94

Da questa tabella, tenendo presente quanto abbiamo detto sopra la trasparenza dei filtri usati, ricaviamo i risultati finali esposti nella seguente:

TABELLA III.

Coefficienti medi di trasparenza atmosferica a Campo Imperatore.

Osservatore	Energia integr.	Filtro bleu	Filtro giallo	Filtro rosso	Filtro rosso cupo
M. Cimino (1947) . .	0,88	0,85	0,90	0,93	0,93
T. Fortini (1950) . . .	0,89	0,83	0,88	0,92	0,92

6. Per confrontare questi risultati con i valori del coefficiente di trasparenza *a* ottenuto in altri luoghi, notiamo che al livello del mare per la radiazione integrale del Sole si ha $a = 0{,}69$ circa; mentre, secondo le osservazioni del Müller[3] a Davos (Svizzera; m. 1600 sul mare) si avrebbe $a = 0{,}82$; sul Santis (Ger-

(3) Cfr. G. MÜLLER, *Die Photometrie der Gestirne.*

mania; m. 2500 sul mare) $a = 0{,}88$. In conseguenza la trasparenza atmosferica a Campo Imperatore (m. 2280) risulta in media eguale a quella riscontrata dal Müller (sempre in giornate molto serene, come egli stesso dice) a 2500 metri di altezza sul Santis. Vi sono però delle giornate così buone (ad es. il 18 settembre di questo anno) in cui il coefficiente di trasparenza a Campo Imperatore per l'energia integrale giunge a 0,91, e per l'energia rossa a 0,95.

Immaginiamo quindi di osservare una stella, posta p. es. a 30° gradi di altezza sull'orizzonte, e chiamiamo con i_1 la sua intensità apparente a Campo Imperatore e con i_2 quella al livello del mare. Poichè in tal caso si ha $z = 60°$ e poichè F (60°) è presso a poco eguale a 2, avremo facilmente dalla (1)

$$(4) \qquad \frac{i_1}{i_2} = \left(\frac{0{,}88}{0{,}69}\right)^2 = 1{,}65$$

vale a dire, l'astro osservato a Campo Imperatore apparirà poco meno di due volte più splendente di quel che apparirebbe osservandolo al livello del mare. E ciò mostra il vantaggio di avere un grande riflettore a forti altezze.

Astronomia. — *Sopra l'orbita della* σ *Coronae Borealis*. Nota di Maria Antonietta Giannuzzi, presentata(*) dal Socio G. Armellini.

1. La stella σ *Coronae Borealis* ($\alpha = 16^h\,12^m{,}8$; $\delta = 33°\,59'$; eq. 1950) che nel catalogo generale delle stelle doppie ADS (Aitken's General Catalogue of double stars) porta il numero 9979, è una binaria visuale la cui orbita è stata oggetto di molte discussioni; ed anzi assai spesso gli astronomi, nel calcolarne gli elementi, sono giunti a risultati assai contrastanti tra loro.

Così nel 1905, W. Doberck assegnava(1) all'orbita un periodo P di 1679 anni, insieme con un'eccentricità e molto elevata ($e = 0{,}848$) ed un semiasse maggiore $a = 9''{,}02$. Ma nel 1928, Henroteau, servendosi di nuove osservazioni, trovava(2) un periodo assai più lungo (P = 7584 anni) ed un'eccentricità ancora maggiore ($e = 0{,}924$). Più tardi, nel 1936, Zagar ha ripreso il problema(3), mostrando che le osservazioni eseguite fino al 1930 possono essere rappresentate con discreta approssimazione supponendo l'orbita parabolica e cioè l'eccentricità eguale ad 1. Ma l'anno seguente 1937 Strand tornava(4) ad un'orbita essenzialmente poco diversa da quella indicata da Doberck nel 1905, ed anzi con eccentricità alquanto minore ($e = 0{,}80$) e periodo notevolmente più breve e cioè P = 1162 anni.

Ovviamente tutte queste incertezze e contraddizioni tra i risultati di tanti astronomi valorosi, dipendono non solo dai piccoli errori di osservazioni, inevitabili nelle misure delle stelle doppie, ma sopratutto dal fatto che l'arco orbitale percorso

(*) Nella seduta del 9 dicembre 1950.

(1) Cfr. W. Doberck, *On the orbit of* σ *Cor. Bor.* in «Astr. Nachr.», Bd. 169, n. 4051.

(2) Cfr. C. Henroteau, *The binary* σ *Cor. Borealis*, in «Handb. der Astroph.», Bd. VI, p. 342.

(3) Cfr. F. Zagar, *Orbita parabolica di* σ *Cor. Bor.* in «Pubbl. Oss. di Padova», n. 49 (1936).

(4) Cfr. A. Strand, *The orbit of* σ *Cor. Bor.*, in «Ann. Sterrew. Leiden», Bd. XVIII.

dal satellite è ancora troppo breve; ciò che mostra la opportunità di aumentarlo per mezzo di altre osservazioni micrometriche del satellite. Ed in conseguenza il prof. G. Armellini, servendosi del grande equatoriale rifrattore Steinheil (O = 390 mm; F = 5,24 m.) dell'Osservatorio di Roma su Monte Mario, ha eseguito sulla doppia nel giugno 1949 una nuova serie di misure; le quali – confrontate con le prime fatte da Herschel centosettanta anni fa – portano l'arco conosciuto a 240° circa, come appare dalla seguente tabella dove ho raccolto cronologicamente tutti i dati conosciuti, indicando sempre con ϑ l'angolo di posizione del satellite, ρ il raggio vettore e t il tempo dell'osservazione.

Per eseguire la raccolta, mi sono servita dei « Rend. Lincei », delle « Astronomische Nachrichten » (Bd. 169–238–239–258–259) dell'« Astronomical Journal » (Vol. 36–37–38–52), del « Bull. Astronomical of Netherland » (Vol. VII–VIII e IX), delle *Mikr. Messungen von Doppelsternen* dell'Osservatorio di Monaco (1939), delle *Mésures d'étoiles doubles* dell'Osservatorio di Parigi, dei *Contributi scientifici* dell'Osservatorio di Roma, ecc. oltre ovviamente al già citato catalogo generale ADS dell'Aitken ed al catalogo generale del Burnham.

2. Ho così ottenuto la seguente:

TABELLA I.

Data	ϑ	ρ	Osservatore	Data	ϑ	ρ	Osservatore
a) *Misure eseguite su σ Coronae Borealis nei secoli XVIII e XIX*							
1781,20	347°,5	3″,45	W. Herschel	1804,74	11°,1	2″,24	W. Herschel
1819,62	49 ,4	1 ,42	W. Struve	21,30	56 ,7	1 ,35	J. Herschel
22,67	63 ,0	1 ,30	»	22,83	63 ,8	1 ,29	W. Struve
23,47	66 ,9	1 ,27	Herschel	25,44	77 ,2	1 ,22	South
27,02	89 ,3	1 ,31	Struve	30,11	104 ,9	1 ,22	W. Struve
32,99	118 ,8	1 ,30	»	33,50	130 ,5	1 ,31	»
36,59	134 ,7	1 ,43	»	37,55	140 ,0	1 ,42	»
38,45	143 ,0	1 ,48	O. Struve	40,82	150 ,2	1 ,54	»
41,84	151 ,3	1 ,46	Glaisher	47,02	168 ,7	1 ,74	O. Struve
49,92	170 ,7	1 ,97	O. Struve	52,13	173 ,4	2 ,06	»
53,66	175 ,6	2 ,17	»	55,29	179 ,1	2 ,27	»
56,57	179 ,9	2 ,46	»	58,01	181 ,9	2 ,51	»
59,94	186 ,1	2 ,62	»	61,58	187 ,4	2 ,69	»
63,32	188 ,5	2 ,77	»	65,36	191 ,9	2 ,94	»
66,63	193 ,0	3 ,00	»	68,58	194 ,7	2 ,98	»
72,57	195 ,3	3 ,26	»	73,56	197 ,6	3 ,14	»
74,61	199 ,8	3 ,41	»	78,03	201 ,0	3 ,40	Dembowski
78,50	202 ,0	3 ,51	Dembowski	82,01	202 ,8	3 ,70	Hall
83,47	204 ,5	3 ,77	Hall	84,48	206 ,0	3 ,80	»
85,43	205 ,7	3 ,89	»	85,81	204 ,5	4 ,07	Celoria
86,48	206 ,9	3 ,96	Hall	87,44	205 ,5	3 ,99	Hall
88,44	206 ,6	3 ,91	»	88,80	207 ,2	3 ,92	Schiaparelli
90,33	207 ,8	4 ,08	Burnham	92,62	209 ,9	4 ,06	Comstock
92,70	208 ,9	4 ,26	Celoria	95,15	210 ,0	4 ,28	H. Struve
95,96	210 ,9	4 ,18	Schiaparelli	97,77	209 ,9	4 ,31	Aitken
98,23	211 ,7	4 ,41	Hussey	99,11	211 ,9	4 ,49	Celoria
99,79	212 ,4	4 ,53	Doolittle				

Segue: TABELLA I.

Data	ϑ	ρ	Osservatore	Data	ϑ	ρ	Osservatore

b) *Misure eseguite su σ Coronae Borealis nel secolo XX*

1901,29	213°,2	4″,32	Burnham	1901,99	213°,2	4″,55	Lohse
3,39	214 ,4	4 ,51	Doolittle	3,47	213 ,9	4 ,49	Thiele
5,53	214 ,9	4 ,59	Burnham	5,65	215 ,7	—	Doberck
5,84	215 ,5	4 ,68	Lau	8,45	216 ,1	4 ,62	Hertzspr.
10,79	216 ,6	4 ,79	Phillips	12,94	216 ,8	4 ,92	Rabe
14,37	217 ,3	4 ,93	Vyssotsky	16,68	217 ,2	5 ,03	Van Biesbroeck
19,29	218 ,4	5 ,07	Abetti	22,25	219 ,6	5 ,26	Baize
22,76	218 ,5	5 ,16	Leavenworth	23,51	220 ,5	5 ,14	Leavenworth
24,56	220 ,0	5 ,16	»	25,39	220 ,9	5 ,50	Giacobini
25,49	220 ,9	5 ,31	Komendantoff	25,56	220 ,4	5 ,14	Leavenworth
25,60	221 ,0	5 ,30	Bermann	26,51	220 ,2	5 ,20	»
26,55	221 ,0	5 ,45	Bermann	29,47	221 ,5	5 ,32	Aller
29,49	222 ,8	5 ,28	Doberck	30,57	222 ,8	5 ,36	Kuiper
30,95	221 ,0	5 ,35	Bonnet	32,64	223 ,3	5 ,50	Rabe
33,38	224 ,2	5 ,40	Doberck	33,63	223 ,1	5 ,33	»
34,54	224 ,3	5 ,58	Rabe	35,56	223 ,8	5 ,49	»
36,67	223 ,6	5 ,51	Phillips	37,30	223 ,2	5 ,59	Strand
37,56	224 ,4	5 ,57	Rabe	37,60	224 ,0	5 ,62	Hertzsprung
38,38	223 ,4	5 ,62	Strand	38,56	224 ,2	5 ,65	Rabe
39,28	224 ,2	5 ,67	»	39,46	224 ,9	5 ,60	Schmeidler
40,49	224 ,5	5 ,70	»	41,46	224 ,9	5 ,73	Strand
42,53	225 ,0	5 ,73	»	49,61	228 ,1	5 ,84	Armellini

3. In possesso di questa lunga serie di misure, per eliminare gli errori accidentali di osservazione, ho anzitutto costruito due grafici, prendendo sempre per ascissa i tempi di osservazioni e per ordinate nell'uno i raggi vettori ρ e nell'altro le anomalie ϑ. Ho quindi costruito le curve di compenso, che mi hanno dato i seguenti dodici *luoghi normali*, a distanza di quindici anni l'uno dall'altro:

Data	ϑ	ρ	Data	ϑ	ρ
1781,00	347°,5	3″,43	1799,00	4°,8	2″,43
1814,00	34 ,5	1 ,67	1829,00	97 ,5	1 ,18
1844,00	158 ,1	1 ,71	1859,00	184 ,5	2 ,60
1874,00	198 ,5	3 ,37	1889,00	207 ,5	4 ,03
1904,00	214 ,0	4 ,62	1919,00	219 ,4	5 ,13
1934,00	223 ,8	5 ,33	1949,00	227 ,7	5 ,80

Ciò fatto, ho preso per origine la stella principale, ho scelto come asse delle ascisse la direzione del cerchio orario col senso positivo verso il polo boreale della sfera celeste ed ho riportato in un disegno i dodici punti così individuati, scegliendo l'unità di lunghezza in modo da avere 1″ = 30 mm. Ho

quindi costruito graficamente l'ellisse che meglio passa per essi, trovando per la sua equazione:

$$(1) \quad 0{,}01769\,x^2 + 0{,}00014\,xy + 0{,}01119\,y^2 - 0{,}01150\,x + 0{,}24114\,y = 1.$$

Ora, i raggi vettori, che congiungono l'origine con questi dodici punti, individuano undici settori ellittici e, conoscendo i tempi dallo specchietto sopra indicato, ho calcolato le velocità areali medie del satellite in questi settori. Prendendo come unità la velocità areale media c in tutta l'area percorsa dal 1781 al 1949, ho trovato per i valori delle undici velocità areali medie:

$$c_1 = 0{,}993 \; ; \; c_2 = 1{,}00 \; ; \; c_3 = 1{,}02 \; ; \; c_4 = 1{,}01 \; ; \; c_5 = 0{,}988 \; ; \; c_6 = 0{,}997$$

$$c_7 = 0{,}988 \; ; \; c_8 = 0{,}977 \; ; \; c_9 = 1{,}02 \; ; \; c_{10} = 1{,}00 \; ; \; c_{11} = 1{,}00$$

ciò che mostra che questa orbita apparente è già sufficientemente approssimata per servire di base al calcolo di una prima orbita reale.

Servendomi allora del metodo analitico[5] di Kowalsky, ho avuto come elementi dell'orbita reale,

$$a = 5'',77 \; ; \; e = 0{,}752 \; ; \; i = \pm 34°{,}1 \; ; \; \Omega = 4°{,}4 \; ; \; \omega = 88°{,}0 \; ; \; P = 869 \; ; \; \tau = 1828{,}3$$

dove, al solito a, e, i, Ω, ω indicano il semiasse maggiore in secondi di arco, l'eccentricità dell'orbita, la sua inclinazione (determinata a meno del segno) sul piano tangente alla sfera celeste, l'angolo di posizione del nodo (determinato a meno di 180°) e la distanza angolare tra il nodo ed il periastro; P è il periodo di rivoluzione in anni e τ l'epoca del passaggio al periastro. Il moto medio n risulta ovviamente eguale a $360°/869 = 0°{,}4144$ all'anno.

4. Determinati questi elementi orbitali, sono passata a migliorarli valendomi del metodo[6] di Hellerich.

A tale fine, ho calcolato anzi tutto gli angoli di posizione ϑ della stella satellite nei dodici tempi normali, con le formole della teoria delle orbite:

$$(2) \quad n(t - \tau) = \mu$$

$$(3) \quad u - e \sin u = \mu$$

$$(4) \quad \operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{u}{2}$$

$$(5) \quad \operatorname{tg} (\vartheta - \Omega) = \operatorname{tg} (v + \omega) \cos i$$

dove ovviamente μ, u, v indicano l'anomalia media, l'anomalia eccentrica e quella vera all'istante t ed ho quindi eseguite le differenze $\Delta\vartheta = O - C$ tra i valori osservati e quelli calcolati di ϑ. Ciò posto, indichiamo con $\Delta e, \Delta i, \Delta\Omega$ ecc.

(5) Cfr. G. ARMELLINI, *Trattato di Astronomia Siderale*, vol. II, p. 433 e sgg. (Bologna, Zanichelli, 1931).

(6) Cfr. G. ARMELLINI, op. cit., vol. II, p. 440 e sgg.

le piccole correzioni da darsi agli elementi (essendo le correzioni angolari misurate in *radianti*, per omogeneità) e poniamo con Hellerich

$$\Delta\tau' = n\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\frac{\Delta\tau}{1-e} \tag{6}$$

$$\Delta n' = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\frac{\Delta n}{1-e} \tag{7}$$

$$\Delta e' = \frac{2{,}21\,\Delta e}{1-e^2}. \tag{8}$$

Ogni differenza $\Delta\vartheta = O - C$ conduce allora ad un'equazione lineare nelle sei incognite $\Delta e'$, Δi, $\Delta\Omega$, $\Delta\omega$, $\Delta\tau'$, $\Delta n'$. In tal modo, ho ottenuto dodici equazioni, di cui ho calcolato i coefficienti servendomi anche delle tavole [7] di Schlesinger, ed ho poi risoluto col metodo dei minimi quadrati, pervenendo al seguente sistema di equazioni normali

$$(9)\quad \begin{cases} 12{,}0000\,\Delta\Omega + 1{,}41887\,\Delta i + 11{,}2970\,\Delta\omega - 3{,}69938\,\Delta\tau' + 36{,}3775\,\Delta n' + 2{,}53225\,\Delta e' = 0{,}22689 \\ 1{,}41887\,\Delta\Omega + 0{,}67360\,\Delta i + 1{,}35162\,\Delta\omega - 0{,}09920\,\Delta\tau' + 7{,}90683\,\Delta n' + 0{,}44290\,\Delta e' = 0{,}01689 \\ 11{,}2970\,\Delta\Omega + 1{,}35162\,\Delta i + 10{,}4451\,\Delta\omega - 3{,}67634\,\Delta\tau' + 34{,}5132\,\Delta n' + 2{,}39616\,\Delta e' = 0{,}21132 \\ 3{,}69938\,\Delta\Omega + 0{,}09920\,\Delta i + 3{,}67634\,\Delta\omega - 2{,}40622\,\Delta\tau' + 3{,}71977\,\Delta n' + 0{,}28079\,\Delta e' = 0{,}10394 \\ 36{,}3775\,\Delta\Omega + 7{,}90683\,\Delta i + 34{,}5132\,\Delta\omega - 3{,}71977\,\Delta\tau' + 669{,}636\,\Delta n' + 54{,}9789\,\Delta e' = 0{,}98348 \\ 2{,}53225\,\Delta\Omega + 0{,}44290\,\Delta i + 2{,}39616\,\Delta\omega - 0{,}28079\,\Delta\tau' + 54\,9789\,\Delta n' + 4{,}60098\,\Delta e' = 0{,}08139 \end{cases}$$

dove ho conservato sei cifre significative in tutti i coefficienti. Risolvendole, e quindi passando dai valori $\Delta\tau'$, $\Delta n'$ ecc. a $\Delta\tau$, Δn ecc. con la (6), (7) ed (8) e riducendo gli angoli da radianti in gradi, ho avuto infine:

$$\Delta\Omega = 6^\circ{,}1 \;;\; \Delta i = \mp\, 3^\circ{,}3 \;;\; \Delta\omega = -\,6^\circ{,}9 \;;\; \Delta\tau = -0{,}78 \;;$$
$$\Delta n = -\,0^\circ{,}0441 \;;\; \Delta e = 0{,}022$$

e quindi, applicando tali correzioni agli elementi provvisori da me determinati col metodo di Kowalsky ho avuto gli elementi migliorati, eccetto a.

Per avere questa ultima, secondo il metodo di Hellerich, sono partita dall'equazione

$$\rho = a\,(1 - e\cos u)\cos(v + \omega)\sec(\vartheta - \Omega) \tag{10}$$

che ci dà il raggio vettore apparente, e da cui derivando rispetto ad a si ottiene subito

$$\Delta a = a\,\frac{\Delta\rho}{\rho}. \tag{11}$$

Calcolando quindi con la stessa (10) i valori di ρ, paragonandoli con quelli ottenuti dalle osservazioni ed eseguendo le differenze $\Delta\rho = O - C$ tra osservazioni e calcolo, ogni misura ci darà un valore dell'incognita Δa. Eseguendo tali calcoli per i dodici luoghi normali, ho avuto cosi dodici valori, la cui media mi ha dato infine $\Delta a = 0''{,}48$.

(7) Cfr. SCHLESINGER, *The determination of the orbit of a sp. binary by the method of leas squares*, in « Publ. Allegheny Observatory », vol. I, n. 6.

Applicando tutte queste correzioni agli elementi provvisori, ho così avuto come *elementi migliorati dell'orbita di σ Coronae Borealis*:

$a = 6'',25$; $e = 0,774$; $i = \pm\ 30°,8$; $\Omega = 10°,5$; $\omega = 81°,1$; $P = 972^a$;

$\tau = 1827,5$; $n = 0°,3703$

dove il periodo P in anni risulta ovviamente dal rapporto 360/0,3703.

5. Per esaminare l'esattezza di questi elementi, ho di nuovo calcolato con essi i raggi vettori ρ e gli angoli di posizione ϑ della stella satellite nei dodici tempi normali, servendomi delle (2), (3), (4), (5) e (10), ed ho quindi eseguito le differenze O — C tra osservazioni e calcolo, ottenendo la seguente:

TABELLA II.

Confronto tra orbita osservata ed orbita calcolata con gli elementi di M. A. Giannuzzi.

Data	$\vartheta_{oss.}$	$\vartheta_{calc.}$	O—C	$\rho_{oss.}$	$\rho_{calc.}$	O—C
1781,00	347°,5	347°,0	+0°,5	3'',43	3'',21	0'',22
1799,00	4 ,8	5 ,0	—0 ,2	2 ,43	2 ,43	0 ,00
1814,00	34 ,5	34 ,7	—0 ,2	1 ,67	1 ,67	0 ,00
1829,00	97 ,5	98 ,2	—0 ,7	1 ,18	1 ,22	—0 ,04
1844,00	158 ,1	158 ,4	—0 ,3	1 ,71	1 ,76	—0 ,05
1859,00	184 ,5	184 ,4	0 ,1	2 ,60	2 ,56	0 ,04
1874,00	198 ,5	198 ,3	0 ,2	3 ,37	3 ,28	0 ,09
1889,00	207 ,5	207 ,5	0 ,0	4 ,03	3 ,91	0 ,12
1904,00	214 ,0	214 ,2	—0 ,2	4 ,62	4 ,55	0 ,07
1919,00	219 ,4	219 ,5	—0 ,1	5 ,13	4 ,97	0 ,16
1934,00	223 ,8	223 ,9	—0 ,1	5 ,53	5 ,42	0 ,11
1949,00	227 ,7	227 ,7	0 ,0	5 ,80	5 ,83	—0 ,03

Come appare da questa tabella, le differenze O — C non presentano nessun carattere sistematico e sono assai piccole (generalmente dell'ordine degli errori di osservazione), onde gli elementi che ho dato sono certamente abbastanza approssimati. Notiamo che, tra le varie orbite calcolate, quella che più si avvicina alla mia è quella data [8] da Strand nel 1937.

6. Indicando con μ_1 e μ_2 le masse delle due stelle, misurate prendendo per unità la massa del Sole, con P il periodo in anni, con a e p il semiasse maggiore e la parallasse in secondi di arco, si ha dalla Meccanica Celeste la nota formola

$$(12) \qquad (\mu_1 + \mu_2)\, P^2 = \left(\frac{a}{p}\right)^3.$$

(8) Cfr. A. STRAND, Mem. cit. in « Ann. Sterrew. Leiden » Bd. XVIII.

Ora, secondo il *General Catalogue of Stellar Parallaxes* di Schlesinger, la parallasse trigonometrica del sistema è $0''{,}048$ e quella spettroscopica $0''{,}034$. Ponendo dunque in media $p = 0''{,}041$ e prendendo $a = 6''{,}25$ e $P = 972$, otteniamo dalla (12), $\mu_1 + \mu_2 = 3{,}7$.

Ma la stella satellite ha il tipo spettrale GO e cioè ha un tipo lievemente presolare, mentre la stella principale (che è, a sua volta, una binaria spettroscopica) ha il tipo nettamente presolare F 7. Possiamo dunque supporre logicamente che la stella satellite abbia una massa lievemente superiore a quella del Sole e cioè che si abbia $\mu_2 = 1{,}1$; ed analogamente, possiamo logicamente supporre che ciascuna delle due componenti l'astro principale abbia massa alquanto superiore alla solare per esempio 1,2. Con ciò si avrebbe $\mu_1 = 2{,}4$ e quindi $\mu_1 + \mu_2 = 3{,}5$; valore quasi coincidente con quello che io ricavo dalla (12), servendomi degli elementi orbitali da me calcolati. Inoltre, essendo $a/p = 15{,}2$, si vede subito che il semiasse maggiore a ha una lunghezza di 15,2 unità astronomiche (2.280.000.000 Km.) onde la distanza media dei due astri è poco minore di quella di Urano dal Sole.

Fisica matematica. — *Sulle discontinuità delle derivate del potenziale della gravità attraverso una superficie di discontinuità per la densità* (*). Nota di TRISTANO MANACORDA, presentata (**) dal Corrisp. G. SANSONE.

1. SCOPO E RISULTATI DEL LAVORO. – Qualche anno fa H. Ertel (1) ha determinato le discontinuità delle derivate seconde del potenziale della gravità attraverso una superficie di discontinuità della densità materiale, generalizzando così le formule di Weingarten (2), relative alle discontinuità delle derivate seconde del potenziale attraverso la superficie che limita le masse generatrici del campo.

D'altra parte erano già state determinate, anni prima del lavoro di Ertel, le discontinuità delle derivate terze del potenziale gravitazionale attraverso la superficie, supposta di livello, che limita le masse (3). È apparso quindi opportuno estendere i risultati relativi alle derivate terze al caso che le discontinuità siano da esse subìte nel passaggio attraverso una superficie di discontinuità per la densità materiale. Si è avuto in tal modo occasione di ritrovare in modo rapido e sintetico i risultati di Ertel, da lui conseguiti per via scalare. Si trova poi che anche nel caso più generale qui esaminato, le discontinuità delle derivate terze del potenziale della gravità conservano l'espressione, a parte il diverso significato dei simboli, del caso già esaminato, mentre lo stesso non accade per diversi enti geometrici, qui considerati, che nel caso di superficie di livello sono continui, ed ora no.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Matematico dell'Università di Firenze.

(**) Nella seduta del 13 gennaio 1951.

(1) H. ERTEL, *U. die Unstetigkeiten der zweiten Ableitungen des Schwerpotenzials an Diskontinuitätsflächen der Dichte.* «Z. A. M. M.», *25*–*27*, pp. 186–189 (1947).

(2) J. WEINGARTEN, *Zur Theorie des Flächenpotentials.* «Acta Math.», *10*, pp. 303–309 (1887).

(3) B. CALDONAZZO, *Considerazioni geometriche sui potenziali gravitazionali.* «Rend. Ist. Lombardo», *75*, pp. 239–259 (1942).

2. CONSIDERAZIONI INTRODUTTIVE. – Sia U il potenziale della gravità generato da un sistema materiale di densità ρ discontinua attraverso una superficie Σ regolare almeno in un intorno del punto considerato, ed $\boldsymbol{n}$ il versore normale ad essa, scelto con verso arbitrario. Posto

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{grad} U = g\mathbf{N}, \qquad g \geqq 0,$$

g ed $\mathbf{N}$ sono continui attraverso Σ in conseguenza della continuità di grad U. Rimane definita in un intorno contenente Σ, o meglio la porzione di essa che si considera, e in cui è $g \neq 0$, l'omografia

$$\text{(2)} \qquad \sigma = \frac{d\mathbf{N}}{d\mathrm{P}}$$

funzione continua e derivabile dei punti P dell'intorno considerato salvo attraverso Σ, e l'omografia

$$\text{(3)} \qquad \xi = \frac{d}{d\mathrm{P}} \operatorname{grad} U,$$

anch'essa definita, continua e derivabile salvo attraverso Σ. Mediante σ si possono esprimere gli elementi geometrici di una qualunque superficie di livello per U. Inoltre è

$$\text{(4)} \qquad \sigma\mathbf{N} = c\boldsymbol{\nu}$$

con c flessione e $\boldsymbol{\nu}$ normale principale della linea di forza passante per il punto P considerato [4].

3. DEDUZIONE SINTETICA DELLE FORMULE DI ERTEL. – Se $\boldsymbol{v}$ è un vettore discontinuo attraverso Σ vale la formula di Burgatti [5]

$$\text{(5)} \qquad \left[\frac{d\boldsymbol{v}}{d\mathrm{P}}\right] = \left(\frac{d}{d\mathrm{P}}[\boldsymbol{v}]\right)_{\Sigma} + \mathrm{H}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{w}),$$

in cui $\boldsymbol{w}$ è un vettore da determinarsi caso per caso, e l'indice Σ sta ad indicare che si tratta di derivata superficiale [6]. Facendo $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} U$, per la (3) e la continuità di grad U si ottiene

$$\text{(6)} \qquad [\xi] = \mathrm{H}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{w}).$$

Prendendo una volta l'invariante primo, l'altra il vettore dei due membri, e tenendo conto della equazione di Poisson, si ha

$$\text{(7)} \qquad \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{w} = [\Delta_2 U] = -4\pi f[\rho] \quad ; \quad \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{w} = 0,$$

da cui

$$\boldsymbol{w} = -4\pi f[\rho]\,\boldsymbol{n}$$

(4) Cfr. P. BURGATTI, T. BOGGIO e C. BURALI FORTI, *Geometria Differenziale*, vol. II di *Analisi vettoriale generale*, Bologna (1930).

(5) P. BURGATTI, *Sulle discontinuità degli scalari, vettori e omografie vettoriali.* « Atti Acc. Sc. Bologna », *40*, pp. 93–106 (1936).

(6) C. BURALI FORTI e R. MARCOLONGO, *Trasformazioni lineari*, vol. I di *Analisi vettoriale generale*, Bologna, pp. 225 (1929)

e

$$[\xi] = -4\pi f[\rho]\,H(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}) \tag{8}$$

che permette di esprimere le discontinuità delle derivate seconde di U attraverso Σ. Se $\boldsymbol{r}$ ed $\boldsymbol{s}$ sono infatti due versori qualunque uscenti dal punto considerato si ha

$$\left[\frac{\partial^2 U}{\partial r\,\partial s}\right] = [\xi]\,\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s} = -4\pi f[\rho]\,\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{s}\,, \tag{9}$$

analogamente alle formule del Weingarten e come ottenuto da Ertel.

Ricordiamo adesso la (1). Derivando rispetto a P e prendendo le discontinuità dei due membri si ha

$$[\xi] = g[\sigma] + H([\operatorname{grad} g],\mathbf{N}). \tag{10}$$

D'altronde [7]

$$\operatorname{grad} g^2 = 2g\operatorname{grad} g = \operatorname{grad}(\operatorname{grad} U)^2 = 2g\xi\mathbf{N},$$

e quindi

$$[\operatorname{grad} g] = [\xi]\,\mathbf{N} = -4\pi f[\rho]\,\boldsymbol{n}\times\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{n}. \tag{11}$$

Dalla (10) si ricava allora

$$g[\sigma] = -4\pi f[\rho]\{H(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}) - \boldsymbol{n}\times\mathbf{N}H(\boldsymbol{n},\mathbf{N})\}. \tag{12}$$

Si vede da questa che quando $\boldsymbol{n}\,//\,\mathbf{N}$, e solo in questo caso, quando cioè Σ è di livello per U, σ risulta continua, in accordo a quanto già determinato dal prof. Caldonazzo nel lavoro citato. Supposto $\boldsymbol{n}$ non parallelo ad $\mathbf{N}$, prendendo l'invariante primo dei due membri si ottiene

$$g[I_1\sigma] = g[\operatorname{div}\mathbf{N}] = -4\pi f[\rho]\{1-(\boldsymbol{n}\times\mathbf{N})^2\}. \tag{13}$$

Ricordando che div N è la curvatura media della superficie di livello per U che passa per il punto considerato, la formula ora scritta coincide col secondo ed ultimo risultato ottenuto da Ertel nel lavoro citato.

4. Discontinuità di enti geometrici. – Dai calcoli qui eseguiti risulta pure, per la (4) e (12)

$$[c\boldsymbol{\nu}] = [\sigma]\,\mathbf{N} = -4\pi f\frac{[\rho]}{g}\,\boldsymbol{n}\times\mathbf{N}\{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}\times\mathbf{N}\cdot\mathbf{N}\}. \tag{14}$$

Come si vede questa discontinuità è normale ad $\mathbf{N}$, come è ovvio, ed è nulla per $\boldsymbol{n}$ parallelo ad $\mathbf{N}$, oltre al caso limite $\boldsymbol{n}$ perpendicolare ad $\mathbf{N}$. Se $\mathbf{B}$ indica la binormale alla linea di forza, per essere $c\mathbf{B} = \mathbf{N}\wedge c\boldsymbol{\nu} = \mathbf{N}\wedge\sigma\mathbf{N}$, si ha anche

$$[c\mathbf{B}] = -4\pi f\frac{[\rho]}{g}\,\boldsymbol{n}\times\mathbf{N}\,\mathbf{N}\wedge\boldsymbol{n}.$$

Siano ora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ due versori ortogonali tra loro, tangenti alla superficie di livello passante per il punto considerato, e tali che $\mathbf{N},\mathbf{U},\mathbf{V}$ sia una terna sinistrorsa. Vale allora la formula [8]

$$\sigma\mathbf{U} = C_u\mathbf{U} + \Gamma_u\mathbf{V}, \tag{15}$$

(7) Cfr. B. Caldonazzo, loc. cit. in (3), p. 243.

(8) P. Burgatti, T. Boggio e C. Burali Forti, loc. cit. in (4) p. 35 sg.

con C_u curvatura normale e Γ_u torsione geodetica della superficie secondo $\mathbf{U}$. Tenendo conto della (12) si ha quindi

$$[C_u]\,\mathbf{U} + [\Gamma_u]\,\mathbf{V} = [\sigma]\,\mathbf{U} = -4\pi f \frac{[\rho]}{g}\, \boldsymbol{n} \times \mathbf{U}\{\boldsymbol{n} - \boldsymbol{n} \times \mathbf{N} \cdot \mathbf{N}\}.$$

da cui, e per l'analoga per $\mathbf{V}$,

$$(16)\qquad \begin{cases} [C_u] = -4\pi f \dfrac{[\rho]}{g}\,(\boldsymbol{n} \times \mathbf{U})^2 \quad , \quad [C_v] = -4\pi f \dfrac{[\rho]}{g}\,(\boldsymbol{n} \times \mathbf{V})^2 \\ [\Gamma_u] = -[\Gamma_v] = -4\pi f \dfrac{[\rho]}{g}\, \boldsymbol{n} \times \mathbf{U} \cdot \boldsymbol{n} \times \mathbf{V}. \end{cases}$$

Supponiamo in particolare che $\mathbf{U}$ sia normale, oltre che ad $\mathbf{N}$, anche ad $\boldsymbol{n}$ nel punto considerato. Per $\mathbf{N}$ e $\boldsymbol{n}$ non paralleli, un tale $\mathbf{U}$ risulta determinato, a meno del verso. Per questo $\mathbf{U}$, che indicheremo ora con $\mathbf{T}$, perchè viene a coincidere col versore tangente alla curva γ intersezione della superficie Σ con quella di livello passante per P, avremo

$$(17)\qquad [C_T] = [\Gamma_T] = -[\Gamma_v] = 0\,.$$

Ciò permette di esprimere la discontinuità, attraverso il punto considerato, della curvatura totale della superficie di livello. Benchè tale curvatura coincida con l'$I_2\,\sigma$, non si può esprimerne direttamente la discontinuità per mezzo della (12), perchè l'invariante secondo non è funzione lineare delle componenti di σ. Con riferimento però alla particolare terna $\mathbf{N}, \mathbf{T}, \mathbf{V}$ ora scelta e ricordando che la curvatura totale è indipendente dalla coppia tangente $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ scelta per costruirla, si ha

$$(18)\quad [I_2\,\sigma] = [C_T\,C_v - \Gamma_u^2] = -4\pi f \frac{[\rho]}{g}\,(\boldsymbol{n} \times \mathbf{V})^2\,C_T = -4\pi f \frac{[\rho]}{g}\,(\boldsymbol{n} \wedge \mathbf{N})^2\,C_T,$$

con C_T curvatura normale della superficie equipotenziale nella direzione di $\mathbf{T}$. Anche questa discontinuità, come si vede, è nulla solo quando $\boldsymbol{n}$ è parallelo a $\mathbf{N}$.

Si può modificare la (18) introducendo la curvatura normale A_T secondo $\mathbf{T}$ e relativa a Σ, e la curvatura geodetica G_T, anch'essa relativa a $\mathbf{T}$ e a Σ. Detta infatti $\boldsymbol{\nu}_\gamma$ la normale principale a γ nel punto considerato e Γ_T la curvatura geodetica relativa a $\mathbf{T}$ e alla superficie di livello, per cose note è

$$\Gamma\,\boldsymbol{\nu}_\gamma = -A_T\,\boldsymbol{n} + G_T\,\boldsymbol{n} \wedge \mathbf{T} = -C_T\,\mathbf{N} + \Gamma_T\,\mathbf{N} \wedge \mathbf{T},$$

con Γ flessione di γ. Di qui

$$C_T = A_T\,\boldsymbol{n} \times \mathbf{N} - G_T\,\boldsymbol{n} \wedge \mathbf{T} \times \mathbf{N} = A_T\,\boldsymbol{n} \times \mathbf{N} + G_T\,\boldsymbol{n} \wedge \mathbf{N} \times \mathbf{T},$$

e perciò la (18) diviene

$$(18')\qquad [I_2\,\sigma] = -4\pi f \frac{[\rho]}{g}\,(\boldsymbol{n} \wedge \mathbf{N})^2\{A_T\,\boldsymbol{n} \times \mathbf{N} + G_T\,\boldsymbol{n} \wedge \mathbf{N} \times \mathbf{T}\}.$$

5. DISCONTINUITÀ DELLE DERIVATE TERZE DEL POTENZIALE DI GRAVITÀ. – Passiamo ora a determinare le discontinuità delle derivate terze di U attraverso Σ. Il mezzo ci è ancora fornito da una formula di Burgatti [loc. cit. in (5)]

$$(19)\qquad \left[\frac{d}{dP}\,\alpha\right] = \left(\frac{d}{dP}\,[\alpha]\right)_\Sigma + H(\boldsymbol{n}, \varphi) \quad , \quad \varphi = \left[\frac{d\alpha}{dP}\right]\boldsymbol{n},$$

in cui $H(\boldsymbol{n}, \varphi)$ è un'iperdiade, cioè un operatore definito dalla relazione ($\boldsymbol{a}$ vettore qualsiasi) $H(\boldsymbol{n}, \varphi)\boldsymbol{a} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{a} \cdot \varphi$ e φ una omografia da determinarsi caso per caso. I risultati che otterremo in questa determinazione coincidono, a parte una diversa interpretazione dei simboli, con quelli ottenuti dal prof. Caldonazzo nella Memoria citata, ma la via seguìta deve essere, di necessità, differente, perchè ora σ è discontinua attraverso Σ.

Si introduca l'omografia

$$\tau = \frac{d\boldsymbol{n}}{dP}. \tag{20}$$

Essa è definita in ogni punto di Σ, ma se ne può estendere il campo di esistenza con la seguente considerazione. Il versore $\boldsymbol{n}$ definito su Σ stabilisce nello spazio una congruenza rettilinea, ed esiste una regione S contenente Σ (o, meglio, la porzione regolare che se ne considera), tale che per ogni suo punto passa una ed una sola retta della congruenza. Si definisce allora τ nella regione così determinata ponendo

$$\tau\boldsymbol{n} = 0, \qquad P \text{ in } S. \tag{21}$$

Con ciò, τ è una dilatazione, continua con la sua derivata attraverso Σ, e se $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ sono due versori ortogonali tangenti a Σ e tali che la terna $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ sia sinistrorsa, si ha analogamente alla (15)

$$\tau\boldsymbol{u} = A_u \boldsymbol{u} + T_u \boldsymbol{v}. \tag{22}$$

Ciò premesso, si consideri l'identità

$$\operatorname{grad} \frac{\partial U}{\partial n} = \operatorname{grad}\{\operatorname{grad} U \times \boldsymbol{n}\} = \xi\boldsymbol{n} + \tau \operatorname{grad} U. \tag{23}$$

Prendendo la discontinuità dei due membri, per la continuità di τ e grad U, si ha

$$\left[\operatorname{grad} \frac{\partial U}{\partial n}\right] = [\xi]\boldsymbol{n} = -4\pi f[\rho]\boldsymbol{n}. \tag{24}$$

Derivando la (23) si ha

$$\frac{d}{dP} \operatorname{grad} \frac{\partial U}{\partial n} = \frac{d\xi}{dP}\boldsymbol{n} + \xi\tau + \frac{d\tau}{dP} \operatorname{grad} U + \tau\xi \text{ (9)}$$

da cui, per la (19) applicata a ξ,

$$\varphi = \left[\frac{d\xi}{dP}\right]\boldsymbol{n} = \left[\frac{d}{dP} \operatorname{grad} \frac{\partial U}{\partial n}\right] - [\xi]\tau - \tau[\xi]. \tag{25}$$

Ma si ha

$$[\xi]\tau = -4\pi f[\rho] H(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})\tau = -4\pi f[\rho] H(\tau\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}) = 0$$

per la (21), e lo stesso per $\tau[\xi]$. Inoltre, per la (5) e la (24) e per essere

$$\left(\frac{d}{dP}\left[\operatorname{grad} \frac{\partial U}{\partial n}\right]\right)_\Sigma = -4\pi f\left(\frac{d}{dP}[\rho]\boldsymbol{n}\right)_\Sigma = -4\pi f\{[\rho]\tau_\Sigma + H(\operatorname{grad}_\Sigma[\rho], \boldsymbol{n})\},$$

(9) Si osservi che nel nostro caso tanto ξ che τ sono derivate di vettori. Cfr. loc. cit. in (6) p. 267.

si ottiene

$$(26) \qquad \left[\frac{d}{dP}\,\mathrm{grad}\,\frac{\partial U}{\partial n}\right] = -4\pi f\{[\rho]\tau + \mathrm{H}(\mathrm{grad}_\Sigma[\rho], \boldsymbol{n})\} + \mathrm{H}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{w}),$$

essendo $\tau_\Sigma = \tau$ per la (21). Da questa, prendendo una volta l'invariante primo ed una il vettore dei due membri, essendo

$$\left[\mathrm{I}_1 \frac{d}{dP}\,\mathrm{grad}\,\frac{\partial U}{\partial n}\right] = \left[\mathrm{I}_1 \frac{d\xi}{dP}\,\boldsymbol{n}\right] = \left[\frac{d}{dP}\,\mathrm{I}_1\,\xi\boldsymbol{n}\right]$$

e $\mathrm{I}_1\,\xi = \Delta_2\,U$, si ottiene

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{w} = -4\pi f\left[\frac{\partial\rho}{\partial n}\right] + 4\pi f[\rho]\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{n}$$

in cui $\mathrm{div}\,\boldsymbol{n}$ ha il significato geometrico di curvatura media di Σ nel punto considerato. Ed ancora

$$\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{w} = 4\pi f\,\mathrm{grad}_\Sigma[\rho] \wedge \boldsymbol{n}.$$

Da queste due si ottiene subito

$$\boldsymbol{w} = -4\pi f\,\mathrm{grad}_\Sigma[\rho] - 4\pi f\left\{\left[\frac{\partial\rho}{\partial n}\right] - [\rho]\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{n}\right\}\boldsymbol{n}$$

e per la (26) e (25),

$$(27) \qquad \varphi = -4\pi f\left\{[\rho]\tau + 2\,\mathrm{DH}(\mathrm{grad}_\Sigma[\rho], \boldsymbol{n}) + \left(\left[\frac{\partial\rho}{\partial n}\right] - [\rho]\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{n}\right)\mathrm{H}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})\right\}.$$

Questo risultato coincide formalmente, come già annunciato, con quello conseguito dal prof. Caldonazzo per il caso in cui la superficie Σ è di livello per U ed inoltre limita le masse che generano il campo, di modo che $\boldsymbol{n}$ è parallelo a $\mathbf{N}$, e la densità su una delle due faccie di Σ è nulla. Risulta quindi che le espressioni delle discontinuità delle derivate terze da lui date sono valide anche nel caso più generale qui considerato, purchè si ponga mente a sostituire nelle formule (23) del suo lavoro a ρ, $[\rho]$, e a $\partial\rho/\partial n$, $[\partial\rho/\partial n]$, e si tenga conto che A_u, A_v, T_u sono riferite alla superficie Σ di discontinuità per ρ.

6. RELAZIONI TRA GRAVITÀ E GRAVITAZIONE. – È ovvio come tutte le formule date sin qui per le discontinuità di enti legati al potenziale U della gravità rimangono inalterate quando ci si riferisca invece al potenziale U′ della gravitazione, perchè il potenziale delle forze centrifughe è continuo con tutte le sue derivate. In particolare rimangono inalterate le formule che dànno le discontinuità delle derivate terze del potenziale e in cui non appaiono altro che grandezze relative a Σ. Invece nelle altre formule trovate occorre sostituire al versore $\mathbf{N}$ della gravità quello $\mathbf{N}'$ della gravitazione, e a g, modulo della gravità, quello g' della gravitazione. Ma è facile esprimere direttamente in modo esplicito le discontinuità relative alla gravitazione per quelle relative alla gravità. Sia infatti P il punto considerato e Q la sua proiezione sull'asse intorno a cui ruota con velocità angolare ω il sistema materiale in esame. Si ha

$$(27') \qquad \mathrm{grad}\,U' = \mathrm{grad}\,U - \omega^2(P - Q),$$

od anche, posto grad $U' = g' N'$, $g' \geqq 0$,

$$g' N' = g\mathbf{N} - \omega^2 (P - Q) \tag{27''}$$

dalla quale si può ricavare g' e $\mathbf{N}'$ in funzione di g, $\mathbf{N}$, ω^2 e $(P - Q)$.

Dalla (27) si ottiene immediatamente, com'è ovvio $[\xi'] = [\xi]$, mentre dalla (27'') derivando rispetto a P e posto $\sigma' = d\mathbf{N}'/dP$, si ottiene

$$g' \sigma' = g\sigma + H(\text{grad } g, \mathbf{N}) - H(\text{grad } g', \mathbf{N}') - \omega^2 \{1 - H(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k})\}, \tag{28}$$

essendo $\boldsymbol{k}$ il versore dell'asse di rotazione. Ricavando dalla (27'') $\mathbf{N}'$, e tenendo conto che dalla (11) applicata a grad g' si ricava

$$[\text{grad } g'] = -4\pi f [\rho] \boldsymbol{n} \times \mathbf{N}' \boldsymbol{n} = \frac{g}{g'} [\text{grad } g] + 4\pi f [\rho] \frac{\omega^2}{g'} (P - Q) \times \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n},$$

dalla (28) si ottiene

$$g' [\sigma'] = g [\sigma] - 4\pi f [\rho] H(\boldsymbol{n}, \mathbf{N}) + 4\pi f [\rho] \frac{g - \omega^2 (P - Q) \times \boldsymbol{n}}{g'} H(\boldsymbol{n}, \mathbf{N}') \tag{29}$$

che esprime le discontinuità di σ' mediante quelle di σ. In particolare supponiamo che Σ sia di livello per la gravità e che inoltre coincida con la superficie che limita le masse. Allora si può prendere $\boldsymbol{n} = \mathbf{N}$, ed è inoltre $[\sigma] = 0$, $[\rho] = \rho$ e dalla (29) si ricava

$$g' [I_1 \sigma'] = -4\pi f \rho \{1 - (\mathbf{N} \times \mathbf{N}')^2\} \leqq 0.$$

Risulta dunque che nel passaggio attraverso la superficie che limita le masse la curvatura media delle superficie di livello per U' diminuisce bruscamente.

Chimica inorganica. — *La struttura cristallina dei composti* LaHg, CeHg, PrHg, NdHg. Nota di Aldo Iandelli e Riccardo Ferro, presentata (*) dal Socio L. Rolla.

Le amalgame dei metalli delle terre rare sono ancora conosciute in modo assai incompleto, essendo note solo quelle ad alta percentuale di mercurio che, allo stato liquido, sono state utilizzate in tentativi di preparazione di alcuni metalli (1). Uno studio parziale del sistema Cerio–Mercurio è stato eseguito da Biltz (2); che ha potuto dimostrare l'esistenza della fase intermetallica $CeHg_4$. La stessa formula $MeHg_4$ è stata trovata anche per il Lantanio, Praseodimio e Neodimio da Daniltchenko (3).

Il metodo seguìto da Biltz nella preparazione delle amalgame del Cerio, consistente nella reazione del mercurio col cerio a temperatura non superiore a 350°, può prestarsi a qualche obiezione, perchè a temperature così basse ed a

(*) Nella seduta del 13 gennaio 1951.

(1) L. F. Audrieth e B. S. Hopkins, « J. Am. Chem. Soc. », *53*, 1805 (1931); ibid., *56*, 303 (1934); « Z. anorg. allgem. Chem. », *211*, 237 (1933).

(2) W. Biltz e F. Meyer, « Z. anorg. allgem. Chem. », *176*, 23 (1928).

(3) P. T. Daniltchenko, « Rif. in J. Inst. Met. », *50*, 540 (1932).

pressioni corrispondentemente basse è improbabile che possano formarsi tutte le fasi presenti nel sistema. I resultati ottenuti da uno di noi (4), facendo avvenire la reazione fra la terra rara ed il vapore di mercurio, facevano infatti pensare che a temperatura e pressione più alta potessero formarsi altre fasi di composizione diversa da quella 1 : 4 che, secondo Biltz, è l'unica esistente nel sistema cerio–mercurio.

Abbiamo perciò intrapreso lo studio delle amalgame delle terre rare in condizioni diverse da quelle di Biltz, e comunichiamo nel presente lavoro i resultati ottenuti per le fasi di composizione 1 : 1, la cui esistenza è stata dimostrata röntgenograficamente, e la cui struttura è analoga a quella di numerose altre fasi metalliche. I metalli impiegati erano: per il La, Ce, Pr e Nd quelli elettrolitici, di purezza non inferiore al 99,4–99,5 %; per il mercurio il metallo puro distillato.

La preparazione delle amalgame veniva effettuata chiudendo i due metalli in quantità pesate in un cilindro di ferro a pareti spesse, sul quale era saldato elettricamente un coperchio pure di ferro; e scaldando il recipiente fino a 1200°. A questa temperatura il crogiolo di ferro veniva agitato, in modo da mescolarne il contenuto; e poi era lasciato raffreddare lentissimamente fino a temperatura ambiente (500 ore). Nel caso del lantanio è stata fatta anche una prova di tempera da 1200° nel ghiaccio. Terminata la preparazione, il crogiolo veniva aperto sul tornio in corrente di anidride carbonica e campioni del prodotto così ottenuto erano introdotti in provette di vetro piene dello stesso gas, che venivano saldate.

Le quattro amalgame di composizione MeHg, ottenute nella maniera descritta, presentano l'aspetto di masse ricavate per fusione, compatte, di aspetto argenteo; e di non grande durezza e fragilità, a differenza di altre fasi intermetalliche delle terre rare. La caratteristica più spiccata che ne rende difficile la manipolazione, è data dalla loro estrema reagibilità all'aria che appare massima per il composto del cerio, un blocchetto del quale esposto all'aria brucia arroventandosi e proiettando intorno a sè frammenti incandescenti. Tutte le operazioni dovevano quindi essere effettuate in corrente di anidride carbonica secca, sotto la quale la lucentezza metallica dei campioni si mantiene per un tempo indefinito.

Delle amalgame è stata eseguita l'analisi chimica, a controllo della composizione. Essa è stata effettuata lasciando ossidare lentamente un frammento di lega pesato, e trattando poi il miscuglio di ossido della terra e di mercurio metallico con acido cloridrico diluito. Il mercurio veniva raccolto per filtrazione su un crogiolo poroso e pesato, mentre nella soluzione la terra rara era determinata precipitandola come ossalato, e calcinando quest'ultimo ad ossido. La soluzione rimanente dopo la precipitazione dell'ossalato era portata a secco con acido solforico e il residuo veniva calcinato e pesato. Esso era costituito principalmente da ossido di ferro; e la sua quantità era al massimo dello 0,7–0,8 %.

Nel caso del cerio l'analisi non può essere eseguita nel modo descritto, perchè nell'ossidazione si forma CeO_2 insolubile in acido cloridrico. L'attacco è stato

(4) A. IANDELLI e E. BOTTI, «Gazz. chim. ital.», *67*, 638 (1937).

perciò effettuato con acido nitrico; sciogliendo tutto il campione, precipitando il mercurio come solfuro e pesandolo come tale, prima di determinare la terra rara e le impurezze.

I resultati delle analisi dei campioni utilizzati nelle successive misure (riferiti alla somma: terra rara più mercurio) sono, come media di determinazioni praticamente coincidenti, i seguenti:

LaHg	La %	41,4	Hg %	58,6	(teorico:	40,92	59,08)
CeHg	Ce %	40,7	Hg %	59,3	(» :	41,12	58,88)
PrHg	Pr %	41,5	Hg %	58,5	(» :	41,26	58,74)
NdHg	Nd %	42,0	Hg %	58,0	(» :	41,83	58,17).

Le misure röntgenografiche sono state eseguite usando il solo metodo delle polveri, dato che non è stato possibile riconoscere cristalli ben formati, isolabili, dal blocchetto metallico. La polvere era ottenuta dal campione in esame, in corrente di anidride carbonica, usando una piccola mola da dentisti; e raccogliendola in un capillare di vetro di 0,5 mm. di diametro. La limatura deve presentare un aspetto perfettamente lucente, perchè anche tracce di ossido superficiale (e di mercurio metallico) producono fotogrammi illeggibili.

In tutti i casi le righe ottenute sui fotogrammi sono, per angoli abbastanza elevati, relativamente larghe; sia variando il tempo di ricottura, sia variando la radiazione impiegata (Fe, Cu, Mo). I fotogrammi utilizzati per la misura e la determinazione delle intensità delle righe sono quelli ottenuti con anticatodo di rame.

I quattro composti dànno Debye identici come numero ed intensità delle righe, salvo uno spostamento regolare col variare della terra rara. Le interferenze rimangono le stesse per ricottura o tempera del campione, il che dimostra che non si hanno verosimilmente modificazioni di fase per la composizione 1 : 1 nel campo di temperature da 1200° a quella ambiente.

Tutte le righe dei fotogrammi si possono attribuire a quelle di un reticolo cubico centrato (il che dimostra l'esistenza di una fase unica per la composizione 1 : 1). La misura delle costanti reticolari corrispondenti è stata fatta su fotogrammi asimmetrici, col metodo di Straumanis, ed ha fornito i valori che sono riportati nella tabella seguente.

Tabella I.

Composto	a_0	Densità	n
LaHg	3,837	9,84	0,99
CeHg	3,808	9,88	0,96
PrHg	3,791	9,88	0,95
NdHg	3,772	10,23	0,96

A controllo del resultato ottenuto, dei quattro composti sono state determinate le densità col picnometro, usando come liquido il benzolo anidro. Per evitare l'ossidazione il riempimento del picnometro era effettuato distillando nel vuoto, sulla lega in esso contenuta, il benzolo. I resultati delle misure, ed il calcolo del numero di molecole MeHg contenute nella cella elementare (n) sono riportati nella tabella I.

Data la difficoltà di una misura esatta della densità dovuta alla alta reagibilità dei composti, il valore trovato per n è praticamente 1. Nella cella elementare sono contenuti quindi un atomo di terra rara ed uno di mercurio che sono da disporsi nelle due posizioni: 000, 1/2 1/2 1/2. Nella tabella II vengono riportate le intensità delle righe osservate e calcolate per LaHg, nell'ipotesi di una disposizione ordinata (La in: 000, Hg in: 1/2 1/2 1/2).

TABELLA II.

Intensità calcolate ed osservate per LaHg.

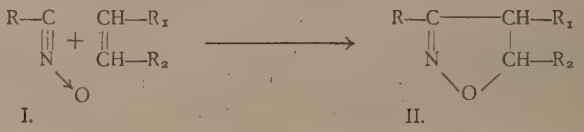
Indici	Int. calc.	Int. oss.	Indici	Int. cal.	Int. oss.
100	11,4	?	222	15,0	md
110	312,3	fff	320	1,6	—
111	4,3	—	321	76,4	f
200	65,2	mf	400	8,9	d?
210	6,5	?	322+410	2,8	—
211	137,9	ff	330+411	54,9	mf
220	42,2	m	331	1,5	—
221+300	3,4	—	420	40,4	m
310	58,5	mf	421	3,5	—
311	2,0	—	332	48,0	mf

L'intensità è stata calcolata come prodotto del fattore di struttura, di quello di frequenza, di quello di polarizzazione e di Lorentz. Come si vede, le righe che non comparirebbero per una struttura disordinata (a indici tutti dispari o due pari ed uno dispari) hanno un'intensità molto bassa per la piccola differenza dei fattori atomici dei due elementi. Sui fotogrammi si ha un indizio di riga nelle osizioni corrispondenti alle riflessioni (100) e (210), che non sono state riportate per l'impossibilità di una loro misura. Per quanto si conosce sui composti intermetallici degli elementi delle terre rare, che non formano quasi mai soluzioni solide con i costituenti, la disposizione disordinata appare estremamente improbabile.

Calcolando le costanti reticolari dei quattro composti dai raggi atomici degli atomi costituenti, si trova una leggera contrazione nella formazione del composto, intorno all'1,5 %. Fa eccezione il CeHg per il quale la contrazione è circa la metà. Questa anomalia del cerio è stata già varie volte osservata, e si è trovato che essa non avviene nella stessa misura in tutti i casi, ma varia a seconda del composto di cui si trova a far parte il cerio (5). Tale comportamento può essere dovuto alla diversa valenza del cerio, per la quale l'atomo Ce può contribuire al legame metallico che si stabilisce nel composto con tre o quattro elettroni.

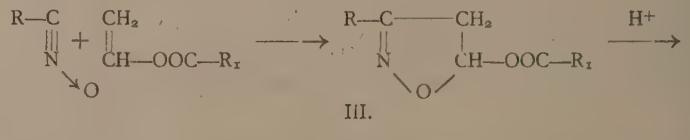
Chimica organica. — *Un nuovo modo di formazione dell'isossazolo* (*). Nota di GUGLIELMO STAGNO D'ALCONTRES e GIOVANNA MOLLICA, presentata (**) dal Corrisp. A. QUILICO.

Nell'estendere a differenti derivati etilenici la reazione di addizione degli *ossidi di nitrili* (I) sui doppi legami olefinici recentemente descritta da A. Quilico, uno di noi e P. Grünanger (1), che, come si è visto, conduce alle Δ^2 *-isossazoline* (II) secondo lo schema:

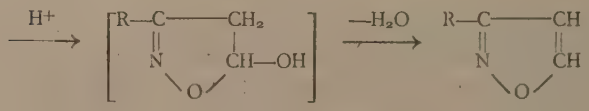


I. II.

abbiamo avuto occasione di mostrare che essa può essere utilizzata per la sintesi degli isossazoli γ-monosostituiti quando si impieghi come composto etilenico un estere vinilico del tipo dell'acetato di vinile. L'*estere* della *5-ossi*, Δ^2*-isossazolina* (III) che rappresenta il prodotto primario isolabile della reazione, quando venga saponificato in ambiente acido, fornisce infatti per contemporanea eliminazione di acqua, l'*isossazolo γ-sostituito* (IV), come mostra la reazione:



III.



IV.

(5) W. KLEMM, H. BOMMER, F. ENDTER e E. E. KROSE, « Z. anorg. allgem. Chem. », *252*, 67 (1943).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale del Politecnico di Milano.

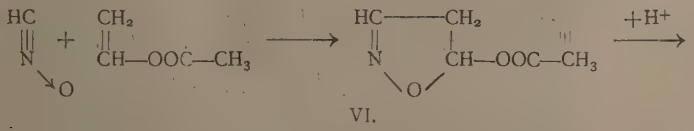
(**) Nella seduta del 13 gennaio 1951.

(1) A. QUILICO, G. STAGNO D'ALCONTRES e P. GRÜNANGER, « Gazz. Chim. It. », *80*, 479 (1950); « Nature », *166* (1950).

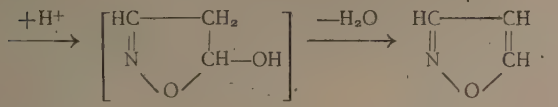
che, ad esempio, nel caso del benzonitrilossido, conduce con ottimi rendimenti al *γ-fenilisossazolo* (IV, R=—C_6H_5) [2].

È anzi a questo proposito da osservare che secondo un meccanismo del genere ha luogo con tutta probabilità la formazione di derivati isossazolici nella condensazione tra ossidi di nitrili e composti β-carbonilici, che si addizionano evidentemente nella loro forma enolica [3].

Abbiamo allora pensato che anche l'*acido fulminico* (V), che può essere considerato il primo termine della serie degli ossidi di nitrili, e che come questi si somma facilmente sui tripli legami acetilenici [4], dovesse addizionarsi sui doppi legami olefinici; e che impiegando come composto etilenico l'acetato di vinile, saremmo potuti giungere all'*isossazolo* (VIII), attraverso l'*acetato* (VI) della *5-ossi*, Δ^2*-isossazolina* (VII) di per sè non isolabile, come indica lo schema:



VI.



VII. VIII.

L'esperienza ha confermato le nostre previsioni. L'acido fulminico reagisce infatti facilmente in ambiente solforico con le soluzioni acquoso-metilalcooliche di acetato di vinile per dare un estere oleoso (VI) non ottenibile allo stato di purezza; questo, saponificato per ebollizione con acido solforico diluito, fornisce un liquido di odore piridico, trascinabile in vapore e poco solubile in acqua, che abbiamo identificato con l'*isossazolo* (VIII) attraverso le sue proprietà fisiche, la formazione del caratteristico composto di addizione con $CdCl_2$, e l'isomerizzazione a *cianacetaldeide* (isolata come *p. nitrofenilidrazone* p. f. 153°–154°) per azione degli alcoolati alcalini.

Per quanto il metodo più conveniente per la preparazione pratica dell'isossazolo rimanga pur sempre quello di A. Quilico e G. Palazzo a partire dall'alcool propargilico [5], la sintesi da noi ora descritta presenta interesse come nuovo modo di formazione, da aggiungere ai pochissimi di cui ancora oggi disponiamo per arrivare al termine fondamentale della serie isossazolica.

(2) G. STAGNO D'ALCONTRES e P. GRÜNANGER, «Gazz. Chim. It.», *80*, 748 (1950).

(3) A. QUILICO e G. SPERONI, «Gazz. Chim. It.», *76*, 148 (1946); A. Q., G. S. D'A. e P. G., «Gazz. Chim. It.», *80*, 486 (1950).

(4) A. QUILICO, e G. SPERONI, «Gazz. Chim. It.», *69*, 508 (1939); *70*, 779 (1940); A. QUILICO e L. PANIZZI, «Gazz. Chim. It.», *72*, 155 (1942); A. QUILICO e G. SPERONI, «Gazz. Chim. It.», *76*, 148 (1946); A. QUILICO e G. STAGNO D'ALCONTRES, «Gazz. Chim. It.», *79*, 654, 703 (1949).

(5) A. QUILICO e G. PALAZZO, questi «Rendiconti», ser. VIII, *6*, 168 (1949).

Parte sperimentale.

1. *Azione dell'acido fulminico sull'acetato di vinile.* – La soluzione di fulminato sodico preparata da 40 g di fulminato di mercurio e 75 g di amalgama di sodio all'8% come è già stato altre volte descritto [6], viene filtrata su amianto e fatta gocciolare lentamente (in circa 2 ore) sotto buona agitazione in 150 cm^3 di una soluzione di H_2SO_4 al 10% alla quale sono stati aggiunti 4 cm^3 di acetato di vinile di fresco distillato, sciolti in 20 cm_3 di alcool metilico. Terminata l'aggiunta della soluzione fulminica si neutralizza la maggior parte dell'acido solforico con ammoniaca (si usarono 20 cm_3 di NH_3 acquosa d. 0,936) raffreddando con ghiaccio.

Si elimina per filtrazione una certa quantità di fulminato di Hg separatosi nel corso della reazione, proveniente dalla decomposizione del complesso mercurico–sodico originariamente presente nel liquido, e il filtrato giallo chiaro, saturato con solfato ammonico, viene ripetutamente estratto con etere; gli estratti eterei seccati su Na_2SO_4 anidro lasciano alla distillazione dell'etere un olio giallo denso che odora di acetato di vinile, ha forte reazione acida, ed è miscibile con l'acqua in tutti i rapporti. Si lascia a sè per qualche tempo, poi si filtra per eliminare una certa quantità di acetato di vinile polimero. Si ottengono così 6 g di un olio giallo chiaro limpido, non distillabile sotto vuoto senza decomposizione e non trascinabile in vapore, contenente l'*acetato della 5–ossi, Δ^2–isossazolina* (formula VI) che non può essere isolato allo stato puro.

2. *Azione dell'acido solforico al 20 % sull'acetato della 5–ossi, Δ^2–isossazolina: isossazolo* (formula VIII). g 5,0 di olio vengono bolliti per un'ora a ricadere con 40 cm^3 di H_2SO_4 al 20 %. Si distilla raccogliendo separatamente la frazione che passa tra 85° e 94° da quella acquosa successiva. La prima frazione viene trattata con un eccesso di soluzione satura di $CdCl_2$ con che si separa un abbondante precipitato bianco cristallino del sale doppio di cadmio dell'isossazolo ($CdCl_2 \cdot C_3H_3ON$), che dopo una notte di riposo viene filtrato alla pompa. Seccato su piatto poroso pesava g 2,5.

Distillando la sospensione del sale di cadmio in poca acqua, passano con queste grosse gocce oleose di odore piridico non sgradevole. Il condensato, saturato con $(NH_4)_2SO_4$ si estrae ripetutamente con etere; dall'estratto etereo seccato accuratamente su Na_2SO_4 anidro si elimina il solvente per cauta distillazione in palloncino munito di colonna. A 93°-95° passano a pressione ordinaria circa 0,6 g di *isossazolo.*

Per l'identificazione, g 0,2 di esso vennero aggiunti alla soluzione di etilato sodico preparata da g 0,1 di Na in 2 cm^3 di alcool; si forma subito con sensibile sviluppo di calore il sale sodico della *cianacetaldeide* che è stata caratterizzata con le seguenti reazioni:

(6) A. Quilico e G. Speroni, «Gazz. Chim. It.», *69*, 518 (1939).

Una porzione del liquido alcoolico trattata con soluzione acetica di p-nitrofenilidrazina dà per diluizione con acqua un abbondante precipitato giallo aranciato del *p-nitrofenilidrazone della cianacetaldeide*, ottenibile per ricristallizzazione dall'alcool in scagliette aranciate lucenti che fondono a 153°–154° anche in miscela con un campione di altra provenienza. All'analisi ha dato:

trov. %: N 27,49

per $C_9H_8O_2N$, calcolato: 27,45.

Una seconda porzione del liquido reso leggermente acido con H_2SO_4, dà per aggiunta di $FeCl_3$ una colorazione bluastra caratteristica.

Geologia. — *Sur l'âge Villafranchien de l'ancien lac Aquilanien.* Nota di JEAN DEMANGEOT, presentata (*) dal Socio RAMIRO FABIANI.

A cinq kilomètres à l'Ouest de l'Aquila, entre le Ponte Peschio (torrent Ràio), et le village de Genzano, a été ouverte il y a trois ans une carrière de lignite dont l'interprétation apporte quelques éclaircissements sur l'évolution géologique de la Conque aquilanienne.

La coupe, nettement visible grâce à une tranchée artificielle de 7 mètres de profondeur (voir figure), est la suivante:

1° à la base une épaisse masse de *lignite* dans laquelle on peut distinguer:

des bancs de lignite xyloide de couleur brun foncé avec les éléments ligneux bien conservés;

des poches de lignite compacte dûe à des accumulations locales de purée végétale;

des poches de lignite terreuse mélangée de débris de silex et de petits graviers calcaires non roulés;

2° ravinant les lignites, des poches de 1 à 2 m. de *marnes* hétérogènes tantôt sableuses tantôt argileuses mais toujours de couleur gris cendré, vraisemblablement enrichies de matière organique;

3° en discordance très nette une couche de callloux roulés et de *sables* de 1 à 2 m. De couleur jaune fauve ces sables contiennent un tiers environ d'une fine poussière ocreuse qui tache les doigts et se sépare facilement par décantation; c'est plus un loess qu'une argile. Les deux tiers restants sont un sable véritable dont les grains dépassent rarement un millimètre de diamètre. On y reconnait des grains de quartz aux angles émoussés, de la muscovite, très peu de biotite, quelques granules d'oxydes de fer et de matière organique foncée, pratiquement pas de minéraux lourds.

4° une épaisseur variable de *sol terreux* récent, surmonté de terre végétale.

(*) Nella seduta del 9 dicembre 1950.

Aucune précision chronologique n'a pu encore être tirée des lignites: l'examen microscopique d'un échantillon [1] a montré des grains de pollen de Quercus, ce qui ne prouve pas grand chose. Mais à une centaine de mètres de là des ouvriers, qui faisaient des travaux de fondation dans la couche sableuse, ont exhumé une quinzaine de débris fossiles parmi lesquels les défenses abîmées d'un Proboscidien non déterminé et quelques belles molaires d'*Hippopotamus major* (voir figure) [2].

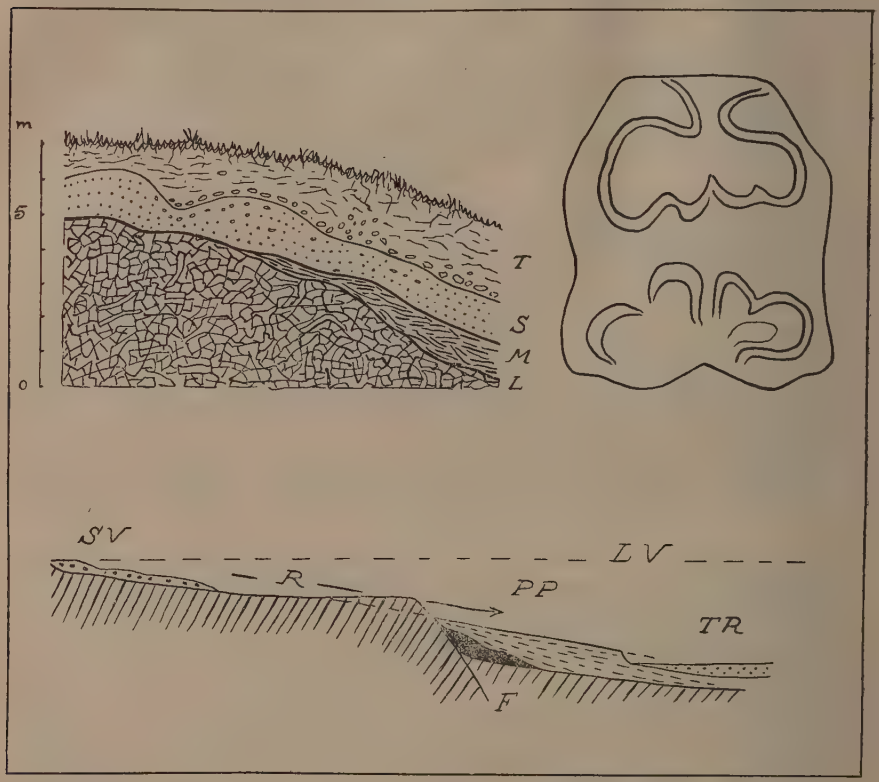


Fig. 1. – En haut à gauche: coupe du *gisement du Ponte Peschio*. On distingue de bas en haut les lignites L, les marnes M, les sables S et le sol terreux T. Noter l'allure irrégulière des strates. En haut à droite: *molaire d'Hippopotamus major*, trouvée à proximité, dans les sables. Reproduite grandeur nature.

En bas: *genèse du gisement du Ponte Peschio*. Les végétaux et les sables (SV) abandonnés autrefois par le lac Villafranchien (LV) ont été entraînés par le torrent Rio (R) et déposés en aval dans le cône de déjections de Genzano-Ponte Peschio (PP), lequel a été ensuite raviné par le torrent Rio (TR) dont on voit les alluvions emboîtées.

Or la structure si caractéristique du gisement, ainsi que sa position au débouché de la vallée du Rio, prouvent nettement qu'on a affaire à un ancien

(1) *Analyse sommaire dûe à l'obligeance de E. Tongiorgi.*

(2) J'adresse mes remerciements à l'Ingénieur Giuliani et à ceux qui m'ont aidé dans cette détermination, et spécialement au Professeur R. Fabiani.

cône de déjections torrentiel: les fossiles ont donc été remaniés et leur origine, c'est à dire les dépôts villafranchiens « in situ », doit être recherchée quelque part à l'amont. Bien que non signalés sur la carte géologique ces restes de Villafranchien sont vraisemblables puisque, à quelques kilomètres de là, dans une vallée parallèle (à Forcella) un placage de sables fauves a été attribué par Crema au Pliocène « in genere » (3). Il est vrai que ces sables, fortement micacés et mêlés de fragments de silex, peuvent être facilement confondus lors d'une visite rapide, avec la surface décomposée de la molasse marine miocène.

Nous sommes donc portés à admettre que:

1° Le lac Pliocène aquilanien, maintenant daté du Villafranchien grâce à *Hipp. major*, a envahi aussi la vallée du Rio;

2° a la suite d'une reprise d'érosion la conque aquilanienne a été partiellement vidée de ses alluvions lacustres;

3° pour la même raison, dûe peut être ici au rejeu du gradin faillé de Rojo, les débris végétaux et les sables Villafranchiens du Rio ont été étalés avec leurs fossiles sur la marge de la conque aquilanienne. D'où le gisement du Ponte Peschio (voir figure).

Il est intéressant de constater, en conclusion que des gisements comparables se retrouvent dans la région. L'un, inédit, est au pied de la Colle Perazzi au sud de Camarda, l'autre près du cimetière de Pòpoli (4). Tous deux ont la même position marginale, la même stratification torrentielle, la même succession verticale lignite-marnes-sables, que le gisement du Ponte Peschio: on peut par conséquent supposer qu'ils ont le même âge par analogie.

Farmacologia. — *Indagini quantitative sul meccanismo d'azione antibatterica dei detergenti* (*). Nota II di P. Benigno e T. Berti, presentata (**) dal Socio E. Meneghetti.

Azione antibatterica dei detergenti anionici. – Questi detergenti si accumulano con notevole rapidità nel germe e, analogamente a quanto avviene per il CTAB, la quantità fissata cresce con l'aumentare dell'inoculum [9]; però in questo caso una forte percentuale del farmaco rimane in soluzione nel terreno di coltura. La loro attività è inferiore a quella dei detergenti cationici e varia notevolmente da composto a composto; essi inoltre sono meno efficaci sui microrganismi in attiva riproduzione (prove in apparecchio di Warburg) (tabella III).

(3) Voir carte géologique au 100.000ème, feuille d'Avezzano.

(4) Voir carte géologique au 100.000ème, feuille de Sulmona. J'ai visité ce gisement en compagnie de A. Bally.

(*) Lavoro eseguito nel Centro di studio per la Chemioterapia del Consiglio Nazionale delle Ricerche presso l'Istituto di Farmacologia dell'Università di Padova.

(**) Nella seduta dell'11 novembre 1950.

Tabella III.

Sostanza	Quantità in γ	Quantità in g. mol.	Numero iniziale dei germi in milioni	Numero finale dei germi in milioni	
				Warburg	Termostato
Controlli	—	—	1.015	8.160	1.050
A	500	$13{,}97 \cdot 10^{-8}$	1.255	630	11
	1000	$27{,}93 \cdot 10^{-8}$	1.015	41	3,5
	3000	$83{,}79 \cdot 10^{-8}$	1,015	27	2,6
	6000	$16{,}76 \cdot 10^{-7}$	1.015	11	0
B	1000	$43{,}11 \cdot 10^{-8}$	1.756	4.860	1.670
	3000	$12{,}93 \cdot 10^{-7}$	1.340	1.440	840
	6000	$25{,}86 \cdot 10^{-7}$	940	304	182
C	1000	$23{,}58 \cdot 10^{-8}$	1.145	2.670	540
	3000	$70{,}74 \cdot 10^{-8}$	1,145	750	218
	6000	$14{,}15 \cdot 10^{-7}$	1.145	540	170
D	1000	$20{,}96 \cdot 10^{-8}$	965	4.680	678
	6000	$12{,}58 \cdot 10^{-7}$	965	822	427
E	1000	$26{,}74 \cdot 10^{-8}$	965	6.060	1.036
	6000	$16{,}04 \cdot 10^{-7}$	965	6.420	838

Durata dell'esperimento = 6 h.
La formula chimica delle sostanze A, B, C, D, E è riportata nella Nota I.

Tabella IV.

	Rapporto tra numero iniziale e finale dei germi (1)	Rapporto tra volume iniziale e finale dei germi (2)
Controlli	1 : 7,0	1 : 7,5
	1 : 6,8	1 : 7,2
Tergitol 08 γ 3000	1 : 2,1	1 : 5,8
	1 : 1,9	1 : 5,3
Tergitol 08 γ 6000	1 : 0,45	1 : 5,4
	1 : 0,53	1 : 4,9

1) Numero dei germi determinato col metodo del conteggio indiretto.
2) Volume batterico determinato per centrifugazione in apposita provettina capillare.
Inocolum di *E. coli* = 1.500.000.000.
Esperimento in apparecchio di Warburg; durata dell'esperimento = 6 h.
I rapporto è calcolato facendo uguale a 1 rispettivamente il numero e il volume iniziali dei germi.

In questi ultimi esperimenti merita particolare rilievo il rapporto tra consumo di O_2 e numero di germi capaci di svilupparsi; dalla fig. 3 risulta come, malgrado la batteriostasi, il consumo totale di O_2 sia molto alto e raggiunga dei valori simili a quelli del controllo. Per interpretare correttamente tale feno-

meno è necessario tenere conto delle variazioni morfologiche provocate da questi composti, che sono messe in luce nella stessa figura; coll'aumentare del tempo di contatto si verifica un accrescimento del germe in lunghezza e alla fine dell'espe-

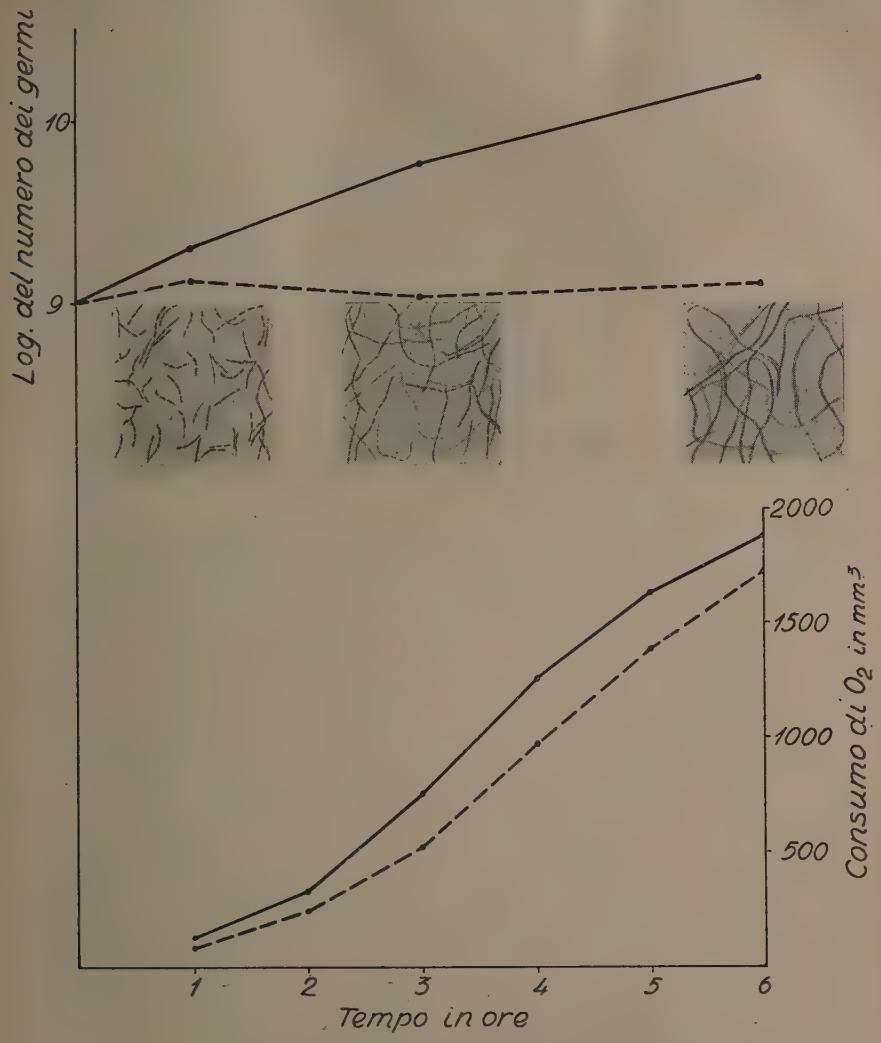


Fig. 3. – Esperimento in apparecchio di Warburg.

Linea continua = controlli.

Linea tratteggiata = alla coltura sono stati aggiunti mg. 3 di Tergitol 08.

ono inoltre schematicamente riportate le variazioni morfologiche dell'*E. coli* in periodi successivi di sviluppo sotto azione del Tergitol 08.

rimento sono presenti quasi unicamente dei filamenti molto lunghi [8]. Corrispondentemente si osserva che il volume complessivo dei batteri presenti nelle colture si avvicina a quello misurato nei controlli: il consumo di O_2 deve quindi essere rapportato al volume complessivo dei germi e non al loro numero (tabella IV).

Il fatto poi che in alcuni esperimenti il quantitativo finale dei microrganismi sia uguale a quello iniziale, e questo malgrado che l'osservazione microscopica abbia messo in luce che solo un numero ridottissimo di individui ha un aspetto normale, sta ad indicare che con ogni verosimiglianza, nonostante l'instaurarsi della modificazione morfologica, i germi, una volta allontanati dal farmaco, riescono a svilupparsi normalmente. Gli individui delle colonie originatesi da questi trapianti hanno un aspetto normale (3). Se si tiene conto che dagli esperimenti sulla fissazione dei detergenti all'*E. coli* risulta che la quantità di farmaco che vi si accumula cresce coll'aumentare dell'inoculum, è probabile che nei microrganismi così modificati si fissi progressivamente una maggiore quantità di farmaco.

I detergenti anionici studiati, analogamente ad altri composti della stessa carica [15], determinano però un reale aumento del metabolismo batterico. Ripetendo infatti questi esperimenti in liquido di Tyrode (in queste condizioni, a seconda della dose di farmaco adoperata, il numero dei batteri vivi o rimane costante o diminuisce lievemente, mentre le caratteristiche morfologiche non variano) si osserva che il consumo di O_2 è superiore nelle prove in cui è presente il farmaco [9].

Farmaci ad azione inibente sull'attività antibatterica dei detergenti. – Queste ricerche sono state eseguite adoperando delle sostanze di cui era già stata messa in luce l'attività antagonista [16], [17], [18], [19]; i nostri esperimenti sono stati però condotti con metodo strettamente quantitativo per stabilire se con tale tecnica si poteva contribuire a una migliore conoscenza di questa azione antagonista.

Delle sostanze proteiche da noi usate, caseina e albumina, solo quest'ultima, nella quantità di 100 mg., riuscì ad inibire l'azione di γ 100 di CTAB; con tale rapporto i germi presenti nel terreno rimangono vivi, ma non riescono a svilupparsi: compare quindi un'azione a tipo batteriostatico che noi non siamo mai riusciti a mettere in evidenza col solo CTAB.

Assente è l'azione antagonista degli aminoacidi da noi usati (istidina, creatinina, cisteina, glicocolla, asparagina) anche quando essi sono aggiunti nella proporzione di mol. 47–97 contro 1 di CTAB.

Evidente invece è l'azione antagonista della lecitina (tabella V); con 2 mg. di fosfolipide si ostacola l'azione battericida di γ 100 di CTAB (rapporto molare = 10,7 : 1); con 5 mg. (rapporto molare = 26,7 : 1) la moltiplicazione avviene normalmente anzi, in alcuni esperimenti in termostato in cui venne adoperato un inoculum iniziale abbastanza piccolo, essa è maggiore che nei controlli [10].

Adoperando le condizioni sperimentali descritte non ci è stato possibile mettere in evidenza un antagonismo tra il fosfolipide e i detergenti anionici. Questi agiscono in genere a dosi elevate; per quantità di lecitina circa due, tre volte molari l'attività inibente è assente o scarsa, con dosi maggiori il pH del terreno viene spostato eccessivamente verso l'alcalinità e ciò influisce sui normali processi di sviluppo del germe.

(3) Anche nel caso delle modificazioni morfologiche determinate dagli antibiotici, queste scompaiono appena i germi modificati vengono messi in condizione di svilupparsi in terreno privo di farmaco [14].

Tabella V.

CTAB in γ	LECITINA in γ	Numero iniziale dei germi in milioni	Risultato dell'esperimento dopo 6 ore	
			Numero dei germi in milioni	Consumo di O_2 in mm^3
100	—	1,370	0	0
100	100	»	0	0
100	300	»	0,5	16
100	500	»	4,5	103
100	1000	»	174	549
100	2000	»	2.100	1803
100	5000	»	11.250	2011
—	—	»	11.310	2078

Lo studio quantitativo dell'antagonismo tra CTAB e detergenti anionici è facilmente realizzabile. Per ottenere l'effetto inibente questi devono essere adoperati in forte concentrazione e allora, come si vede nella fig. 4, per determinati

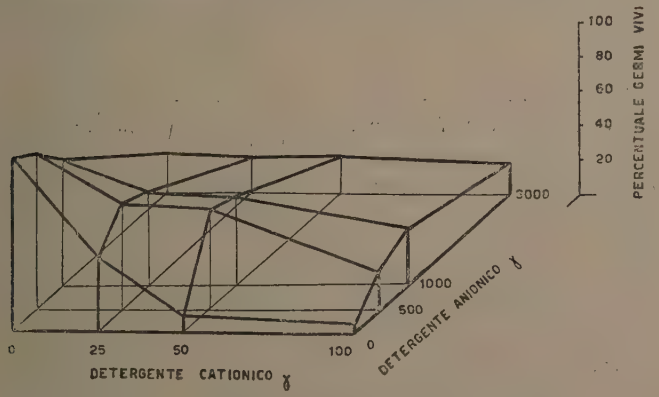


Fig. 4. – Esperimento in apparecchio di Warburg.

Nel liquido di coltura si sono associate quantità variabili di detergente cationico (CTAB) e di detergente anionico (*sale bisodico dell'estere solforico dell'acido 10-ossistearico*).

rapporti compare l'azione del detergente anionico, che è messa in evidenza anche dalle variazioni morfologiche riscontrabili al microscopio.

In un'altra serie di esperimenti abbiamo studiato se era possibile svelenare i microrganismi su cui aveva agito il CTAB; per ottenere un risultato favorevole è necessario usare dosi che non superino di 1,5–2 volte quelle minime necessarie per uccidere i germi presenti nel terreno. In queste condizioni, aggiun-

gendo dopo 5′ delle quantità di detergente anionico (sale bisodico dell'estere solforico dell'acido 10–ossistearico) che da sole sono inattive, si riesce a bloccare completamente l'azione del CTAB; dopo 15′ sopravvive una piccola percentuale di germi; dopo 30′ l'azione antagonista è nulla [10].

Discussione e conclusioni. – L'analisi dei risultati descritti permette alcune attendibili considerazioni sulle modalità con le quali si svolge l'azione antibatterica dei detergenti; è evidente come essa sia dominata dal rapporto tra quantità di farmaco e numero di microrganismi, anzi, nel caso particolare del CTAB, è possibile determinare con buona precisione la dose di composto che si deve fissare al germe per ucciderlo.

Questo dato sperimentale è quindi d'accordo con i risultati di quegli Autori che hanno dimostrato la tendenza dei detergenti ad accumularsi su numerosi substrati; è probabile che, date le caratteristiche chimico–fisiche di queste sostanze, che come è noto sono tensioattive, in un primo tempo la fissazione avvenga per un processo di adsorbimento nel quale è interessata soprattutto la superficie batterica. A favore di tale ipotesi sta il fatto che l'azione del CTAB è, almeno nei primi minuti di contatto coi germi, reversibile. I farmaci che ostacolano l'azione antibatterica di questo gruppo di sostanze agiscono probabilmente impedendo l'instaurarsi di rapporti tra superficie batterica e composto; ciò può avvenire per fenomeni che si svolgono esternamente alla cellula (neutralizzazione di cariche, retrocessione della dissociazione ionica, reazione tra CTAB e farmaci inibenti), oppure per un antagonismo che si verifica sulla superficie batterica, dove le sostanze inibenti possono accumularsi e così impedire la fissazione del detergente cationico.

Adoperando il CTAB è possibile stabilire la quantità minima di molecole che debbono essere presenti nel terreno per uccidere un determinato numero di microrganismi e, poichè esso si fissa in altissima percentuale alle cellule, si può calcolare con buona approssimazione che tale quantità è fondamentalmente dello stesso ordine di grandezza di quella necessaria per ricoprirle con uno strato monomolecolare. Noi abbiamo osservato che, aumentando l'inoculum, questa dose di CTAB diventa inefficace, e che la quantità minima che agisce sui germi in sviluppo è superiore a quella attiva sui microrganismi che non si riproducono. In conseguenza, se si opera sperimentalmente in modo tale che nel terreno di coltura sia presente una dose di farmaco corrispondente alla minima efficace su un inoculum che nelle prove in termostato non si sviluppa, e si porta la sospensione in apparecchio di Warburg (dove si verifica la moltiplicazione), allora, malgrado la presenza di CTAB, si ha un accrescimento del numero dei germi che è solo un po' rallentato rispetto ai controlli. L'esperimento dimostra che, malgrado l'accumulo di quasi tutto il farmaco presente, nei microrganismi, nella fase che precede il periodo logaritmico di sviluppo si osserva un aumento del volume batterico analogo a quello che si verifica nei controlli [8]; ciò determina uno spostamento del rapporto tra superficie batterica e quantità di farmaco, e noi abbiamo visto come una modificazione anche piccola di tale rapporto possa far scomparire l'azione del CTAB.

Fenomeni analoghi avvengono nel caso dei detergenti anionici, ma queste sostanze, alle concentrazioni che sono sicuramente attive sui germi che non si moltiplicano, quando agiscono su colture in cui si verifica sviluppo provocano la comparsa di variazioni morfologiche caratterizzate da notevolissimi allungamenti della cellula batterica. Tali modificazioni stanno ad indicare che, malgrado il notevole accumulo del composto anionico, non si verificano alterazioni protoplasmatiche incompatibili con la vita del germe, perchè questo riesce lo stesso ad aumentare di volume.

Gli esperimenti descritti non permettono di stabilire per quali precisi motivi i detergenti provochino la morte del germe, e le possibili ipotesi non avrebbero l'appoggio della prova sperimentale; a noi però pare che essi chiariscano sufficientemente alcune delle modalità attraverso le quali si svolge l'azione antibatterica di questi composti.

Bibliografia.

[1] Trim A. R. e Alexander A. E., *Surface activity and permeability as factors of drug action.* « Symposia of Soc. f. Exptl. Biol., Academic Press Inc., New York », N. 3, p. 111 (1949).

[2] Beck G. E. e Meier R., *Mechanism of the reaction of invert soaps with isolated cells.* « Experientia », *3*, 371 (1947); cit. in « Chem. Abstr. », *42*, 5245 (1949).

[3] Harris J. C., *Adsorption of surface active agents by fibres.* « Textile Research Journ. », *18*, 668 (1948).

[4] Kivela E. W., Mallmann W. L. e Churchill E. S., *Physical action of surface active cations upon bacteria.* « Journ. Bact. », *55*, 565 (1948).

[5] Knox W. E., Auerbach V. H., Zarudnaya K. e Spirtes M., *The action of cationic detergents on bacteria and bacterial enzymes.* « Journ. Bact. », *58*, 443 (1949).

[6] Benigno P. e Berti T., *Azioni di un detergente anionico sull'E. coli.* « Boll. Soc. It. Biol. Sperim. », *26*, 495 (1950).

[7] Benigno P. e Berti T., *Ricerche sul meccanismo dell'azione antibatterica del CTAB* (in corso di stampa su « Boll. Ist. Sier. Mil. »).

[8] Benigno P. e Berti T., *Variazioni morfologiche dell'E. coli sotto l'azione dei detergenti* (in corso di stampa su « Boll. Ist. Sier. Mil. »).

[9] Benigno P. e Berti T., *Contributo allo studio dell'azione antibatterica dei detergenti anionici* (in corso di stampa su « Il Farmaco »).

[10] Benigno P. e Berti T., *Ricerche quantitative su azioni antagoniste a quella antibatterica del CTAB* (in corso di stampa su « Il Farmaco »).

[11] Benigno P., *Ricerche sull'azione farmacologica dei detergenti.* - Nota I. *Il bromuro di cetiltrimetilammonio detergente cationico.* « Il Farmaco », *4*, 10 (1949).

[12] Dubos R. J., *The bacterial cell.* « Harvard University Press, Cambridge Mass. », p. 296 (1946).

[13] Florey H. W. e collaboratori, *Antibiotics.* « Oxford University Press, London », vol. 2, p. 1137 e sgg. (1949).

[14] Scanga F., *Ricerche sulla resistenza acquisita dai germi verso la penicillina e la streptomicina.* « Rend. Ist. Sup. Sanità », *13*, 241 (1950).

[15] Baker Z., Harrison R. W. e Miller B. J., *Action of synthetic detergents on the metabolism of bacteria.* « Journ. Exptl. Med. », *73*, 249 (1941).

[16] Baker Z., Harrison R. W. e Miller B. J., *Inhibition by phospholipides on the action of synthetic detergents on bacteria.* « Journ. Exptl. Med. », *74*, 621 (1941).

[17] Waher G. R. e Black L. A., *Inhibitors for neutralizing the germicidal action of quarternary ammonium compounds.* « Soc. Am. Bact. Ab. Proc. », p. 44, maggio (1947).

[18] Valko E. I. e Dubois A. S., *The antibacterial action of surface-active cations.* « Journ. Bact. », *47*, 15 (1944).

[19] Quisno R. e Foter M. J., *Cetyl pyridinium chloride.* - I. *Germicidal properties.* « Journ. Bact. », *52*, 111 (1946).

Biologia. — *La determinazione di arti soprannumerari in « Bufo vulgaris »* (*). Nota VII di Teodoro Perri, presentata (**) dal Socio G. Cotronei.

In questa Nota, che è la continuazione delle mie precedenti (1) sullo stesso argomento ed alle quali rinvio sia per la letteratura che per la tecnica, mi occupo di alcuni aspetti della formazione dei primi stadi di sviluppo degli arti soprannumerari, e di nuovi reperti ottenuti nell'ambito degli arti soprannumerari ampiamente sviluppati.

Espongo dapprima i risultati ottenuti mediante trapianto, sull'addome di embrione normale, della parte apicale della testa di embrioni röntgenirradiati con dosi nettamente letali. Il trapianto comprende essenzialmente il futuro vestibolo boccale, l'abbozzo dell'ipofisi e parti vicine di encefalo e di abbozzi olfattori. Ricordo che nella mia Nota VI mi occupai, in *Bufo vulgaris*, del comportamento dell'acido ribonucleico in rapporto con le prime fasi di determinazione degli arti soprannumerari. Osservai che le cellule del trapiantato röntgenirradiato con dosi letali, finchè si mantengono in buone condizioni conservano il loro acido ribonucleico; è con la necrosi delle cellule che questo scompare e viene, come tutto lascia ritenere, messo in libertà. Si ha quindi un comportamento che ricorda da vicino quello osservato dal Brachet nella citolisi da altre cause. Egli pensa che in queste condizioni l'acido si scinda in mononucleotidi che sono considerati « evocatori ». Conclusi che assai probabilmente anche nelle induzioni delle quali mi vado occupando, possa attribuirsi all'acido ribonucleico una parte fondamentale.

Dopo la presentazione di detta Nota, continuai l'esame del materiale raccolto. Ho notato anzitutto che la frequenza della reazione della somatopleura, che porta ad una proliferazione mesenchimatica, è notevolissima; nelle esperienze di quest'anno, tenendo ovviamente conto solo dei casi fissati dallo stadio quasi di larva in poi, l'osservai costantemente (25 casi su 25). Il trapiantato è quasi sempre completamente distrutto, rimanendone solo masserelle di pigmento.

La reazione della somatopleura dà luogo a quadri istologici differenti. In alcuni casi si tratta di cellule mesenchimatiche sparse pressochè uniformemente nella zona dov'era il trapianto: quest'eventualità l'ho vista verificarsi solo qualche volta. Molto più spesso le cellule mesenchimatiche si ordinano in accumuli che sono vari per numero, disposizione e grandezza. Può aversene uno solo, che generalmente si addossa alla cute, e che quando raggiunge certe dimensioni assume l'aspetto di una tipica gemma di arto. In molti casi si hanno invece due o più accumuli, che possono o no essere dello stesso volume, e che generalmente sono

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata « Battista Grassi » dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta del 13 gennaio 1951.

(1) T. Perri, Nota I, in questi « Rendiconti », ser. VIII, vol. III, p. 613 (1947); Nota II, ivi, vol. IV, p. 585 (1948); Nota III, ivi, vol. V, p. 442 (1948); Nota IV, ivi, vol. VII, p. 158 (1949); Nota V, ivi, vol. VIII, p. 65 (1950); Nota VI, ivi, vol. VIII, p. 394 (1950); vedi pure il lavoro in esteso in « Arch. Zool. Ital. », vol. XXXIII (1948).

a contatto con la cute ma a volte ne sono separati o addirittura sono addossati alla somatopleura. In questi casi di larve giovanissime, oltre a detti accumuli, vi sono, sempre nella zona dov'era il trapiantato, altre cellule mesenchimatiche con l'asse principale disposto come se si dirigessero verso di essi; è inoltre frequente che due accumuli siano tra loro seperati da una stretta zona in cui le cellule mesenchimatiche sono più rade; e lo stesso quadro istologico si ha talora tra la gemma soprannumeraria e la gemma dell'arto normale. Anche nei casi di più accumuli, sempre che uno di essi raggiunga certe dimensioni e sia addossato alla cute, assume l'aspetto di una tipica gemma di arto. Tutte queste possibilità sono interessanti anche per l'interpretazione della genesi degli arti soprannumerari multipli da me ottenuti.

Nei casi esaminati allo stadio di larva abbastanza avanzata, si osservano le gemme degli arti soprannumerari, ma non si vedono più cellule al di fuori di queste. Ciò mi pare stia ad indicare che le cellule mesenchimatiche prima viste al di fuori degli accumuli, o sono andate distrutte, o hanno finito con il far parte di essi.

È qui da discutere qual sia il destino delle giovanissime gemme di arti soprannumerari, e, più in generale, di quegli accumuli di cellule mesenchimatiche che abbiamo visto formarsi dove prima era il trapianto. Il Filatow che, come più volte ricordai, ottenne in *Bufo vulgaris* (una volta sola, come egli esplicitamente dice) lo sviluppo di un arto soprannumerario ben costituito, mediante trapianto sull'addome dell'abbozzo dell'ipofisi; esaminando alcuni casi in stadio giovanissimo, osservò piccoli accumuli di cellule mesenchimatiche addossate alle cute, ed interpretò che non giungessero ad arti sviluppati, e che finissero con lo scomparire, perchè troppo piccoli. Tutto lascia ritenere che anche nei miei casi vari accumuli vadano distrutti, e ciò è conforme alla spiegazione del Filatow; ma io propendo a credere, che la loro piccolezza sia a sua volta dipendente da insufficiente intensità dello stimolo, e che quindi sia questo, in definitiva, a permettere o meno la formazione di un arto ben sviluppato. È ovvio che l'intensità dello stimolo dev'essere considerato relativamente alla suscettibilità del territorio sul quale agisce.

Nei casi in cui il trapianto è costituito dalla vescicola ottica ampiamente asportata, cioè con parti vicine di encefalo e talora di abbozzi olfattori, da embrioni röntgenirradiati con dosi nettamente letali, il numero dei casi positivi è minore; e si nota sopratutto che la proliferazione della somatopleura è meno intensa. Con ciò concorda il risultato, che i casi di arti soprannumerari ottenuti con tal genere di trapianto, tenuto ovviamente conto del numero delle esperienze eseguite, sono stati in minor numero, così ad esempio in un lotto ebbi 3 casi positivi su 6. A determinare questo risultato possono concorrere varie cause, come il diverso volume del trapiantato e la diversa velocità con cui esso va in necrosi (röntgensuscettibilità differenziale).

Vediamo ora i casi di trapianto di normale su normale. Queste esperienze sono indispensabili per poter comprendere l'importanza della röntgenirradiazione nella determinazione degli arti soprannumerari. E fin dalle mie prime ricerche sull'argomento non mancai di eseguirne, per sincerarmi della netta differenza di risultati. Ora ho esaminato di proposito se, almeno in un primo momento, vi sia una reazione della somatopleura. Il trapiantato è costituito dalla parte apicale

della testa, oppure, in altri casi, dalla vescicola ottica ampiamente asportata con parti circonvicine: la stessa tecnica, a parte la non irradiazione, già seguita nei trapianti da irradiato su normale, anche per lo stadio d'operazione e per la sede d'impianto. Il trapianto, com'era da attendersi, si è differenziato. In queste condizioni una proliferazione della somatopleura è rara e di modica entità. Vi corrisponde il risultato che, da trapianti di normale su normale, solo una volta su vari casi ebbi un arto soprannumerario che fosse discretamente sviluppato (lo descrissi nel mio lavoro in esteso nel 1948). Nè si può escludere che nei casi positivi lo stimolo provenga da distruzione di cellule; ipotesi già da tempo formulata per l'organizzazione embrionale normale.

Anche in questi casi valgono le stesse considerazioni sopra svolte sul destino di queste proliferazioni; trattandosi che sono qui di scarsa entità, possono più facilmente scomparire.

Il momento dell'insorgenza degli abbozzi degli arti soprannumerari, qualunque sia il genere di trapianto eseguito, non precede mai quello degli abbozzi normali, ma è posteriore sia pure di poco. L'abbozzo istologicamente riconoscibile dell'arto normale, com'è noto, comincia negli Anuri un po' prima della scomparsa delle branchie esterne; i soprannumerari sono riconoscibili mentre le branchie esterne scompaiono. Nelle esperienze in cui fissai i portatori più lungo tempo dopo l'operazione, si ha che la formazione dello scheletro cartilagineo è nel soprannumerario sempre un po' più tardiva che nel normale; anche il cinto, che nello sviluppo è riconoscibile più tardivamente, compare nei soprannumerari dopo che negli arti normali. Hanno evidentemente importanza correlazioni complesse e non del tutto note, che agiscono sia sugli abbozzi normali che su i soprannumerari. Tutto ciò ribadisce la notevole somiglianza, già notata da Balinsky, Weiss ed altri Autori, tra il territorio dell'arto normale ed i territori di arti soprannumerari che si costituiscono nel rimanente della somatopleura per effetto di uno stimolo. A questa conclusione concorrono pure alcune mie recenti esperienze, nelle quali ho eseguito il trapianto della parte apicale della testa da embrioni röntgenirradiati con dosi nettamente letali su embrioni röntgenirradiati con dosi subletali onde lo sviluppo ne fu in vario grado inibito pur potendo vivere a lungo. In queste condizioni, il trapiantato va distrutto; gli abbozzi normali degli arti sono più piccoli che nelle larve normali di controllo; e nella zona dov'era il trapiantato si ha una proliferazione della somatopleura che è più o meno modica e proporzionata (questo è l'interessante) alla grandezza raggiunta dagli abbozzi degli arti propri. Si è quindi avuto che la röntgenirradiazione ha inibito in ugual misura sia il territorio degli arti normali che del rimanente della somatopleura.

Dal confronto tra i risultati raggiunti con abbozzi röntgenirradiati e quelli con trapianti di abbozzi normali, emerge che la differenza essenziale è nella diversa quantità di stimolo, che è molto maggiore quando gli abbozzi sono irradiati con dosi tali da andare in necrosi. Come già dissi fin dalla mia prima Nota, attribuisco particolare importanza al volume del trapiantato ed al suo andare gradualmente distrutto, onde messa in libertà di sostanze citolitiche. Mi limito qui ad aggiungere che tra le sostanze citolitiche sono state prese in considerazione da vari Autori, ormai da molto tempo, anche quelle da necrosi provocata

da radium– o röntgenirradiazione ed anche ad esse si attribuisce importanza in varie condizioni biologiche, come ed esempio nei processi rigenerativi. Recentemente il Brunst (2), in esperienze di röntgenirradiazioni localizzate alla regione lombosacrale di giovani larve di Axolotl, ebbe in alcuni casi arti plurimi in luogo dei normali, ed interpreta che ciò dipenda da prodotti di disintegrazione (« necrormoni ») che si formano nella zona d'irradiazione: il che è perfettamente d'accordo con i miei risultati e con l'interpretazione che ne ho data.

È ancora da notare che avendo visto che la irradiazione produce essenzialmente un aumento dello stimolo, viene ribadita l'importanza della suscettibilità del territorio sul quale esso agisce. Dalle esperienze di vari Autori poteva sembrare che negli Urodeli vi fosse una possibilità di dare arti soprannumerari (da stimoli abnormi) di gran lunga maggiore che negli Anuri, ove infatti se ne conosceva un sol caso pur essendovi stati ricercati. Senza infirmare l'implicita conclusione di una differenza tra Anuri ed Urodeli, è tuttavia da tener presente che, con la tecnica da me usata, anche nell'anuro *Bufo vulgaris*, nelle sopradette condizioni, si ha una frequenza che molto si avvicina alla massima possibile, quale si ha in *Triton* con il trapianto del placode olfattorio. La stessa tecnica in *Rana esculenta* non ha, almeno finora, dato risultati positivi, come risulta dalle mie ricerche personali; il che conferma negli Anuri differenze di risultati dovute a differenze di specie. Lo stimolo usato dalla Locatelli e poi da altri, con il quale si ottengono arti soprannumerari nei tritoni adulti, è certamente maggiore di quello fornito dall'otocisti trapiantata in embrioni di tritone, a giudicare dal fatto che con quest'ultima tecnica il Balinsky ottenne casi positivi solo nelle operazioni eseguite fino ad un certo stadio. È da ricordare che dal moncone di un nervo reciso si ha, come recenti ricerche mostrano, un deflusso di sostanze anche proteiche.

L'esame del materiale, specie di quello raccolto quest'anno, permette alcune osservazioni relative ai casi che tenni in vita sino alle metamorfosi, e che mi paiono di un certo interesse.

Nei riguardi delle leggi del Bateson sulla simmetria speculare, ho avuto quest'anno un'eccezione che, pur non dovendo sorprendere perchè altre ne furono notate da vari Autori, merita di essere segnalata. Trattasi di un ibrido vitale (*Bufo vulgaris* ♀ × *Bufo viridis* ♂) metamorfosato (3), in cui a sinistra e in vicinanza dell'arto posteriore normale, si è sviluppato, in seguito a trapianto della parte apicale di embrione di *Bufo vulgaris* röntgenirradiato, un arto sinistro, cioè omolaterale, assai ben costituito. Debbo ricordare un altro caso in cui si sviluppò un arto soprannumerario posteriore omolaterale con autopodio atipico; ma qui l'eccezione è apparente, perchè l'esame microscopico mostrò l'esistenza, medialmente a detto arto, di una cartilagine soprannumeraria che si lascia riconoscere per emicinto benchè atipico. Non è possibile stabilire se anche nel caso precedente

(2) V. V. BRUNST, « J. of exper. Zool. », vol. 114 (1950).

(3) Tra questi ibridi vitali ebbi un caso d'insorgenza spontanea di un arto soprannumerario distante dai normali, ed inibizione dell'arto normale dell'altro lato; in questo caso si erano dapprima sviluppate escrescenze ectodermiche del tipo di quelle studiate da Spirito. Siamo, come in altri casi del Witschi, nell'ambito di perturbazioni metaboliche.

si sia trattato di qualcosa di simile, con scomparsa completa dell'altro arto, che si sarebbe cioè evoluto solo fino ad un certo stadio per poi essere riassorbito.

Nell'arto soprannumerario ho sempre dedotto la lateralità basandomi sulla conformazione dell'autopodio. Osservo che anche il rimanente dell'arto, come si riconosce dall'angolatura tra stilo– e zeugopodio, e distinguendo la faccia dorsale dalla ventrale (il che spesso è possibile in base alla diversa pigmentazione), è della stessa lateralità dell'autopodio come avviene negli arti normali. In rari casi di arti soprannumerari singoli si vede con sicurezza che l'autopodio per la sua lateralità segue le leggi del Bateson, mentre il rimanente dell'arto è di lateralità opposta; si potrebbero chiamare « arti chimerici ». Dal complesso del materiale finora esaminato risulta però chiaramente che le leggi di specularità del Bateson si verificano nella grandissima maggioranza dei casi; epperciò non si può dare eccessiva importanza a singole eccezioni, anche a motivo delle abnormi condizioni in cui questi arti si sviluppano, eccezioni quindi che si possono riferire a perturbamenti avvenuti in un secondo tempo.

Tra i casi ottenuti quest'anno, ve n'è uno che merita particolare rilievo. In esso si ebbe, sul lato destro, anteriormente un arto soprannumerario anteriore sinistro, e più indietro un arto soprannumerario posteriore con due autopodi ben conformati dei quali uno è di lateralità destra e l'altro (più caudale) di lateralità sinistra. Un aspetto interessante di questo caso è che l'arto soprannumerario anteriore, che è pure fornito di muscolatura, era mobile anche spontaneamente; il posteriore, com'è la regola per gli arti soprannumerari, era rigido. Ricordo che il Canella (1937), esaminando due rane vive e adulte, con arti anteriori soprannumerari, trovò che questi erano mobili, in un caso spontaneamente e nell'altro dopo stimolazione.

Un altro reperto interessante è che in vari casi di arti soprannumerari posteriori, con ileo ben sviluppato, si osserva che l'apice di quest'ultimo è in connessione con una cartilagine che per posizione e forma è probabilmente da interpretarsi come un processo laterale, più o meno tipico, della vertebra sacrale. L'esattezza di questa interpretazione, che altrimenti sarebbe rimasta ipotetica, mi è stata mostrata da un reperto (ottenuto in *Discoglossus pictus*) in cui un arto posteriore non si sviluppò affatto e mancava anche l'emicinto e la relativa muscolatura, concordemente a quanto era stato già osservato da precedenti Autori; ma nel mio caso, dal lato ove manca l'arto manca pure il processo laterale della vertebra sacrale (che è presente nell'altro lato). Adunque la correlazione non è solo tra l'arto libero e l'emicinto, ma si estende al processo laterale della vertebra sacrale.

Conclusioni:

1° Con trapianti di complessi di abbozzi cefalici normali, oppure irradiati, sull'addome di embrioni normali, si è potuto precisare che la röntgenirradiazione causa un notevole aumento dell'intensità dello stimolo, che senza irradiazione sarebbe invece molto lieve.

2° Si sono avuti un'eccezione alle leggi di simmetria speculare del Bateson, ed un caso di mobilità spontanea in un arto soprannumerario anteriore.

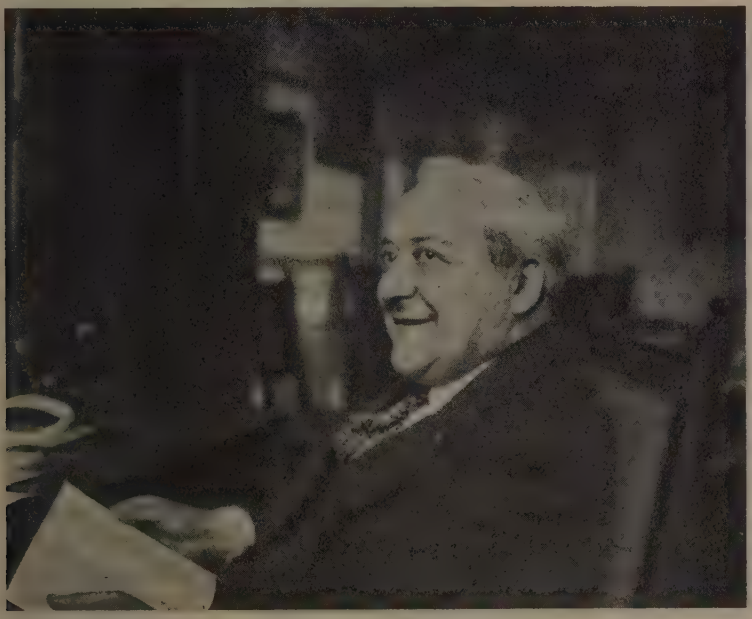
3° La correlazione già nota tra l'arto libero ed il suo emicinto si estende pure al processo laterale della vertebra sacrale.

COMMEMORAZIONI

Commemorazione del Socio Amedeo Herlitzka

letta (*) dal Socio UGO LOMBROSO

Nell'accingermi a rievocare oggi davanti a voi la figura del compianto collega Amedeo Herlitzka, più che esporre una serie di ricerche, di dati, di conferme, di polemiche, di successi, io tenterò di farvi conoscere quella attrazione che lo avvinse sin da giovane alla ricerca scientifica – quella curiosità illuminata che fu stimolo costante al suo lavoro, – quella sete di comprendere e sempre meglio



comprendere che fu disinteressata e nobile aspirazione del suo spirito; mi sforzerò di ricreare l'atmosfera in cui visse, di farvi sentire che Egli fu veramente uno scienziato di razza, cioè uno di quegli uomini che, nell'apparente arido tecnicismo di un laboratorio, servono una idea con devozione, con sacrificio, con passione.

Perchè, se noi ben pensiamo, quello che dell'opera di uno studioso, anche insigne, sopravvive nel corso dei secoli, è piccola cosa se si confronta al sapere e al progresso universale; chi semina non sempre raccoglie; alcuni rischiarano

(*) Nella seduta del 13 gennaio 1951.

semplicemente la via ed altri la percorrono; – c'è chi edifica e c'è chi distrugge, – chi dà il primo impulso e chi mette in moto i congegni; – chi intuisce una verità e chi la denunzia e la sfrutta. Eppure, ognuno ha assolto una propria missione, anche se qualche volta la patina del tempo l'ha resa o la renderà meno evidente; e quello che io intendo qui significare, è che apprezzo nello studioso l'acume, la sapienza, la logica, la genialità, ma fraternizzo e mi commuovo quando incontro la passione. Così che l'omaggio più puro da rendersi a una figura di studioso, parmi sia l'esaltazione di questa sua fiamma, la coscienza che noi amiamo quello che lui ha amato, l'impegno di trasmettere ad altri l'idealità che lo ha sorretto e confortato. Ogni forte energia etica produce emanazioni, ed in queste emanazioni che sopravvivono alla morte della materia, risiede forse quella specie di immortalità individuale cui ognuno di noi inconsciamente aspira.

Uomo di passione Herlitzka fu sin dalla lontana adolescenza che si svolge a Trieste, la città martire, allora come oggi, purtroppo, contesa ed avvilita. Herlitzka si sente appassionatamente italiano e con foga giovanile organizza fra compagni una società segreta; è compromesso, arrestato, deve fuggire; e ripara in Italia, prima a Pisa, poi a Firenze dove continua gli studi e infine a Roma dove si laurea nel 1896.

Questo peregrinare attraverso alcune fra le città italiane più belle e più ricche di tradizioni e di storia, è ragione per l'Herlitzka di un accendersi sempre più vivo di quell'amore per l'Italia che sopravviverà in lui, attraverso prove dolorose, sino allo spegnersi della vita.

Se oggi, ancora più di ieri, ancora più di sempre, in quest'epoca di tormentata inquietudine, si impone ad ognuno di noi il dovere categorico di sforzarci a comprendere, ecco che ritroviamo in questa quotidiana lotta contro lo straniero, in questo amor di patria esasperato di cui si nutrì l'anima sua fanciulla, il nesso logico che porta l'Herlitzka a credere per breve momento ed a sperare nelle promesse di chi seppe abilmente sfruttare quel sogno di grandezza nazionale che palpitava nell'anima di molti italiani più tenacemente legati alle tradizioni del nostro risorgimento. Triste, doppiamente triste il risveglio di questa breve illusione per una mente positiva come la sua, cui il controllo della realtà era legge: disgusto e disagio, svuotata la dilagante retorica, smascherate le interessate menzogne, non restava per la patria diletta che un abisso di umiliazioni e di dolori.

Più tardi, quando era già chiara ad una coscienza integra come la sua la vanità del sacrificio fatto sugli altari della Patria, le leggi razziali tentarono di togliergli anche quella che è la sola ragione di vita per uno studioso, il suo lavoro, il suo laboratorio, i suoi allievi.

Ebbi due volte occasione di rivedere l'Herlitzka negli ultimi anni e in circostanze estremamente dolorose. La prima fu quando a Genova, dopo aver perduta la cattedra di Torino, attendeva la nave che doveva portarlo in esilio; era calmo, sereno, sorridente quasi, di quel sorriso un poco freddo e distante che dissimulava energie nascoste e custodiva e difendeva una sensibilità ferita. L'altra volta, – e fu l'ultima volta che lo vidi, – stava per entrare in quella clinica dove, pochi giorni appresso, avrebbe chiuso fra atroci sofferenze la sua vita operosa. Non sapevo fosse

così gravemente ammalato, nè lo potevo immaginare dato che non parlò affatto di sè, ma a lungo invece mi intrattenne sul dispiacere vivissimo che aveva provato nel vedere rifiutata, proprio in quei giorni, dalla Facoltà di Torino, una sua proposta per l'istituzione di una cattedra di Chimica biologica. Sino all'ultimo egli si sentì partecipe del decoro di quella Facoltà alla quale apparteneva da circa quarant'anni; sino all'ultimo lottò per quello che riteneva potesse contribuire al progresso della ricerca ed a una seria preparazione biochimica degli studenti e dei docenti. L'importanza fondamentale della Chimica biologica (purtroppo non sempre nè da tutti riconosciuta), gli era stata rivelata dai primi contatti giovanili con lo Schiff. È da questo chimico illustre che Herlitzka apprende le prime tecniche chimico-fisiche che in seguito affinerà ed applicherà, con paziente e geniale perizia, per ricerche su problemi biologici.

A proposito dello Schiff, bisogna riconoscere che l'Herlitzka ebbe il felice intuito e la fortunata possibilità di avvicinare, negli anni più operosi della giovinezza, quelli che furono, nella storia del pensiero scientifico italiano, le figure più rappresentative della fine del secolo scorso e inizio del secolo presente. Dopo lo Schiff, studiò presso il Fano a Firenze, poi dal Luciani a Roma, infine con Angelo Mosso a Torino. Possiamo da questo desumere che la loro vicinanza ebbe una precisa influenza sulla personalità scientifica dell'Herlitzka?

Se noi prendiamo in esame l'opera di Herlitzka ed in modo particolare quella iniziale che ha costituito la base più solida e universalmente apprezzata della sua operosità, si dovrebbe rispondere che nulla egli ha preso dai suoi grandi Maestri, nè per la scelta dei temi da indagare, nè per i metodi usati. Infatti i temi di lavoro inizialmente prescelti dall'Herlitzka sono lontanissimi dalle direttive scientifiche dei Maestri, così che nessun dubbio può esistere sulla originalità assoluta della sua produzione. Ma sarebbe assurdo negare che la vicinanza di questi eminenti studiosi non abbia influito sulla sua « forma mentis », affinandone lo spirito critico e quel paziente tecnicismo che in lui felicemente si accoppiava ad una scrupolosa accuratezza, ad una coltura vasta e profonda, ad una fredda obbiettività nella discussione dei risultati.

Vediamo ora brevemente di dare una idea della geniale importanza di queste ricerche che Herlitzka iniziò nel 1895 quando era ancora studente, e che furono particolarmente fortunate, così da associare il suo nome di giovane discepolo ai nomi già celebri di Roux, Driesch, Spemann, Morgan, Hertwig, fondatori della Embriologia sperimentale.

Questo ramo di scienza, che tanta importanza doveva assumere nel campo della Biologia generale, era allora da poco iniziato.

Wilhelm Roux, col cauterizzare in un uovo di rana, dopo la comparsa del I solco, uno dei due blastomeri, aveva ottenuto un mezzo embrione. Ne trasse la conclusione che i territori del germe erano preformati nell'uovo. Invece Hans Driesch era riuscito, con un altro materiale, e cioè nelle uova di riccio di mare, a separare i due primi blastomeri, ed aveva ottenuto due embrioni completi.

Dai risultati di queste due esperienze tanto contrastanti, si dedusse che in alcuni animali (Anfibi) l'uovo ha una costituzione a mosaico, mentre in altri

(Echini), le due metà dell'uovo sono suscettibili di una « regolazione »; esse hanno uguale potenza prospettica.

Herlitzka fu il primo ad ottenere due embrioni completi dai due blastomeri, separati con un capello, nell'uovo di tritone. Anche negli anfibi dunque i due primi blastomeri hanno uguale potenza prospettica; nel normale sviluppo essi interagiscono, limitando a vicenda le proprie capacità, mentre non interferiscono tra loro se vengono completamente separati.

Queste indagini furono più tardi estese dallo Spemann, il quale ebbe una parte grandissima nel rigoglioso sviluppo dell'embriologia sperimentale. Ma è senza dubbio merito di Herlitzka l'aver dimostrato che la « regolazione » dei blastomeri non rappresenta un caso particolare degli echinodermi, ma ha un valore generale. Anzi oggi si tende ad ammettere che anche nelle uova che fino a poco tempo fa erano ritenute a mosaico, quali le uova delle Ascidie, è possibile una regolazione (Reverberi).

Per quanto riguarda il volume delle cellule degli embrioni di tritone sviluppate in queste condizioni, esso apparve uguale alla norma, e così pure il loro numero nella corda dorsale e nel midollo spinale.

Non così il numero delle cellule dell'intestino e dei miotomi, nettamente inferiore a quello degli embrioni normali.

Questi risultati rappresentano un apporto fondamentale per la formulazione della legge del Driesch (1900) sulla fissità del volume e della forma delle cellule, legge che in seguito venne ampiamente sviluppata per opera di Giuseppe Levi.

Operando la separazione fra i due primi blastomeri del tritone secondo un piano parallelo al primo solco di segmentazione, l'Herlitzka ottenne due embrioni più piccoli del normale ma di volume disuguale. La porzione cefalica dell'embrione più piccolo, risultò più grande rispetto alla rimanente parte del corpo (comparativamente all'altro); e ciò fu interpretato dall'Herlitzka come una prova che per la sua formazione viene impiegata una porzione relativamente più cospicua di materiale che per lo sviluppo di altre parti, le quali si abbozzano a spese del materiale restante. Vedute analoghe furono espresse dal Child vari anni dopo e da esse venne formulata la dottrina che va sotto il nome di teoria dei « gradienti assiali ».

Tutte le conclusioni alle quali giunse l'Herlitzka nel corso di queste ricerche e delle quali qui ho fatto un parziale brevissimo cenno, furono confermate, ampliate, ma non sempre citate. Epperò l'Herlitzka difese con energia, in svariate polemiche, la priorità dei suoi lavori. Scrupolosissimo nel citare le ricerche altrui, non ammetteva questo larvato plagio di citare parzialmente lavori suoi, impossessandosi, se non dei dati di fatto, delle deduzioni, delle applicazioni che ne scaturivano per logica immediata.

Un altro gruppo di ricerche dell'Herlitzka riguardano il trapianto delle gonadi nei tritoni e nelle cavie. Egli volle indagare quali erano le ragioni per cui particolari elementi dell'ovaio attecchivano ed altri no; quale importanza avesse la regione nella quale praticava l'innesto; la più o meno rapida neoformazione di vasi, ecc. ecc. Gli innesti di testicolo nelle femmine non furono fortunati, ma le

direttive che le avevano suggerite, utilizzate in seguito dallo Steinach ed altri autori, hanno condotto a dati di fatto di fondamentale importanza. A questo gruppo di indagini appartengono, ad esempio quelle svolte da Carlo Foà che ottenne dati molto interessanti in questo campo di studi; e cioè che l'innesto di ovaia di coniglia neonata in una coniglia adulta, assume rapidamente i caratteri morfologici e funzionali di quest'ultima; ciò che renderebbe meno logici i tentativi posteriori di ringiovanire l'organismo ad opera di innesti di gonadi giovani.

Dal punto di vista funzionale poi delle ovaie innestate, il Pestalozza sembrerebbe aver ottenuto esiti positivi nella pratica umana con la gravidanza in donne castrate dopo innesto di ovaia di altre giovani donne.

In tutti questi lavori che ho brevemente citati e la cui importanza fondamentale ha suggellato il valore di Herlitzka, piazzandolo, ancora giovanissimo, fra gli studiosi fuori classe, quello che più colpisce è la estrema semplicità delle tecniche adoperate; dirò di più, l'assenza o quasi di tecnica in vivace contrasto con l'interesse dei risultati raggiunti.

Nella storia delle scienze biologiche, non è raro constatare che le più grandi scoperte non sono dovute alla perizia di sperimentatori che si avvalgono di delicati e complicati strumenti, ma piuttosto alla visione intuitiva, alla capacità geniale di valutare fenomeni semplicissimi che sono stati visti mille volte da tutti. L'opera creativa si inizia spesso nello sguardo, e per chi « sa vedere », « ogni visione » – come scrisse Goethe – « si cambia in contemplazione, ogni contemplazione in riflessione, ogni riflessione in associazione, così che si può dire che, ogni volta che noi gettiamo uno sguardo attento sul mondo, noi facciamo già della scienza ».

Quale più semplice se pur meravigliosa esperienza di quella di Leonardo quando portò in un ambiente chiuso, prima una candela accesa, poi un piccolo animale, e vide che dell'aria un qualche cosa si consumava in entrambi i casi e ne dedusse che la vita è un fenomeno di combustione, e che il materiale costitutivo dell'organismo, per poter bruciare, deve prima ridursi in forma che ne permetta l'accensione? E lo Spallanzani quante mai cose seppe « vedere », in tempi nei quali mancavano non solo gli apparecchi più semplici, ma anche l'abito stesso del metodo sperimentale!

Oggi i metodi che ad alcune delle passate generazioni hanno permesso di raggiungere luminosi traguardi, appaiono aver esaurita la propria potenzialità; l'inquadrarsi dei problemi del mondo biologico nel più vasto campo del mondo delle leggi fisico–chimiche, ha rivoluzionato la nostra scienza; il prorompere in ogni campo della tecnica, la gara impetuosa di scoprire noi stessi e con noi il cosmo intero, ha trascinato tutti alla esaltazione delle macchine. I colorimetri a cellula fotoelettrica, gli amplificatori a valvole termoioniche, gli oscillografi a raggi catodici, gli spettrografi, permettono di giungere oggi rapidamente, con matematica certezza e precisione, a risultati che prima si potevano soltanto accennare con modesta approssimazione. La scienza, d'oltre oceano specialmente, appare talvolta rinchiudersi simbolicamente nel breve giro di un motore.

I risultati sono certo lusinghieri, ma qualche cosa ci suggerisce e ci stimola a non trascendere e a non svalutare l'importanza di « saper vedere ». Molte volte una tecnica è un chiuso orizzonte, e un chiuso orizzonte impedisce la visione d'assieme e lascia ignorare cosa avviene al di là dell'anello.

In Italia furono il Galeotti e il Sabbatani che, con l'Herlitzka, introdussero e propugnarono le nuove tecniche fisico-chimiche e le fini misurazioni elettriche. Herlitzka fu uno dei primi ad usare l'elettrometro a filo di quarzo di Einthoven, e dimostrò che l'inizio dei processi di rigenerazione delle ferite cutanee, è collegato a fenomeni elettrici. Le differenze di potenziali esistenti fra la superfice normale e superfice lesa delle cellule, si possono riguardare come lo stimolo che determina il passaggio nel nucleo cellulare dallo stato di riposo a quello di attività che dà origine al processo di rigenerazione. Interessante a questo proposito ricordare che, secondo Herlitzka, non è necessaria una ferita, ma basta una lievissima superficiale escoriazione, quasi senza visibili alterazioni, perchè si possano rilevare correnti di azione.

Brillantissime sono le esperienze svolte sulla produzione di calore del midollo spinale in attività, per le quali l'Herlitzka costruì apposite pile termoelettriche sensibilissime. Ricordo le ricerche cronografiche sui movimenti volontari bilaterali, nelle quali giunse alla conclusione che per tutti i movimenti volontari nell'emisfero destro, esistono solo i centri motori di primo ordine per i muscoli di sinistra, ma che essi sono stimolati da impulsi provenienti dall'emisfero di sinistra, che assume preponderanza assoluta sul destro per tutta la associazione della funzione motoria.

In questo studio egli ha indagato il significato di molte centinaia di determinazioni, secondo la concezione statistica degli errori; metodo che è stato poi largamente sviluppato e che l'Herlitzka stesso adoperò con molto successo nella scelta dei candidati piloti di aviazione.

Una brillante discussione a proposito dell'azione dell'urea sulla sopravvivenza del cuore di Selacei e di altri animali messa in luce dal Baglioni, è stata forse lo spunto per una serie di ricerche svolte da Herlitzka in collaborazione ad allievi (Viale, Borrino, Malaghini ed altri).

Come è noto, l'addizione di urea al liquido di circolazione di cuore isolato di Selacei, ripristina la loro attività se già arrestata, e moltiplica più volte il periodo di tempo di sopravvivenza. Secondo Herlitzka, ciò sarebbe dovuto al fatto che l'urea è una sostanza lipoidolitica che, modificando la solubilità e la precipitabilità dei lipidi della membrana cellulare, ne modifica la permeabilità per gli elettroliti [1].

Per svolgere queste ricerche a proposito del sistema nervoso, l'Herlitzka escogitò una tecnica molto ingegnosa, mantenendo in vita il treno superiore della rana per azione del cuore dello stesso animale, il quale mette in circolazione i liquidi da esperimento, mentre la sopravvivenza dei centri superiori viene controllata dalla persistenza e vivacità dei riflessi.

Fra le indagini svolte nel primo periodo della sua assunzione quale assistente all'Istituto di Fisiologia di Torino, che si riallacciano in certo qual modo ai temi

(1) Se questa concezione può effettivamente estendersi al fenomeno descritto dal Baglioni non oserei affermare. Si tratta qui forse di un'azione che l'urea esercita liberando ammoniaca per neutralizzare i radicali acidi che nel lavoro del muscolo cardiaco si generano; dico così perchè, da altre sostanze lipoidolitiche più ancora dell'urea, non si ottiene tale effetto protettivo. Invece per il sistema nervoso, appare che effettivamente le più svariate sostanze aventi in comune la proprietà lipoidolitica (anidride carbonica, uretano, glicerina, urea, cloralio, ecc.) prolungano la sopravvivenza del sistema nervoso di rana.

trattati da studente, sono da segnalare ancora quelle sulla ontogenesi dei fermenti, nelle quali dimostrò che vari enzimi endocellulari si sviluppano parallelamente allo sviluppo embrionale, non sono cioè tutti preformati nell'uovo fecondato. Varie azioni catalitiche che si riscontrano nell'organismo, non sono poi sempre dovute ad enzimi prodotti dalla cellula vivente, ma sarebbero dovuti ad una azione della materia stessa che prende parte alla costituzione del protoplasma: nucleo–protidi, e nucleo–istoni. Così dimostrò che la scissione del glicogeno epatico e la fermentazione alcoolica da parte del lievito di birra, è legata ai nuclei protidi delle cellule.

Questo gruppo di ricerche segna una tappa molto interessante nello studio degli enzimi. Cinquant'anni fa, sulla natura intima degli enzimi regnava una pressochè totale ignoranza, e gli studi al riguardo si limitavano specialmente ad analizzarne gli effetti, fissarne le leggi di azione, ecc. Ma sulla loro costituzione chimica si avevano ancora soltanto ipotesi molto vaghe. Herlitzka, dimostrando che una sostanza ben definita, estraibile dal protoplasma, esplica la medesima azione che viene attribuita all'enzima stesso prodotto da tale cellula, conduce alla persuasione, anche senza enunciarlo in modo preciso, che l'enzima stesso sia identificabile con tale sostanza. Ipotesi che allora poteva apparire arditissima e poco attendibile. Oggi invece che sappiamo che dal parenchima del nostro organismo si possono isolare vitamine, ormoni, enzimi: che nella costituzione delle sostanze proteiche vari aminoacidi già come tali (per esempio la metionina) o con una minima modificazione rappresentano i fattori fondamentali del metabolismo intermedio: che più che di sostanza plastica si dovrebbe parlare, trattando delle proteine tissurali, di complessi di materiale attivo necessario nelle varie manifestazioni metaboliche, – queste prime osservazioni dell' Herlitzka possono considerarsi quali profetiche visioni di un orientamento scientifico che, soltanto dopo molti decenni, si affaccia agli studiosi di questo campo.

Similmente nel 1904 Herlitzka scoprì l'autodigestione della pepsina e ne dedusse che l'enzima è una proteina, come trent'anni dopo confermò il Nortrup.

Come si vede, è una caratteristica dello studioso che oggi commemoriamo quella di intravedere verità che soltanto qualche decennio dopo troveranno conferma. Ricorderò ancora, a questo proposito, le sue ricerche sul cosidetto « diabete duodenale ». Il Pflüger [2] in una serie di ricerche del 1907–1908, aveva tentato di dimostrare che l'estirpazione del pancreas era la causa del diabete non per una deficenza della funzione glandulare, ma perchè nell'atto operativo si producevano delle lesioni nervose nel duodeno in conseguenza delle quali si provocava uno stimolo ai cosidetti centri diabetogeni. La concezione del Pflüger era basata su esperimenti mal condotti che, controllati, diedero tutti risultati negativi. Unico autore che, nel periodo nel quale si svolgeva la polemica Minkowski–Pflüger, tentò di difendere in Italia la concezione di quest'ultimo, fu l' Herlitzka, in base però ad

(2) Il Pflüger a proposito di diabete da estirpazione del pancreas, aveva successivamente sostenuto concezioni in antagonismo a quelle del Minkowski, sia per quanto riguarda la genesi del glucosio eliminato che riteneva provenire dai grassi e non dalle proteine, come sosteneva il Minkowski, sia per quanto riguarda la causa della glicosuria che attribuiva ad un eccesso di produzione e non ad una rallentata combustione del glucosio.

una disposizione sperimentale differente e molto più logica di quella del Pflüger (avvelenando con nicotina la funzione del duodeno di rana e provocando così un diabete). Passarono molti anni prima che, sia pure in forma del tutto diversa da quella prospettata dal Pflüger e dall'Herlitzka stesso, si arrivasse alla concezione che effettivamente il duodeno partecipa alla glicoregolazione mediante un ormone simile a quello elaborato dal pancreas; il quale ormone ha negli uccelli, in riguardo alla glicoregolazione, maggiore efficacia che non il pancreas stesso.

La disposizione sperimentale che Herlitzka aveva suggerito e che allora era passata inosservata, avrebbe potuto avviare allo studio di questa importante funzione del duodeno molto prima di quanto è avvenuto.

Numerose sono le pubblicazioni dell'Herlitzka nel campo della fisiologia dei sensi; tatto, visione, gusto, olfatto furono studiati a fondo; di particolare importanza le indagini sul gusto. Egli si preoccupò di stabilire lo stimolo adeguato dei vari sapori studiando i sapori dei sali, per chiarire cioè il meccanismo con cui le sostanze sapide agiscono sugli organi del gusto. Il cosidetto sapore metallico sarebbe una sensazione olfattiva; la sensazione astringente è indipendente, sebbene sempre associata a quella metallica e dipenderebbe dalle terminazioni nervose tattili; il sapore acido dipende dall'idrogenione, il salato dall'anione. Per l'amaro e il dolce interviene il catione; gli elementi che si trovano nei composti in forma di un catione alimentare, presentano una periodicità nel loro sapore, caratterizzato da un trapasso dall'amaro al dolce; gli elementi più leggeri hanno sapore amaro, i più pesanti dolce.

Meritano ancora particolare rilievo le esperienze sulla adrenalina. Nel 1905 Herlitzka per il primo inietta direttamente nel muscolo cardiaco di animali uccisi per asfissia, adrenalina. Miracolo. L'animale che appariva morto da più minuti, che più non mostrava riflessi, non atti respiratori, non movimenti cardiaci, e che, abbandonato a sè, non avrebbe in nessun modo esplicata nessuna manifestazione vitale, si riprendeva, e, dopo pochi minuti appariva perfettamente normale. Dal punto di vista pratico, le iniezioni di adrenalina nel muscolo cardiaco trovarono applicazioni quindici anni dopo nei casi di arresto respiratorio durante la narcosi, o quale ausilio della respirazione artificiale negli annegati. E sono stati descritti casi apparentemente meravigliosi di reviviscenza. Oggi che si conoscono i compiti della adrenalina quale fattore della attività orto–simpatica, si comprendono meglio le ragioni della efficacia di questo intervento.

Se ora ci poniamo la domanda: quale tendenza spirituale guidava l'Herlitzka nello svolgimento delle sue ricerche? Considerava egli la vita quale semplice manifestazione di attività della materia nelle infinite ed ancora in gran parte sconosciute sue incessanti modificazioni? O riconosceva invece che il mistero della vita è e rimarrà sempre tale perchè appartiene ad un diverso ordine di possibilità, e perchè comprende un elemento che inesorabilmente si sottrae alle nostre indagini di laboratorio? Si associava cioè a quella schiera di biologi che ad un mistico e non meglio identificabile fattore « vitalistico » riconducono tutti i fenomeni che non riescono ad intendere e interpretare? Problema che ritorna sempre a discutersi

nel nostro mondo, e che la mente di Herlitzka, aperta alle più alte concezioni filosofiche, si sarà certo proposto; ma al quale, nella sua veste di biologo, ha risposto con la più pura fede che, a torto, è detta materialista. Egli seguiva in ciò il suo grande Maestro, il Mosso, che a tale proposito più volte ricorda: « l'ufficio della Scienza è di mostrarci il meccanesimo delle cose, non le cause trascendentali .. L'inconoscibile appartiene alla metafisica ed alla religione, l'ignoto alla scienza ».

Le ricerche sperimentali, secondo Herlitzka, devono essere dirette soltanto da un pensiero scientifico animato da una ipotesi di lavoro che dà stimolo ideale alla ricerca. I fenomeni naturali sono determinati da cause materiali, e il compito dello scienziato è precisamente questo: fissato un fenomeno, indagare le cause immediate e, se possibile, anche non immediate che lo determinano, e le conseguenze che ne derivano.

Così, nelle direttive di ordine spirituale, una affinità esisteva fra il Maestro e l'allievo, mentre quest'ultimo, con ardore veramente commovente, si sforzò sempre di rivalutare, per quanto era possibile, le antiche dottrine del Mosso. E quando, non più allievo, ma Maestro a sua volta, ebbe intorno a sè, a Torino, e per lunghi anni, una schiera valorosa di giovani discepoli, di cui molti raggiunsero la cattedra, non si preoccupò di iniziarli soltanto alla sottigliezza della tecnica o alla vastità della coltura, ma cercò di accendere in essi una fiamma, di creare nel loro intimo e per sempre, un rifugio, dove, in epoche tristi, avessero potuto continuare a lavorare, senza orgoglio ma anche senza sfiducia, intorno ad uno di quei minuscoli frammenti dei quali si compone, attraverso le generazioni, il grande mosaico della conoscenza umana.

Un'altra cosa ci rimane a dire fra le molte che purtroppo, per esigenza di tempo, sono state taciute; e cioè che nel campo degli studi Herlitzka operò non soltanto in profondità, ma anche in ampiezza. L'opera sua non rimase circoscritta nei domini esclusivi delle ricerche fisico-chimiche; egli fu tra i primi a comprendere quanto siano infrangibili i legami fra scienze biologiche e scienze sociali. Non piccolo merito questo per un'epoca che disdegna fin troppo la solitaria aristocrazia spirituale di chi antepone l'amore al sapere alla utilità del sapere! Strana epoca davvero che vorrebbe imporre in tutti i campi una concezione filosofica strettamente utilitaria, mentre poi si dibatte e soffoca negli angusti limiti volontariamente creati!

Fu la guerra, questa terribile calamità che accompagna la nostra generazione, a far sentire più urgente il problema delle relazioni tra la scienza e la pratica, tra la scienza e l'industria, tra la scienza e il lavoro.

Allo scoppiare della prima guerra mondiale, allorquando l'aviazione si rivelò potente ausilio nella lotta, in Italia vi era un solo studioso che potesse efficacemente offrire i mezzi della scienza per la selezione dei piloti in base ad una loro valutazione fisiologica. Questo studioso era l'Herlitzka il quale, già in collaborazione col Mosso e in seguito da solo o con allievi, si era approfondito sulla fisiologia dell'uomo a grandi altezze, sul male delle altitudini e sui mezzi per prevenirlo. In un solo mese Herlitzka organizzò a Torino il primo istituto per la scelta degli allievi aviatori; le dolorosissime perdite dovute per il 90 % a deficienze del

pilota, si ridussero a cifre minime. Altri Centri Psicofisiologici vennero fondati, mentre all'Herlitzka veniva affidata dal Governo l'organizzazione sanitaria per l'aviazione militare. Del prezioso materiale raccolto in quegli anni, egli si valse per tracciare la fondamentale monografia « Fisiologia e Aviazione » dove, con mirabile equilibrio, è svolta la parte teorica e pratica degli studi antecedenti sul volo, per arrivare in fine all'esame delle varie prove suggerite per scartare i candidati non idonei. I vantaggi della sua organizzazione sono così evidenti che dopo il 1925 altri quattro nuovi Centri vengono aperti e anche all'estero l'attività di questi istituti viene sorvegliata ed imitata. Sotto questo punto di vista, Herlitzka può considerarsi un precursore di quella tendenza odierna, particolarmente americana, che, sovente con qualche esagerazione, presuppone l'esame accurato fisico-psichico di ogni individuo prima dell'avviamento ad una qualsiasi carriera.

Nel campo della Fisiologia applicata, Herlitzka lavorò ancora, sia con la fondazione presso Trieste, di un Centro di studi per palombari e sportivi nautici, che avrebbe completato le sue ricerche sulle funzioni fisiologiche dell'organismo in svariate condizioni di ambiente e di attività, sia con l'affrontare vari ed interessanti problemi che riguardano l'uomo, non come individuo soltanto ma come lavoratore.

Due opere restano a testimoniare la sua vasta competenza per tutto quello che si riferisce al lavoro umano. La prima si occupa particolarmente del lavoro atletico, mentre la seconda, che raggiunge l'estensione e l'importanza di un fondamentale Trattato, rappresenta una sintesi completa di tutto quello che riguarda questo interessante capitolo di fisiologia.

Qualcuno di voi che non conosca a fondo la produzione dell'Herlitzka, potrebbe essere indotto a credere, da quanto brevemente si è detto sulla sua operosità in molteplici campi della fisiologia applicata, che egli non fosse uno scienziato devoto unicamente alla scienza cosidetta pura.

Sarebbe questo un gravissimo errore. Herlitzka perseguì la ricerca scientifica esclusivamente come fine a sè stessa, pur essendo fautore della possibilità e della opportunità di creare, attraverso le scoperte degli studiosi, migliori condizioni di vita per l'uomo e per gli aggregati sociali. Il che è ben diverso dal voler impostare una ricerca per fini assolutamente utilitari. La distinzione non è inutile e desideriamo metterla in rilievo, sicuri di interpretare così l'intima essenza della personalità di Amedeo Herlitzka, oggi che il dilemma ci viene riproposto con maggiore crudezza anche da uomini di pensiero e di responsabilità. Può la scienza continuare ad esistere come fine a sè stessa, o deve diventare specialmente scienza utilitaria?

Un illustre clinico, l'Oselladore, che è anche uomo di cultura e di moderna sensibilità, ha efficacemente sintetizzato, in una recente prolusione, il concetto che « respingere il sapere che non ha il suo addentellato utilitario immediato, sarebbe la fine della scienza, anche per quello che essa sa dare nel campo utilitario, perchè tutte le vere scoperte ebbero origine spontanea dalla scienza pura, e ben più raramente dalla scienza condannata a priori a compiti utilitari ». Questa esaltazione della « scienza per la scienza » è ancora più significativa quando si pensi

che viene da un clinico e non da uno studioso di laboratorio. Ed è ragione per noi di conforto, in tempi di confusionismo costituzionale, nei quali, fin dall'America libera, giungono voci di non so quale dirigismo scientifico: « lo scienziato deve sforzarsi di dirigere la ricerca lungo la strada che potrà meglio servire al bene della società »; e ancora « bisogna stabilire una base *etica* per la ricerca scientifica ».

Assurdo e pericoloso. Quando mai non è etica la ricerca della verità?

La scienza pura, bisogna dirlo ben forte e ben chiaro, è maestra di vita, non soltanto astratta ginnastica dell'intelletto. È scuola di pazienza, di scrupolosa rigida onestà; – educa lo spirito critico che oggi difetta in tanti giovani, li abitua alla logica, affina il senso della intuizione, inizia al concetto della relatività, insegna sino a quale misura e non oltre si possa generalizzare, sino a quali limiti è permessa la deduzione per analogia. La scienza è religione della verità, insofferenza a frasi fatte, a idee preconcette, a teorie imposte, a compromessi interessati; – è maestra di libertà, perchè chi si abitua a maneggiare l'arma della libera critica scientifica, più difficilmente rinuncerà a pensare e ad agire secondo coscienza. Tutto questo è la scienza e molto altro ancora.

Nessuna delle grandi idealità che muovono il mondo, può dare ad un uomo un senso così democratico e così profondamente umano della vita. Chi penetra nei misteri intimi e complicati, spesso anche vergognosi, della psiche, chi impara a conoscere le miserie del nostro corpo, oppure chi spazia in campi più larghi e sorprende i miracoli dell'etere, o la vita che palpita in fondo al mare, o imprigiona le leggi ancor più miracolose della chimica della fisica moderne, matura in sè a poco a poco, quasi inavvertitamente, una concezione più tollerante, più generosa, più umana di quelli che devono essere i suoi rapporti con gli uomini.

E nel tempo stesso, il vedere come in natura, pur nell'armonia dell'insieme, può sussistere il libero svolgersi di singole individualità, allontana dal pericoloso fascino di teorie che conducono all'avvilimento della personalità umana.

Scusate se io mi permetto oggi di fare qui, davanti a voi, che siete tutti degli eminenti uomini di pensiero, questa quasi esaltazione della scienza pura. Sembrerebbe fuori posto. Ma io commemoro un uomo che fu uno « scienziato di razza », e nessun omaggio più devoto possiamo offrire alla sua memoria, di quello di difendere l'ideale per il quale egli ha degnamente e serenamente vissuto. Il problema - voi lo sapete – è attuale quanto nessun altro problema: direi, tragicamente attuale. La scienza è per molti oggi la grande accusata. Non volendo o sapendo accusare sè stessi, gli uomini aggiungono colpa a colpa maledicendo le più nobili manifestazioni dell'intelletto. E vorrebbero formulare una specie di assurda e inconcepibile classifica fra scienze benefiche e scienze malefiche!

L'argomento ci porterebbe lontano; – ma solo averlo accennato significa che, ripiegandoci sul passato, prendendo congedo da un Maestro di sapere e di vita, – noi non vogliamo ritrarci dalla passione dell'ora, ma vogliamo soltanto riconfermare la nostra fede indiscussa nella causa che Egli ha così nobilmente servito.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente dà lettura di un telegramma inviato dal Socio Margaria il quale, impossibilitato ad assistere alla commemorazione del compianto prof. Herlitzka che il Collega Lombroso terrà nella presente seduta, invia la sua fervida adesione, unitamente all'espressione del più vivo rimpianto per la perdita del suo amato Maestro.

Il Presidente dà quindi la parola al Socio Lombroso che pronuncia l'orazione commemorativa, esaltando la luminosa figura di uomo e di scienziato dell'insigne Collega scomparso.

Il Presidente ringrazia l'oratore per le nobilissime parole con le quali egli ha ricordato Amedeo Herlitzka, la cui scomparsa ha rappresentato per l'Accademia e per la scienza un gravissimo lutto. Invia un commosso saluto alla memoria dell'illustre Consocio e rinnova alla famiglia le condoglianze dell'Accademia. Sospende quindi la seduta in segno di lutto.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Socio Bompiani, riferendosi a quanto risulta dal predetto verbale circa il contributo finanziario inviato per la pubblicazione delle opere del compianto Socio Tullio Levi-Civita da alcuni studiosi americani incontratisi recentemente a Baltimora con il Collega Signorini, propone che l'Accademia formuli per il predetto Collega un voto di plauso per l'efficace opera che egli ha svolto nell'ambiente scientifico americano, superando difficoltà varie e ottenendo un primo notevole contributo per la stampa dei sopra citati lavori.

Il Presidente e la Classe si associano all'unanimità alla proposta del Collega Bompiani e indirizzano al Socio Signorini un vibrante applauso.

Il Senatore Castelnuovo comunica poi che il fascicolo dei « Rendiconti » n. 6 (dicembre 1950) è già impaginato e uscirà a giorni.

Il Socio G. Levi, riferendosi a quanto già accennato dal Collega Beccari in una passata adunanza, riferisce sul Congresso di Anatomia di Oxford svoltosi dal 25 al 28 luglio u. s., al quale egli, unitamente al citato Collega, ha partecipato in rappresentanza dell'Accademia.

Riferisce anche brevemente sul Congresso di Biologia cellulare di New Haven e sulla riunione dell'Accademia delle Scienze degli Stati Uniti, svoltasi a Schenecteclay.

Il Presidente ringrazia i Soci che hanno presentato le pubblicazioni e il Collega Levi per la relazione svolta.

Il Socio Abetti illustra il film del « Telescopio Hale a Monte Palomar » in California cortesemente proiettato dal Servizio di Informazioni degli Stati Uniti nella sede dell'Accademia.

La storia del telescopio, che ha lo specchio di 5 metri di apertura (200 pollici), risale a quella dell'Osservatorio di Monte Wilson fondato da Giorgio Ellery Hale circa 50 anni or sono. Nel 1918 cominciava a funzionare a Monte Wilson il telescopio Hooker con lo specchio di metri 2,50 di apertura (100 pollici), il più grande del mondo a quel tempo, che tanti importanti risultati e progressi ha portato all'astronomia.

Sorse allora l'idea ad Hale e ai suoi collaboratori che si potesse costruire uno strumento ancora maggiore per scandagliare maggiori profondità nell'universo. Bisognava essere abbastanza sicuri di poter costruire le parti ottiche e meccaniche del telescopio in modo che potessero corrispondere alla precisione ed esigenze necessarie e di più che l'ampia onda luminosa che investe lo specchio potesse essere raccolta in immagini sufficientemente tranquille al fuoco del grande specchio. Il problema fu studiato e risolto con lunghi anni di lavoro e con una scelta appropriata del luogo di osservazione, il Monte Palomar, a circa 200 chilometri a sud di Monte Wilson, sempre nella California del sud, non lontano dal confine messicano.

Il problema meccanico non offrì grandi difficoltà benchè fosse necessario raggiungere una precisione maggiore di quella di solito ottenuta in simili strumenti. Il problema ottico fu più difficile a risolvere e vari tentativi ed esperimenti dovettero essere eseguiti prima di poter fondere il blocco di vetro che pesa circa 20 tonnellate.

Fuso il blocco nello Stato di New York, la lavorazione della superficie parabolica fu eseguita nella officina ottica appositamente costruita presso l'Istituto di Tecnologia della California a Pasadena.

Complessivamente sono occorsi 20 anni di lavoro e si comprende che la parte più delicata e difficile fu quella di ottenere una perfetta forma dello specchio con la precisione di 0.0001 millimetri. Il film a colori illustra la località di Monte Palomar, la grande cupola di 42 metri di diametro che ospita il telescopio ed i dettagli della sua costruzione. Inoltre la speciale montatura equatoriale del telescopio ed i vari meccanismi che lo fanno funzionare. Sono spiegati con dettaglio il lavoro ottico e le prove per ottenere l'esatta superficie; il trasporto dello specchio per la strada camionabile, appositamente costruita su Monte Palomar a 2000 metri sul livello del mare. Illustra come l'astronomo esegua il suo lavoro prendendo fotografie del cielo fino alla distanza di un miliardo di anni luce dalla nostra terra. Infine sono dati esempi delle fotografiie ottenute di oggetti celesti quali le nebulose irregolari della galassia e le lontanissime nebulose extragalattiche.

Si può ora asserire che il grande telescopio soddisfa completamente all'aspettativa e rappresenta un notevole successo della tecnica odierna. Di più, che notevoli progressi si possono attendere dal lavoro ora iniziato sotto la direzione di I. S. Bowen dagli astronomi di Monte Wilson e di Monte Palomar.

PLICHI SUGGELLATI

Vengono presentati: un plico suggellato del dott Ugo Gagliardi e un altro del sig. Ippolito de Rolandis e del dott. Alessandro de Rolandis, rispettivamente padre e figlio, consegnato all'Accademia dal sig. Generale Ercole

Capuzzo per incarico del citato dott. Alessandro de Rolandis. Detto plico non potrà venire aperto se non su richiesta di Ippolito o di Alessandro de Rolandis, come dagli stessi comunicato con lettera in data 9 gennaio 1951.

La Classe, constatata l'integrità dei sigilli, delibera che i plichi sopra indicati siano conservati nell'archivio accademico a disposizione degli interessati.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Perucca presenta un fascicolo edito dal «Collège de France» in occasione delle solenni onoranze tributate a Parigi, nel novembre 1948, alla memoria di Paul Langevin e Jean Perrin, alle quali lo stesso prof. Perucca prese parte in rappresentanza dell'Accademia, intervenendo anche alle sedute dei colloqui scientifici organizzati in onore dei due grandi fisici scomparsi.

Il citato fascicolo contiene appunto gli atti del colloquio sui «raggi X e struttura atomica», svoltosi il 18 e il 19 novembre 1948, nel quale il prof. Perucca presentò una comunicazione, in collaborazione con F. Demichelis, dal titolo: «Une preuve frappante de la tensione superficielle des solides».

Il Socio Dore presenta un volume edito sotto il patronato delle Università di Bologna e di Ferrara, dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna e dell'Unione Matematica Italiana, contenente 38 Memorie scelte del prof. Pietro Burgatti. L'iniziativa di tale pubblicazione si deve a un gruppo di professori universitari, tra i quali il Socio Dore, che furono allievi del compianto studioso.

Il Socio Dore conclude ricordando che la scelta delle opere è stata fatica particolare del prof. Dario Graffi, già allievo e oggi successore del Burgatti sulla Cattedra bolognese e che la pubblicazione costituisce un atto di affettuoso omaggio da parte di antichi discepoli alla memoria del loro Maestro che non fu possibile onorare prima d'ora per gli eventi bellici che seguirono la sua morte, avvenuta nel 1938.

Il Socio Armellini ricorda di essere stato anch'egli allievo del Burgatti che conobbe a Roma quando era assistente del Tonelli e con il quale fu legato sempre da profonda amicizia. È ben lieto che siano stati pubblicati alcuni dei numerosi lavori del Burgatti e osserva che egli ha lasciato anche importanti studi sull'astronomia. Mentre si associa pienamente alla rievocazione del compianto studioso, propone che l'Accademia, della quale il prof. Burgatti fu Socio Corrispondente, lo commemori degnamente.

Il Senatore Castelnuovo rammenta di aver ben conosciuto e molto apprezzato il Burgatti e, associandosi pienamente all'omaggio tributatogli con la pubblicazione di alcune sue Memorie scelte, prega il Collega Dore di rendersi interprete del ringraziamento dell'Accademia presso i promotori dell'opera.

L'Accademico Segretario presenta le pubblicazioni inviate in omaggio mettendo in particolare evidenza alcuni studi del Socio A. Russo, altri del

Socio Pavari, un volume contenente gli Atti del Congresso Internazionale di Cronometria, svoltosi a Ginevra dal 26 al 29 agosto 1949, l'opera « Le chimiste Thenard », di Paul Thenard, il volume contenente le relazioni e comunicazioni del 3° Congresso Internazionale di Medicina dell'Assicurazione Vita e il 2° e 3° volume, di A. Ghigi, dell'opera « La vita degli animali » dello stesso Ghigi e di F. Raffaele.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei « Rendiconti » i Soci Cotronei, Lombroso, Crocco, Rolla, Signorini, Segre, Silva, Bompiani, Pupilli e Armellini.

Il Segretario accademico legge l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

Crocco G. A. – La barriera della temperatura nei missili geodetici.

Russo A. – Potere germinativo dei tessuti somatici e germi embrionali nell'origine dei neoplasmi.

Ardy C. e Montini T. – Sui rapporti fra sistema nervoso autonomo e ricambio dei lipidi. Azione della dibenamina e dell'atropina sulla steatosi epatica da epatectomia parziale (pres. dal Socio U. Lombroso).

Burckhardt C. E. – Un giacimento sedimentogeno di magnetite nei M. Peloritani (pres. dal Socio R. Fabiani).

Colacevich A. – Su una possibile deviazione della luce attraverso la nebulosa delle Pleiadi (pres. dal Socio G. Armellini).

Crepax P. – Ricerche elettroforetiche sulle proteine dei muscoli lisci di Mammiferi (pres. dal Corrisp. G. Pupilli).

De Schwarz M. J. – Su alcune questioni analitiche concernenti il calcolo del coefficiente di assorbimento acustico di cilindri rivestiti di feltro di vetro (pres. dal Socio M. Picone).

Petralia S. – Sulla propagazione degli ultrasuoni nei ferromagnetici (pres. dal Corrisp. G. Valle).

Rosino L. – Diagramma colore–grandezza e distanze dell'ammasso globulare M 56. Nota I: Istrumenti, tecnica delle osservazioni e risultati (pres. dal Socio G. Silva).

Rosino L. – Diagramma colore–grandezza e distanza dell'ammasso globulare M. 56. Nota II: Distribuzione dei colori e delle grandezze ed eccesso di colore (pres. dal Socio G. Silva).

Russo S. – Osservazioni sull'acido ribonucleico dell'oocite in crescita di *Myotis capaccini*, Bonaparte (pres. dal Socio G. Cotronei).

Saban G. – Sulle varietà quasi–asintotiche. Nota III. Ancora sulle varietà subordinate (pres. dal Socio E. Bompiani).

Stefanelli A. – Cicli vitali e citomorfosi delle cellule nervose dei Vertebrati (pres. dal Socio G. Cotronei).

PREMI IN CORSO DI ASSEGNAZIONE PRESSO L'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ELENCO DEI CONCORRENTI

CLASSE DI *SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI* ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO NAZIONALE GENERALE

(Scadenza 31 dicembre 1950 – Premio lire 1.000.000)

1. GIUSEPPE GENTILE. — « Abbozzi della introduzione alla Scienza Geocosmica » (4 cop. ms.).

2. EUGENIO MIRELLI. — 1. « Il sistema monetario matematico ». — 2. « Il sistema per misurare l'energia economico–monetaria » (1 cop.). — 3. « Il primo catechismo economico–finanziario » (1 cop.).

3. ERNESTO CANTORI. — 1. « Ricerche sull'accelerazione normale ed extranormale delle radiazioni solari – Filosofia ed attinenze biologiche » (5 cop. datt.).

4. ELEONORA CAVALIERI. — « Dei rapporti tra le figure del quadrato e del circolo. E di un nuovo teorema di geometria ad entrambi relativo e delle sue conseguenze » (2 cop. e 3 estratti).

5. FABIO FERRARI. — 1. « In tema di supercementi » (5 cop.). — 2. « Über gipshaltige puzzolanzemente » (1 cop.). — 3. « Brownmillerit–Zement » (5 cop.). — 4. « Cementi pozzolanici » (5 cop.). — 5. « Supercementi d'uso generale » (5 cop.). — 6. « Universal–Portlandzemente » (5 cop.). — 7. « Dei cementi Ferrari » (3 cop.). — 8. « Cementi Ferrari » (4 cop.). — 9. « Ciments ferreux et ferreux pouzzolananiques vis–à–vis des eaux agressives » (5 cop.). — 10 « Il cemento Ferrari e l'attuale orientamento delle industrie dei leganti idraulici » (5 cop.). — 11. « Il cemento Ferrari di ridotta basicità e l'autarchia » (5 cop.). — 12. « Über Ferrari Zement » (2 cop.). — 13. « Le Ciment Ferrari » (2 cop.). — 14. « Zur Kenntnis des Ferrari–Zements » (4 cop.). — 15. « Sulle ragioni dell'alta resistenza chimica dei cementi Ferrari » (5 cop.). — 16. « Sulla determinazione rapida della silice del cemento idraulico o dei silicati decomponibili dagli acidi » (5 cop.). — 17. « Sul tufo del Monferrato » (4 cop.). — 18. « Per il progresso delle industrie del cemento » (1 cop.). — 19. « Nel divenire del cemento idraulico » (5 cop.). — 20. « Sulla costituzione dei leganti idraulici in rapporto al ritiro e al calore d'idratazione » (3 cop.). — 21. « Dei leganti idraulici per la ricostruzione » (5 cop.). — 22. « Agglomerati per la ricostruzione » (1 cop.). — 23. « Note au sujet des essais préalade cuisson dans l'industrie du ciment » (1 cop.). — 24. « Leganti pozzolanici » (5 cop.). — 25. « Agglomerati pozzolanici e cementizi » (4 cop.). — 26. « Per l'impiego razionale dei cementi idraulici » (5 cop.). — 27. « Sul problema della casa in Italia » (5 cop.). — 28. « Sui cementi misuratamente espansivi » (5 cop.). — 29. « Analisi rapida dei leganti idraulici unitari » (5 cop.). — 30. « Cementi ipocalcici » (5 cop.). — 31. « Leganti idraulici di razionale impiego per la costruzione di opere idroviarie e marittime » (5 cop.). — 32. « Attitudine alla cottura, finezza di macinazione ed omogeneità dei crudi di cemento calcico » (5 cop.). — 33. « Sulla resistenza chimica dei cementi ferrici (tipo Ferrari) e dei relativi pozzolanici » (5 cop.). — 34. « Sul processo di fabbricazione dei cementi ferrici (tipo Ferrari) » (5 cop.). — 35. « Miscela a base di pozzolana e di calce » (5 cop.). — 36. « Chiarimenti in tema di cementi ferrici e pozzolanici » (5 cop.). — 37. « Sull'urgenza di generalizzare la razionalità di fabbricazione dei cementi » (5 cop.).

6. LEA DEL BO ROSSI. — 1. « Comunicazione agli Studiosi del *Problema del Cancro* » (5 cop.). — 2. « Il sistema nervoso studiato con una nuova tecnica ». Voll. I e II (3 cop. cad.).

7. Giuseppe Tupone. — « Moto traslatorio ad azione interna e conseguente creazione o distruzione di energia ».

8. Avv. Romolo Gambini. — « Descrizione di fenomeni radio-elettro-bio-magnetici-metaphisici-terapeutici relativi alle facoltà dell'autore, conferenze e articoli vari ».

9. Dott. Eugenio De Bernart. — 1. « Psicopatologia e psicoterapia dei tubercolotici » (5 cop.). — 2. « Il trattamento post-operatorio e la condotta del pneumotorace extrapleurico-chirurgico » (5 cop.). — 3. « Su di una manovra semplice ed efficace per ottenere l'ampliamento di cavi pneumotoracici, extrapleurici tendenti alla sinfisi progressiva » (5 cop.). — 4. « La Toracoplastica associata ad apicolisi complementare nei confronti delle Toracoplastiche semplici » (5 cop.). — 5. « Destrolabilità e sinistrolabilità neurovegetativa in soggetti normali e in portatori di lesioni tubercolari » (5 cop.). — 6. « Considerazioni sul comportamento delle caverne dopo intervento di Jacobaeus » (5 cop.).

10. Carmelo Gallo. — « Componimenti di Geometria Piana sulla Circonferenza ».

11. Mario Centis. — « Vita e morte ».

ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO NAZIONALE DI CATEGORIA (*GEOLOGIA PALEONTOLOGIA E MINERALOGIA*)

(Scadenza 31 dicembre 1950 - Premio lire 1.000.000)

1. Prof. Ciro Andreatta. — 1. « Un esempio di piede di taglio ». — 2. « Analisi strutturali di rocce metamorfiche, VI: regola d'orientazione della cianite ». — 3. « Petrografia strutturale e petrotettonica ». — 4. « Analisi strutturali di rocce metamorfiche. VII: Anidrite » (4 cop.). — 5. « La regola di orientazione dei cristalli di olivina nelle tettoniti ». — 6. « La formazione gneissico-kinzigitica e le oliviniti di Val d'Ultimo (Alto Adige)». — 7. « Relazione sul rilevamento geologico nell'Alto Adige Occidentale». — 8. «Studio petrografico del complesso eruttivo del Monte Croce in Alto Adige ». — 9. « I giacimenti ferriferi della regione Boai-Comasine in val di Peio (Trentino) ». — 10. « Sui cosiddetti " Scisti del Verrucano " dell'Alto Adige occidentale ». — 11. « Ricerche sui giacimenti minerari della Venezia Tridentina. Relazione delle indagini svolte nell'anno 1939 ». — 12. « Sulle rocce eruttive del gruppo Ortles-Cevedale ». — 13. « Successioni delle manifestazioni magmatiche nel massiccio Ortles-Cevedale ». — 14. « La " Linea di Peio " nel massiccio dell'Ortler e le sue miloniti ». — 15. « La tettonica " a vortici " nei monti della Val di Sole ». — 16. « Il metamorfismo delle formazioni del gruppo dell'Ortler » (dts). — 17. « Studio petrografico, geologico e minerario della Val di Peio e della catena Vioz-Cevedale. I. Parte » (dts. 1 cop.). — 18. « " Foglio M. Cevedale » della Carta geologica delle Tre Venezie, 1 : 100 mila » (bozze 1 cop.). — 19. « Carta geologica della Val di Peio, 1 : 15.000 ». — 20. « Carta geologica della catena Vioz-Cevedale, 1 : 25.000 ». — 21. « Carta geologica della parte settentrionale del gruppo dell'Ortler e regioni limitrofe, 1 : 50.000 ». (ms 1 cop.). — 22. « Carta geologica della Val Zebrù e della catena M. Confinale-Gran Zebrù, 1 : 25.000 » (ms. 1 cop.). — 23. « Carta geologica della Valle di Gavia e della catena Punta S. Matteo-Corno dei Tre Signori, 1 : 25.000 » (ms. 1 cop.). — 24. « Carta geologica della Val di Rabbi, 1 : 25.000 » (ms. 1 cop.). — 25 « Ueber die quantitative mineralogische klassifikation der Eruptivgesteine und ihre diagrammatische Darstellung ». — 26. « Il contributo della petrografia alla risoluzione dei problemi inerenti la ricerca e lo sfruttamento dei giacimenti di idrocarburi ». — 27. « Appunti sopra l'origine dei graniti ». — 28. « Energia nucleare e magmatismo ». — 29. « Sull'alterabilità dei minerali delle rocce ». — 30. « Sopra l'alterazione delle miche ». 31. — « Studio petrografico di alcune argille montmorillonitiche pugliesi ». — 32. « L'origine dei reticoli e strati nell'alterazione dei minerali costituenti le rocce ». — 33. « Studio del giacimento idrotermale di minerali argillosi di Capalbio (Orbetello) ». — 34. « Studio di un interessante giacimento di riempimento di argille montmorillonitiche idrotermali (Vallortigara-Posina, Schio) ». — 35. « Studio di un nuovo termine della serie illiti—idromiche in

giacimento idrotermale e considerazioni sui passaggi miche–idromiche–montmorillonite ». — 36. « A new type of illite–hydromica in a hydrothermal deposit ». — 37. « Studio petrografico e geologico dei giacimenti e delle argille montmorillonitiche idrotermali della Valle di Mogentale presso Posina (Vicenza) ». — 38. « Basalti della Valle dell'Alpone e loro inclusi peridotitici ». — 39. « Giacimenti di granato almandino ai contatti del massiccio intrusivo di Cima d'Asta e loro paragenesi ». — 40. « Appunti geologico–petrografici su alcuni problemi dello zoccolo cristallino dell'Eritrea ». — 41. « Studi geologici e petrografici sul cristallino dei Monti Peloritani ». — 42. « Origine dei giacimenti del permiano superiore del Trentino e influenza del manganese sulla metallizzazione a galena argentifera ». — 43. « Rapporti fra colate laviche e coperture di tufi in una zona meridionale del sistema dei porfidi atesini (altopiano di Pinè) ». — 44. « Le coltri di tufi del sistema porfirico dell'altopiano di Pinè meridionale ». — 45. « Notizie sulla costituzione del complesso effusivo permiano del Trentino–Alto Adige ». — 46. « Il complesso dei porfidi quarziferi atesini ». — 47. « Rilevamento geologico della zona di serra Marapintan del foglio "Cagliari" della Carta Geologica d'Italia al 100.000 » (1 cop.).

2. Prof. DAVID FIESCHI. — « Per una intesa mondiale » Parte I: Geodinamica. Parte II: Novità finanziarie ».

ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO « GUALTIERO POMA » PER LA *CHIMICA*

(Scadenza 31 dicembre 1950 – Premio lire 500.000)

1. Dott. FAUSTO G. FUMI. — 1. « On the form of Molecular orbitals in conjugated Rings and chains » (ms.). — 2. « On the Molecular Structure of Uranium Hexafluoride » (estratto). — 3. « Directed valence and theory of groups » (ms.). — 4. « Proprietà fisiche delle molecole e teoria dei gruppi » (estratto). — 4. « Physical properties of symmetrical systems » (ms.). — 6. « Legami intercorpuscolari e meccanica quantica; il metodo di Slater–Pauling » (copia fotografica). — 7. « Sulla natura dei legami interleptonici entro il complesso $[SiF_6]$ nei cristalli » (estratto). — 8. « Osservazioni sulle condizioni di isomorfismo di Zambonini–Perrier » (2 estratti). — 9. « Quantochimica » e « Applicazione della teoria dei gruppi alla fisica delle molecole » (estratti di conferenze).

2. Dott. GIORGIO CARERI. — 1. « Sulla cinetica delle reazioni di dissociazione » (I–II Nota) (estratti). — 2. « I diametri molecolari nella cinetica chimica » (estratto). — 3. « Equation of state calculations » (ms.). — 4. « The Use of a Gaussian for the probability density of a molecule in a cristal » (ms.). — 5. « Reazioni di scambio tra idrogeno e deuterio in fase gassosa » (ms.). — 6. « Revisione critica delle reazioni elementari dell'idrogeno in fase gassosa » (ms.).

3. Prof. UGO CROATTO. — 1. « Un effetto elettrico durante la corrosione di metalli in campo magnetico ». — 2. « Un effetto termico durante la corrosione di metalli in campo magnetico ». — 3. « Nuovi indirizzi nello studio della corrosione dei metalli in sistemi Me | MeX | X | con misure di un effetto elettrico in campo magnetico ». — 4. « Due nuovi effetti magnetici come mezzo di indagine sulla corrosione di metalli ». — 5. « Forze elettromotrici di pile con elettroliti solidi. Discussione del caso generale di elettroliti a condizione mista ». — 6. « Idem. Nota II ». — 7. « Pile galvaniche con elettroliti solidi ». — 8. « Conducibilità termica e disordine reticolare nei semiconduttori ». — 9. « Manometri chimici ». — 10. « Termoelettricità e disordine reticolare in semiconduttori ». — 11. « Preparation of Radioactive Hydrogen Sulphide ». — 12. « Chemical Identity of the Sulphur Formed by the Slow Neutron Bombardment of Alkali Chlorides ». — 13. « Edifici cristallini con disordine reticolare – Esistenza e struttura di cristalli misti anomali tra biossidi e sesquiossidi di terre rare ». — 14. « Idem. Esistenza e struttura di cristalli misti anomali tra alogenuri d'argento e alogenuri di metalli bivalenti ». — 15. « Edifici cristallini con disordine reticolare ». — 16. « Conducibilità elettrolitica dei cristalli – Nota III ». — 17. « Idem – Nota IV ». —

18. « Catalisi eterogenea e disordine reticolare del catalizzatore ». — 19. « Determinazione della struttura del p-diclorobenzene ». — 20. « Su un sistema atto a migliorare i risultati delle indagini strutturistiche dei cristalli con analisi Fourier. – Nota VII » (estratti in unico esemplare). — 21. « Indagini sullo stato reale dei solidi » (5 cop. ms).

ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO PER LE RICERCHE SULLE PARTICELLE ELEMENTARI « ALFONSO SUSCA »

(Scadenza 31 dicembre 1950 – Premio lire 50.000)

1. Dott. GIUSEPPE FIDECARO. — « Sulla possibilità di analizzare la struttura dei nuclei mediante esperienze di diffusione coulombiana ».

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 13 gennaio 1951

BAER Yean G. — *Un demi-siècle de parasitologie a Neuchâtel*. Neuchâtel, Secrétariat de l'Université, 1949. Pp. 23, in-8°.

BAGCHI Haridas. — *Note on a certain Cremona transformation associated with a plane triangle*. Estr. da « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova », a. XIX, 1950.

— *On the invariant relation between two cognate sextactic conics of a cubic*. Estr. da « Proceedings of the Indiana Academy of Sciences », vol. XXXI, 1950.

BAGCHI Haridas and CHAKRAVARTY Nalini Kanta. — *Note on Laguerre's polynomial Ln (z) and its associated equations (functional and differential)*. Estr. da « Bulletin of the Calcutta Mathematical Society », vol. XLII, 1950, n. 1.

— *Note on a triad and functional equation connected with the Laguerre's polynomial Ln (z)*. Estr. da « Bulletin of the Calcutta Mathematical Society », vol. XLII. 1950, n. 1.

— *On Tschebyscheff function Tn (z) and its associated equations*. Estr. da « Journal of the Indian Mathematical Society », vol. XIV, 1950, n. 1.

— *Some further relations connected with Tschebyscheff's function Tn (z)*. Estr. da « Journal of the Indian Mathematical Society », vol. XIV, 1950, n. 1.

BAGCHI Haridas and MUKHERJI Biswarup. — *Note on a circular cubic with a real inflexion at infinity*. Estr. da « Bulletin of the Calcutta Mathematical Society », vol. XLII, 1950, n. 2.

BIRAGHI Antonio e PAVARI Aldo. — *La difesa contro le malattie del castagno*. Firenze, Tip. Giuntina, s. d. Pp. 23, in-8°.

BRESAOLA Mario. — *Esperienze sulla concimazione del prato stabile di piano e di monte*. Roma, Istituto Poligrafico dello Stato, 1950. Pp. VIII–234, in-8°, con figg. e tavv. (Ministero dell'Agricoltura e delle Foreste – Stazione Sperimentale di Praticoltura di Lodi).

BURGATTI Pietro. — *Memorie scelte* pubblicate sotto gli auspici delle Università di Bologna e Ferrara, dell'Accademia delle Scienze di Bologna e dell'Unione Matematica Italiana. Bologna, Zanichelli, 1951. Pp. VI–354, in-8°.

CHAKRAVARTY Nalini Kanta. — Vedi: BAGCHI Haridas and CHAKRAVARTY Nalini Kanta.

CONGRÈS INTERNATIONAL DE CHRONOMÉTRIE (Genève 26–29 Août 1949). — *Actes*. Lausanne, 1949. Pp. 197, in-8°, con figg.

CONGRESSO (III) INTERNAZIONALE DI MEDICINA DELL'ASSICURAZIONE VITA. — *Relazioni e Comunicazioni*. A cura del Segretario dott. Andrea Sultano. Roma,

Istit. Poligrafico dello Stato, 1950. Pp. 1169, in–16°, con figg. e tavv.

GHIGI Alessandro e RAFFAELE Federico. — *La vita degli animali*. Voll. II e III. Torino, Unione Tipografico–Editrice Torinese, 1950. Voll. 2, in–8°, con figg. e tavv.

GRAETER K. — *Le traitement des troubles affectifs et l'art de vivre*. Suggestion et hypnose psychanalyse–biosophie. Traduit de l'allemand par A. Kastler. Leipzig – Strasbourg . . . , Heitz et C., 1933. Pp. VIII–214, in–8°, con tavv.

HARINGX J. A. — *On highly compressible helical springs and rubber rods, and their application for vibration free mountings*. Eindhoven, Philips Research Laboratories, 1950. Pp. 196, in–8°.

HUMPHREYS W. J. — *Bread and Butter Meteorology*. Estr. da « Bulletin of the American Meteorological Society », vol. II, 1930, n. 5.

— *The evolution of rain*. Estr. da « Journal of the Franklin Institute », vol. CCXLI, 1946, n. 6.

— *The magnetic field of an atom*. Estr. da « Science », n. s., vol. XLVI, 1917, n. 1186.

— *Note on ribbon lightning*. Estr. da « Journal of the Franklin Institute », 1926, August.

KASTLER A. — Vedi: GRAETER K.

MUKHERJI Biswarup. — Vedi: BAGCHI Haridas and MUKHERJI Biswarup.

PAVARI Aldo. — *Alcune grandi opere di bonifica forestale e i loro insegnamenti*. Estr. da « Atti della Accademia dei Georgofili », 1949.

— *L'attività della Stazione Sperimentale di selvicoltura nel primo venticinquennio*. Firenze, Ricci, 1950. Pp. 126, in–8°, con figg. (Pubblicazioni della Stazione sperimentale di selvicoltura. Firenze).

— *Commenti al lavoro di A. Giacobbe*: « *Le basi concrete per una classificazione ecologica della vegetazione italiana* ». Estr. da « Archivio Botanico », 1947–49.

— *Foresta e deserto*. Estr. da « Scientia », s. 6ª, a. XLIV, 1950, marzo–aprile.

PAVARI Aldo. — *Genetica forestale*. Estr. da « Atti del Congresso Agrario Nazionale indetto dal l'Accademia di Agricoltura di Torino », 1948.

— *Nota su Acer Lobelii Ten*. Estr. da « Nuovo Giornale Botanico Italiano », n. s., vol. XVI, 1949, Pp. 585–556.

PAVARI Aldo. — Vedi: BIRAGHI Antonio e PAVARI Aldo.

RAFFAELE Federico. — Vedi: GHIGI Alessandro e RAFFAELE Federico.

Rayons X et structure atomique. Orléans, Impr. Nouvelle, 1948. Pp. 60, in–8° (Collège de France – Hommage National à Paul Langevin et Jean Perrin).

RÖHL Eduardo. — *Las oscilaciones nocturnas de la presión atmosférica*. Estr. da « Boletín de la Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales », 1948, n. 30.

ROSSEL J. — *Quelques aspects de la physique du neutron*. Neuchâtel, Secrétariat de l'Université, 1950. Pp. 28, in–8°, con figg.

RUSSO Achille. — *Un equivoco da chiarire* (a proposito dell'origine dei neoplasmi). Estr. da « Bollettino delle sedute dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania », s. 4ª, 1950, fasc. 6.

— *Filippo Silvestri*. Estr. da « Bollettino delle sedute dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania », s. 4ª, 1950, fasc. 5.

THENARD Paul. — *Le chimiste Thenard*, 1777–1857. Par son fils Paul Thenard avec introduction et notes de Georges Bonchard. Dijon, Impr. Jobard, 1950.

TRISCHITTA Antonino. — *Per una nomenclatura biologica ternaria plurinominale*. Estr. da « Atti della Accademia Peloritana dei Pericolanti », Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, vol. XLVIII, 1946–49.

VISCARDINI Mario. — *Idées pour un nouveau système du monde*. Cosmogonie physique. Milano. Edizioni U. H. U., 1949. Pp. 15, in–8°.

D. DE BLASI.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 10 febbraio 1951

Presidenza del Socio G. Castelnuovo

NOTE DI SOCI

Geometria. — *Trasformazioni dualistiche di tipo nullo nel piano e sistemi* (G) *proiettivamente deformabili.* Nota (*) del Corrisp. Alessandro Terracini.

1. In un piano $\pi \equiv xy$ consideriamo una *corrispondenza dualistica di tipo nullo*, cioè una corrispondenza fra il piano punteggiato e il piano rigato in cui punto e retta omologhi A, a si appartengono costantemente. La considerazione di tale corrispondenza equivale a quella del sistema $\infty^1 \Sigma$ delle linee

$$T(x, y) = \text{cost.}, \tag{1}$$

che in ogni punto A hanno come tangente la corrispondente retta a.

In relazione con una tale corrispondenza, o col sistema Σ, introduco, in modo proiettivamente invariante, certi sistemi di coniche i quali lumeggiano una nozione di applicabilità proiettiva da me introdotta in un'altra circostanza, che sarà richiamata più avanti.

Chiamerò di tipo *non speciale*, sia il sistema Σ, sia la corrispondenza dualistica, quando il sistema Σ non è costituito da rette, designando invece come tipo *speciale*, o rispettivamente *doppiamente speciale*, quello che si ha quando le linee di Σ sono rette non concorrenti, oppure concorrenti in un punto.

Nella presente Nota mi riferisco unicamente al tipo non speciale, riservandomi di ritornare sui tipi speciali in una Nota successiva.

Inoltre resterà sottinteso che ci riferiamo a punti $A \equiv (x, y)$ che non siano di flesso per la linea di Σ passante per essi. Perciò, posto

$$\Delta = T_2^2 T_{11} - 2 T_2 T_1 T_{12} + T_1^2 T_{22},$$

con $T_1 = \partial T/\partial x$, $T_2 = \partial T/\partial y$, ecc. sarà $\Delta \neq 0$.

(*) Presentata nella seduta del 10 febbraio 1951.

Allora, in relazione con ogni elemento del prim'ordine Aa di una linea di Σ, risulta definito in modo proiettivamente invariante un elemento E_3, che chiamerò *principale*, contenente quell'E_1, mediante la considerazione che segue.

Se un punto B tende ad A lungo una linea passante regolarmente per A con la retta tangente g, sia G la posizione limite dell'intersezione ba: variando la retta g, si ha una proiettività non degenere $\mathbf{P}_0$ tra il fascio di centro A descritto dal raggio g e la punteggiata di sostegno a descritta da G. L'E_3 principale è quello delle coniche (contenenti l'E_1 Aa) la cui polarità subordina tra il fascio A e la punteggiata a quella stessa proiettività $\mathbf{P}_0$.

Posto sempre $A \equiv (x, y)$, se il coefficiente angolare [1] del raggio g è m, il punto $G \equiv (x_1, y_1)$ è dato da

$$(2) \qquad x_1 - x = \frac{T_2 (T_1 + T_2 m)}{a + bm} \quad , \quad y_1 - y = - \frac{T_1 (T_1 + T_2 m)}{a + bm} ,$$

avendo posto

$$a = T_2 T_{11} - T_1 T_{12} \quad ; \quad b = T_2 T_{12} - T_1 T_{22} .$$

Le (2) mettono in evidenza la proiettività $\mathbf{P}_0$.

Posto $\xi = X - x$, $\eta = Y - y$, in coordinate correnti X, Y, a partire dalle (2) si ottiene l'equazione delle coniche subordinanti la proiettività $\mathbf{P}_0$ sotto la forma

$$(3) \qquad 2 T_1 \xi + 2 T_2 \eta - T_{11} \xi^2 - 2 T_{12} \xi\eta - T_{22} \eta^2 - \lambda (x, y) (T_1 \xi + T_2 \eta)^2 = 0$$

essendo $\lambda (x, y)$ una funzione arbitraria.

L'E_3 principale, comune alle coniche del fascio, è dato da [2]

$$\eta = - \frac{T_1}{T_2} \xi + \frac{\Delta}{2 T_2^3} \xi^2 + \frac{b\Delta}{2 T_2^5} \xi^3 ;$$

cosicchè, paragonando coll'E_2 della curva $T = \text{cost.}$, si ha che *l'*E_2 *dell'*E_3 *principale e quello della linea di* Σ *sono armonici.*

Chiameremo *coniche principali* in A le ∞^1 coniche contenenti l'E_3 principale, cioè appartenenti al fascio (3).

2. Nella corrispondenza dualistica considerata, dal punto A escono tre *rette inflessionali*, tali cioè che ad un E_2 di flesso di origine A con una di tali rette come tangente di flesso corrisponde un E_2 cuspidale uscente da un punto di a (*punto cuspidale*) con a come tangente cuspidale.

Posto

$$p = T_2 T_{111} - T_1 T_{112} \quad ; \quad q = T_2 T_{112} - T_1 T_{122} \quad ; \quad r = T_2 T_{122} - T_1 T_{222} ,$$

(1) Ci serviamo per brevità di tale locuzione, sebbene – dato il carattere proiettivo della questione in esame – giovi servirsi di coordinate proiettive.

(2) Se fosse $T_2 = 0$, si giungerebbe alle stesse conclusioni scambiando x con y.

l'equazione complessiva della terna di rette inflessionali uscenti da A è

$$(4) \qquad \begin{aligned} &2(a\xi + b\eta)(T_{11}\xi^2 + 2T_{12}\xi\eta + T_{22}\eta^2) - \\ &-(T_1\xi + T_2\eta)(p\xi^2 + 2q\xi\eta + r\eta^2) = 0\ (3). \end{aligned}$$

Si può osservare che, in base all'ipotesi $\Delta \neq 0$, nessuna delle tre rette inflessionali in A coincide con la retta a.

Ciò premesso, dato il sistema Σ, che continuiamo a supporre non speciale, proponiamoci di *scegliere per ogni punto* A *del piano una conica principale* c_A *in modo che quando* A *varia su una linea di* Σ *i tre punti caratteristici distinti da* A *della conica* c_A *appartengano alle tre rette inflessionali uscenti da* A.

Un sistema cosiffatto di coniche principali si chiamerà un *sistema principale di coniche principali* del sistema Σ.

Si tratta dunque di scegliere la funzione $\lambda(x, y)$ che compare nella (3) in modo che abbia luogo la proprietà enunciata. Ora eseguendo i calcoli, si trova, come primo membro dell'equazione complessiva della terna di rette proiettanti da A quei punti caratteristici, la somma di due forme cubiche: la prima è il primo membro della (4), mentre la seconda, a meno di un fattore numerico, è

$$\frac{\partial(\lambda, T)}{\partial(x, y)}(T_1\xi + T_2\eta)^3 = 0.$$

Siccome le rette inflessionali in A sono distinte dalla a, si conchiude che il jacobiano è nullo.

Perciò *i sistemi principali di coniche principali del sistema* Σ *sono tutti dati dalla* (3), *dove si ponga in luogo di* $\lambda(x, y)$ *una funzione arbitraria* $\lambda(T)$ *di* T.

Se introduciamo una funzione $S = f(T)$, cosicchè il sistema Σ continua ad essere rappresentato da $S(x, y) = \text{cost.}$, legata alla T da

$$\frac{d^2 f}{dT^2} : \frac{df}{dt} = \lambda(T)$$

il sistema principale di coniche principali si riduce a

$$(5) \qquad 2S_1\xi + 2S_2\eta - S_{11}\xi^2 - 2S_{12}\xi\eta - S_{22}\eta^2 = 0.$$

In altre parole, *la* (5) *assumendovi come* S *una funzione arbitraria di* T, *dà tutti i sistemi principali di coniche principali del sistema* $T(x, y) = \text{cost.}$

3. Gli sviluppi che precedono si possono utilizzare nella teoria di quei particolari sistemi (G), o sistemi di linee integrali di un'equazione differenziale di tipo (G)

$$(G) \qquad y''' = G(x, y, y')y'' + H(x, y, y')y''^2,$$

che ammettono una serie ampia quanto è possibile, cioè ∞^1, di *applicabilità proiettive dirette* (che qua chiamerò brevemente *applicabilità proiettive*, senz'altro) su sistemi analoghi.

(3) Le rette inflessionali ed i corrispondenti punti cuspidali sono omologhi nella proiettività P_0, cosicchè i punti cuspidali si ottengono dalle (2) sostituendovi per m le radici $m = \eta/\xi$ della (4).

Tali sistemi, che denominerò *sistemi* (G_0), sono caratterizzati [4] dai seguenti valori dei coefficienti:

$$(6) \qquad G = \frac{3\,(S_{11} + 2\,S_{12}\,y' + S_{22}\,y'^2)}{2\,(S_1 + S_2\,y')} \quad ; \quad H = \frac{3\,S_2}{S_1 + S_2\,y'} \,,$$

essendo $S(x, y)$ una funzione arbitraria. Quanto ai sistemi proiettivamente applicabili, si ottengono sostituendo la S con

$$(7) \qquad \bar{S} = \frac{c_1 S + c_2}{c_3 S + c_4} \quad (c_1, c_2, c_3, c_4 \text{ costanti}\,;\, c_1, c_4 - c_2, c_3 \neq 0).$$

Essi si riducono ad una semplice infinità, dato che, come è ovvio, un'equazione (G_0) permane inalterata sottoponendo la S ad una sostituzione lineare intera a coefficienti costanti [5].

Per giungere ora a caratterizzare geometricamente i sistemi (G_0), richiamiamo anzitutto da (T) la nozione degli *elementi satelliti* di un E_1 Aa_1 in presenza di un sistema (G) per ora affatto qualunque. Gli E_3 integrali dell'equazione (G) contenenti un E_1 prefissato Aa_1 sono quelli delle coniche, contenenti l'E_1, per le quali un certo punto P della retta a_1 (punto satellite) ha come polare una certa retta p per A (retta satellite). L'equazione (G) è nota quando per ogni E_1 Aa_1 sono noti il punto e la retta satelliti, in quanto (cfr. (T), n. 1) le coordinate del punto satellite e l'equazione della retta satellite dell' E_1 (x, y, y') sono rispettivamente dati da

$$(8) \qquad x_0 = x + \frac{3}{G} \quad ; \quad y_0 = y + \frac{3\,y'}{G}$$

e da

$$(9) \qquad (Hy' - 3)\,(X - x) - H\,(Y - y) = 0\,,$$

(in coordinate correnti X, Y).

In particolare, e allora l'equazione di tipo (G) si dice *eccezionale di seconda specie*, può avvenire che al variare di a_1 intorno al punto A, la retta satellite resti fissa, il quale caso (cfr. (T), n. 9) è caratterizzato dalla circostanza che H sia della forma

$$H = \frac{3}{y' - \omega\,(x, y)}\,,$$

(4) Cfr. A Terracini, *Sobre la ecuación diferencial* $y''' = G(x, y, y')\,y'' + H(x, y, y')\,y''^2$. «Rev. de mat. y fís. teór. de la Univ. de Tucumán», vol. II, 1941. Indicherò tale Memoria con la sigla (T). Per la definizione delle applicabilità proiettive (fondata sulla conservazione di una certa forma differenziale quadratica, nella quale si traduce un certo birapporto infinitesimo), ved. il n. 25, dove si trovano anche assegnate le (6), (7), senza però che ne risultino i significati geometrici messi in rilievo nella presente Nota.

(5) Perciò la (7) si può sostituire con la

$$\bar{S} = \frac{kS}{k - S}$$

essendo k una costante arbitraria non nulla (per $k \to \infty$ si torna al sistema (G_0) iniziale, oppure con la $\bar{S} = 1/S$. Quest'ultima soluzione particolare non è rilevata esplicitamente in (T), n. 25, e corrisponde al caso in cui nelle (25 · 11) di loc. cit. la costante k sia nulla.

con ω funzione arbitraria di x, y. Confrontando con la seconda delle (6), si ha intanto che un'equazione (G_0) è una particolare equazione eccezionale di seconda specie. Precisamente, in base alla (9) si riconosce senz'altro che per un sistema (G_0) la retta satellite fissa dell'E_1 Aa_1 (ora dipendente dal solo punto A) è la tangente in A alla linea del sistema $S(x, y) = \text{cost.}$ passante per il punto A stesso.

Noto che sia il sistema $\infty^1 \Sigma$ delle linee $S(x, y) = \text{cost.}$ – sistema che chiamerò non speciale, oppure ecc. come al n. 1, applicando la medesima terminologia anche al sistema (G_0) da cui esso proviene –, per conoscere geometricamente in modo completo il sistema (G_0) basterà conoscere ulteriormente i punti satelliti dei vari E_1, oppure – ciò che è lo stesso – conoscere, per ogni punto A, la corrispondente *linea satellite*, luogo dei punti satelliti degli E_1 Aa_1, con A fisso ed a_1 variabile.

Ora, eliminando y' fra le (8), nelle quali si sostituisca G a norma della prima fra le (6), risulta che per il sistema (G_0) considerato la linea satellite del punto (x, y) è attualmente una *conica satellite*, la cui equazione (posto ancora $\xi = X - x$, $\eta = Y - y$, con X, Y quali coordinate correnti) coincide con la (5). È poi chiaro che, nell'ipotesi fatta $\Delta \neq 0$, le coniche satelliti non sono degeneri.

Al pari del sistema (G_0), nemmeno il sistema delle coniche satelliti è individuato dal sistema Σ. Si tratta di indicare in termini geometrici, qual'è il modo più generale di associare al sistema Σ un sistema di coniche satelliti, definite una per ogni punto del piano, ivi tangente alla linea di Σ, in modo che il sistema (G) individuato dalle rette satelliti fisse già indicate e da queste coniche satelliti sia un sistema (G_0). Ormai la risposta riesce immediata applicando i risultati del n. 2.

Concludiamo così che *ogni sistema* (G) *proiettivamente deformabile in* ∞^1 *modi, cioè ogni sistema* (G_0), *non speciale, si ottiene partendo da un sistema* ∞^1 *di curve* Σ, *ed associando ad ogni punto* A *del piano, come retta satellite fissa, la tangente a in* A *alla linea di* Σ *passante per* A, *e come conica satellite una conica principale, in modo che le coniche principali costituiscano un sistema principale.*

4. Chiarita così la natura dei sistemi (G_0) non speciali, resta da spiegare geometricamente, nello stesso ordine di idee, il legame tra uno di essi e gli ∞^1 proiettivamente applicabili.

A tal uopo, giova riprendere dal n. 2 i sistemi principali di coniche principali relativi ad un sistema Σ non speciale, rilevando che, se un tale sistema è dato dalla (5), quando si passa dal punto $A \equiv (x, y)$ ad un punto generico infinitamente vicino $(x + dx, y + dy)$, i quattro punti caratteristici della conica principale sono proiettati da A secondo la quaterna di rette

$$(10)\quad (S_1\,dx + S_2\,dy)\,P^2 - 4\,[(S_{11}\,\xi + S_{12}\,\eta)\,dx + (S_{12}\,\xi + S_{22}\,\eta)\,dy]\,(S_1\,\xi + S_2\,\eta)\,P + \\ + 2\,(Q\,dx + R\,dy)\,(S_1\,\xi + S_2\,\eta)^2 = 0,$$

dove

$$P = S_{11}\,\xi^2 + 2\,S_{12}\,\xi\eta + S_{22}\,\eta^2;$$

$$Q = S_{111}\,\xi^2 + 2\,S_{112}\,\xi\eta + S_{122}\,\eta^2 \quad ; \quad R = S_{112}\,\xi^2 + 2\,S_{122}\,\xi\eta + S_{222}\,\eta^2.$$

Indicando con $\overline{E} = 0$ l'equazione (10) dove S si sostituisca materialmente con T, la stessa (10), scritta per $S = f(T)$ diventa

$$f'^2 \overline{E} + (2 f' f''' - 3 f''^2)(T_1 \xi + T_2 \eta)^4 (T_1 dx + T_2 dy) = 0,$$

($f' = df/dT$, ecc.). Se vogliamo che, per dx, dy arbitrari, la quaterna di rette non varii passando dalla T alla S, è necessario e sufficiente che sia

$$2 f' f''' - 3 f''^2 = 0,$$

cioè che f sia una funzione lineare fratta di T, a coefficienti costanti (con determinante non nullo). Paragonando con quanto si disse sull'intervento della (7) nell'applicabilità proiettiva, concludiamo quanto segue.

Consideriamo un sistema (G_0) *non speciale, dato a partire da un sistema* $\infty^1 \Sigma$ *di curve, e da un sistema principale di coniche principali. Si ottengono tutti i sistemi* (G_0) *proiettivamente applicabili su quello lasciando invariato il sistema* Σ *ed adottando un nuovo sistema di coniche principali legato a quello primitivo dalla condizione che, per ogni punto* A *del piano, i punti caratteristici delle coniche principali, relativi ad uno spostamento infinitesimo arbitrario, siano proiettati da* A, *per entrambi i sistemi, secondo una stessa quaterna di rette* [6].

Geometria. — *Sull'esistenza, sia nel campo razionale che nel campo reale, di involuzioni piane non birazionali* [1]. Nota [*] del Corrisp. Beniamino Segre.

1. Un teorema classico relativo ad un corpo γ commutativo (o campo) qualsiasi è quello di Lüroth, che può venir enunciato nel modo seguente [2]. Detto t un elemento trascendente sopra γ, ogni campo δ che soddisfi alle

$$(1) \qquad \gamma \subset \delta \subseteq \gamma(t),$$

e cioè che sia intermedio fra γ ed un'estensione trascendente semplice $\gamma(t)$ di γ, risulta a sua volta un'*estensione trascendente semplice di* γ. In altri termini, in forza delle (1) esiste in δ un elemento τ – trascendente sopra γ – tale che

$$(2) \qquad \delta = \gamma(\tau).$$

Dal suddetto teorema segue, com'è ben noto, che ogni curva algebrica *unirazionale in* γ, e cioè rappresentabile parametricamente nella forma

$$(3) \qquad x_1 = r_1(t), x_2 = r_2(t), \cdots, x_n = r_n(t)$$

(6) La quaterna di rette varia, ovviamente, secondo la direzione dello spostamento infinitesimo. Per un dato sistema (G_0), e per tutti quelli proiettivamente applicabili, la quaterna, a norma della (10), varia in un'involuzione nel fascio di centro A, involuzione che contiene la quaterna costituita dalla retta a insieme con la terna di rette inflessionali in A.

(*) Presentata nella seduta del 10 febbraio 1951.

(1) La parola « razionale » vien usata di solito con diversi significati in algebra ed in geometria algebrica. Onde evitare confusioni, la sostituisco nella seconda accezione colla denominazione « birazionale », da attribuirsi dunque alle varietà rappresentabili birazionalmente sopra uno spazio lineare.

(2) Cfr. ad esempio B. L. van der Waerden, *Moderne Algebra*, vol. I, 2ª ed. (Berlin, Springer, 1937), § 63.

colle r_i funzioni razionali a coefficienti in γ, è pure *birazionale in* γ [1]. All'uopo basta osservare che il campo

$$\delta = \gamma(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

soddisfa alle (1), qualora si definiscano le x colle (3); vi sarà dunque in δ un elemento τ per cui sussista la (2), onde varranno formule del tipo

$$x_1 = R_1(\tau), \quad x_2 = R_2(\tau), \cdots, \quad x_n = R_n(\tau)$$

assieme ad una della forma

$$\tau = R(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

colle R_i ed R funzioni razionali a coefficienti in γ, ciò che appunto prova l'asserto. Sotto forma equivalente si può anche dire che, *in un campo arbitrario, ogni involuzione* ∞^1 *sulla retta risulta birazionale.*

Il Castelnuovo, in un lavoro fondamentale [3], ha parzialmente esteso il citato teorema di Lüroth, stabilendo la *birazionalità di ogni involuzione piana* ∞^2 *nel campo complesso*, e quindi la *birazionalità* nel campo complesso, di ogni superficie che sia ivi *unirazionale* [4]. Rimaneva tuttavia da indagare se il teorema di Castelnuovo possa o meno venir esteso alle involuzioni ∞^2 in campi qualsiansi; ed il dubbio appariva specialmente fondato nel caso di campi non algebricamente chiusi, in cui resta senz'altro escluso che si possano trasportare le argomentazioni originali di Castelnuovo.

In questa breve Nota risolvo tale dubbio mostrando con semplici esempi, in sè non privi di interesse, che un risultato analogo a quello di Castelnuovo, dianzi richiamato, non sussiste nè nel campo razionale nè nel campo reale. Pertanto, mentre – a norma del teorema di Castelnuovo – ogni campo che abbia grado di trascendenza due sopra γ e sia intermedio fra γ e $\gamma(t_1, t_2)$ risulta un'*estensione trascendente doppia di* γ se γ è il campo complesso, ciò cessa dall'esser vero se γ è il campo razionale od il campo reale.

2. Denotiamo con F una superficie cubica non singolare di S_3, definita nel campo γ razionale, e rammentiamo le due seguenti proposizioni.

a) La superficie F è unirazionale in γ se, e soltanto se, essa contiene qualche punto razionale (ossia qualche punto a coordinate razionali) [5].

(3) G. CASTELNUOVO, *Sulla razionalità delle involuzioni piane.* «Math. Ann.», *44* (1894), 125–155, riprod. nelle *Memorie Scelte* (Bologna, Zanichelli, 1937), pp. 273–304.

(4) È però noto che questo risultato non può venir esteso alle varietà a più dimensioni nel campo complesso: ved. F. ENRIQUES, *Sopra una involuzione non razionale dello spazio.* «Rend. Acc. Naz. Lincei» (5), *21* (1912), 81–83.

(5) La *a*) è conseguenza immediata del risultato stabilito in B. SEGRE, *A parametric solution of the indeterminate cubic equation* $z^2 = f(x, y)$. «Journ. London Math. Soc.» *18* (1943), 24–31. Altre dimostrazioni di tale risultato sono state date successivamente da R. F. WHITEHEAD, *A rational parametric solution of the cubic indeterminate equation* $z^2 = f(x, y)$. «Journ. London Math. Soc.», *19* (1944), 68–71 e da B. SEGRE, *Arithmetic upon an algebraic surface.* «Bull. Amer. Math. Soc.», *51* (1945), 152–161.

b) Affinchè F sia birazionale in γ, è necessario (ma non sufficiente) che F soddisfi ivi ad almeno una delle condizioni $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_6$, e cioè che ammettano qualche radice razionale le equazioni algebriche ad un'incognita e coefficienti in γ, rispettivamente di gradi 27, 216, 720, 72, da cui dipendono la determinazione delle rette, delle coppie, delle terne, delle sestuple di rette di F a due a due sghembe (6).

Ciò premesso, mostriamo che *la superficie*

$$a_1 x_1^3 + a_2 x_2^3 + a_3 x_3^3 + a_4 x_4^3 = 0 \tag{4}$$

non è certamente birazionale nel campo γ *razionale*, se a_1, a_2, a_3, a_4 sono numeri razionali non nulli tali che nessuno dei rapporti di due di essi, e nessuno dei rapporti del prodotto di due di essi al prodotto dei rimanenti due, sia il cubo di un numero razionale. All'uopo osserviamo che le 27 rette della superficie (4) si distribuiscono nei tre sistemi coniugati di Steiner, consistenti di nove rette ciascuno, rappresentati dai sistemi di equazioni:

$$\begin{cases} a_1 x_1^3 + a_2 x_2^3 = 0 \\ a_3 x_3^3 + a_4 x_4^3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 x_1^3 + a_3 x_3^3 = 0 \\ a_2 x_2^3 + a_4 x_4^3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 x_1^3 + a_4 x_4^3 = 0 \\ a_2 x_2^3 + a_3 x_3^3 = 0. \end{cases}$$

Poichè, nelle ipotesi ammesse, ognuna di queste sei equazioni cubiche è irriducibile in γ e due qualunque di esse hanno radici indipendenti sopra γ, così il gruppo di Galois dell'equazione di 27° grado delle rette della superficie (4) ammette quei tre sistemi di rette come sistemi di imprimitività, su ciascuno dei quali opera transitivamente. Tali sistemi di nove rette sono dunque i soli sottoinsiemi razionali di rette della (4), sicchè questa superficie non soddisfa attualmente a nessuna delle anzidette condizioni $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_6$ (7). In virtù della *b*), la (4) non può quindi essere birazionale in γ.

Rileviamo poi che *fra le superficie* (4), *i cui coefficienti soddisfino alle condizioni dianzi enunciate, ve ne sono infinite di unirazionali in* γ. A norma di *a*), tale è infatti ad esempio la superficie

$$x_1^3 + 3 x_2^3 + 5 x_3^3 + 7 x_4^3 = 0,$$

la quale contiene il punto razionale $(1, -1, -1, 1)$. Ciascuna di tali superficie è dunque *unirazionale e non birazionale* nel campo razionale.

3. Denotando ora con γ il campo reale, osserviamo che *ogni superficie cubica* F *non singolare, definita in* γ, *è ivi unirazionale*. Invero, fra le 27 rette

(6) La *b*) trovasi anzitutto enunciata in B. Segre, *A note on arithmetical properties of cubic surfaces*. « Journ. London Math. Soc. », *18* (1943), 24–31, teor. VIII, ed è quindi dimostrata in B. Segre, *On the rational solutions of homogeneous cubic equations in four variables*. « Mathematicae Notae », *11* (1951), p. 1, teor. 5, §§ 2, 29.

(7) Questo risultato segue anche subito dai §§ 31–34 del secondo lavoro citato in (6), dove le condizioni $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_6$ vengono espresse esplicitamente per la superficie (4), in funzione dei coefficienti a_1, a_2, a_3, a_4. Un risultato più preciso trovasi al principio del § 35 di detto lavoro.

appartenenti ad F nel campo complesso ve n'è sempre qualcuna reale [8]. È subito visto che, se l è una di queste, le rette tangenti ad F nei punti di l formano un insieme ∞^2 birazionale nel campo reale; l'asserto segue allora senz'altro notando che le rette di tale insieme sono riferite ai punti ov'esse incontrano F, fuori del loro punto d'appoggio colla l, in una corrispondenza algebrica (2, 1).

Se F è birazionale in γ, i suoi punti reali risultano in corrispondenza generalmente continua, perchè algebrica, e biunivoca (sia pure con eventuali eccezioni) coi punti reali di un piano reale, sicchè – nello spazio proiettivo reale a cui appartiene – la F deve constare di *un'unica falda reale*. È ben noto, d'altro canto, che nello spazio proiettivo reale esistono superficie cubiche reali non singolari consistenti di due disgiunte falde reali [9]. Ne consegue che ciascuna di tali superficie risulta *unirazionale e non birazionale* nel campo reale.

Meccanica. — *La barriera della temperatura nei missili geodetici.* Nota [*] del Socio G. Arturo Crocco.

Nello studio del lancio dei missili a grandi distanze geodetiche si va incontro ad elevatissime velocità che involgono problemi dinamici ancora fuori di qualsiasi esperienza.

Tra questi problemi il più cruciale riguarda la temperatura assunta dal mobile nell'attraversamento dell'atmosfera; temperatura che appare così elevata da giustificare il concetto di una « barriera della temperatura » pronta ad ostacolare, dopo la «barriera del suono», l'aumento delle velocità spaziali. Tanto più che, elevandosi alle altissime quote richieste dalla sua traiettoria, il missile supera ben presto la quota d'inversione del gradiente termico dell'atmosfera e trova, oltre i 300 km di altezza, temperature valutabili in migliaia di gradi.

Ci proponiamo pertanto di punteggiare in alcune Note consecutive i capisaldi di questo pregiudiziale problema, che ha già una certa letteratura; e nella Nota presente, da considerarsi preliminare, di indicare alcune nostre formulazioni dinamiche concernenti la traiettoria ed il calcolo delle sue caratteristiche.

Come ho già avuto occasione di esporre [1], il missile *geodetico* lascia alla Balistica Ordinaria il campo delle forze parallele a gravità costante, bastevole allo studio delle attuali gittate anche a distanze *strategiche*; ed entra in pieno nel campo delle forze centrali e variabili dovuto alla rotazione ed alla rotondità della Terra. Ma per semplificare la trattazione, anzichè calcolare direttamente la traiettoria *relativa* alla Terra introducendo nel calcolo l'accelerazione di Coriolis, si segue il

(8) Per lo Studio della configurazione delle rette di una superficie cubica in un campo qualsiasi, cfr. B. Segre, *Le rette delle superficie cubiche nei corpi commutativi.* « Bollettino Un. Mat. Ital. » (3), *4* (1949), 223–228.

(9) Ved. per esempio B. Segre, *The non-singular cubic surfaces.* (Oxford, The Clarendon Press, 1942), § 63.

(*) Presentata nella seduta del 13 gennaio 1951.

(1) Conferenza inaugurale al Corso di Balistica Superiore, tenuto presso la Scuola di Ingegneria Aeronautica di Roma l'11 maggio 1950.

metodo, proposto da H. Bouasse[2], di scindere il problema in due tempi; calcolando dapprima la traiettoria *assoluta* nella ipotesi di Terra *non ruotante*; e poi tenendo conto della rotazione terrestre sotto forma di correzioni al piano della traiettoria ed alle coordinate del punto di arrivo. Tali correzioni si traducono così in un *aggiustamento balistico* delle condizioni iniziali di lancio, operate su una traiettoria supposta *rigida* e calcolata nella ipotesi di Terra non ruotante.

Una seconda semplificazione si apporta poi in questo studio mediante l'artificio metodico di spezzare l'intera traiettoria in due tronchi nel punto dove si prestabilisce di esaurire la combustione dei propellenti e quindi la spinta endoreattiva; e di considerare separatamente questi due tronchi ciascuno con le sue peculiari caratteristiche. Infatti il primo tronco si compie con accelerazione forzata e variazione di massa del missile attraverso gli strati densi dell'aria; mentre il secondo si svolge con accelerazione naturale e massa costante in una atmosfera così rarefatta da potersi trattare dinamicamente come spazio *vuoto*. Con questo artificio

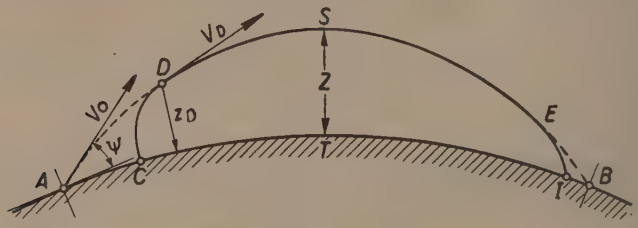


Fig. 1.

il primo tronco assume geometricamente la funzione di un raccordo sussidiario *reale* ad una intera traiettoria, inizialmente *ideale* e poi reale, che si suppone percorsa a massa costante e nel vuoto sotto le sole forze gravitazionali.

Lo schema della figura 1 precisa il suddetto artificio. Al tronco *reale*, cioè al tronco di traiettoria CD, compiuto di fatto dal missile sotto la spinta dell'endoreattore partendo *verticalmente* con velocità iniziale *nulla* dalla stazione di lancio C e giungendo al punto di raccordo D a combustione ultimata, si viene a sostituire il tronco *ideale* AD; che parte invece da un punto *ideale* A, alquanto più arretrato, con velocità *ideale* V_0, diversa da zero, e tangente ideale ψ; per raccordarsi in D col tronco *reale* DE, a parità di tangente in D e di velocità V_D.

Rispettando quest'ultima condizione, necessaria e sufficiente, si riesce così a svincolare il problema tecnico da quello concettuale. Il problema tecnico rimane quello di calcolare il miglior tratto di raccordo CD; che tenendo conto della spinta dell'endoreattore, della massa variabile del missile, nonchè della resistenza dell'aria, adempia al suo compito col minor consumo di propellenti; mentre il problema concettuale si riduce allo studio kepleriano di un'intera traiettoria nel vuoto, sotto l'azione di forze gravitazionali irradianti dal centro della Terra e che raggiunga la gittata *geodetica* ATB colla minima velocità iniziale di lancio.

(2) H. Bouasse, *Gyroscopes et Projectiles*. Ed. 1923, § 109.

Riservando a successive Note l'esame del tronco reale CD, nel quale il missile incontra gli strati densi dell'atmosfera con *moderata* velocità; e quello del tronco *reale* di arrivo EI, nel quale il missile torna a incontrarli *violentemente* distaccandosi alquanto, in geometria e velocità, dal tronco ideale EB; passiamo qui senz'altro ad indicare quelle nostre particolari formulazioni della traiettoria *ideale* che consentono il rapido adattamento di questo classico problema di Meccanica celeste al caso che ci interessa.

È notorio che nel campo gravitazionale terrestre, pel quale si verifica la relazione (1), dove R è il raggio della Terra considerata come sferica e g_o il valore della gravità g alla sua superficie, una massa unitaria lanciata *verticalmente* nel vuoto con velocità iniziale V_o ad un'altezza r, misurata dal centro della Terra, raggiunge una velocità V tale che la perdita di energia cinetica eguagli l'acquisto di energia potenziale, dato dalla (2)

$$(1) \qquad g = g_o \frac{R^2}{r^2}; \qquad (2) \qquad \int_R^r g\, dr = g_o R - \frac{g_o R^2}{r}.$$

È anche notorio che la suddetta eguaglianza vale anche quando V_o non è verticale ma comunque obliqua, trattandosi di campo di forze *conservativo* e che quindi i termini della (2) $g_o R$ e $g_o R^2/r$ ne rappresentano in qualsiasi caso il *potenziale* all'altezza R cioè alla superficie terrestre, ed all'altezza r cioè alla quota $z = r - R$.

Cosicchè se V_o assume il valore $V_E = \sqrt{2 g_o R}$, si ottiene nella suddetta eguaglianza $r = \infty$ qualsiasi l'orientamento di V_o; cioè V_E rappresenta la cosiddetta *velocità di evasione* dalla gravità. Porremo quindi le notazioni

$$(3) \qquad V_E^2 = 2 g_o R \quad ; \quad V_o^2 = \lambda V_E^2.$$

È infine notorio che se il mobile viene lanciato obliquamente con velocità $V_o < V_E$, la traiettoria risultante nel vuoto è una *ellisse* che ha uno dei due fuochi al centro della Terra e che risponde genericamente alla equazione polare

$$(4) \qquad r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta};$$

nella quale p ed e sono due costanti che passiamo a precisare; ed r e ϑ sono le coordinate polari di un punto generico N delle ellisse, quali si desumono dalla figura 2.

La figura 2 è desunta dal trattato di I. M. I. Kooy (3) ed anche le notazioni angolari; ma il metodo seguìto nello sviluppo è sostanzialmente diverso. Nella detta figura, supposta sul piano diametrale dei punti A e B, sono M ed M' i due fuochi dell'ellisse P N A S B P che passa per il punto di lancio A e per quello di arrivo B, cosicchè la distanza A T B misurata sulla superficie della Terra è una geodetica ideale tra quei due punti; il ramo A S B, contenente l'*apogeo* S, è reale ed il ramo B P A contenente il *perigeo* P è ideale.

(3) I. M. Kooy e I. W. H. Uytenbogaart, *Ballistics of the future*. 1946.

Chiamando con 2η l'angolo al fuoco M, centro della Terra, che sottende la geodetica A T B si avrà la relazione (5); e chiamando inoltre con ε l'angolo in A tra i due raggi focali MA ed M' A, si otterrà subito la relazione (6) dalla proprietà dell'ellisse per cui tangente e normale in un punto A bisecano gli angoli in A dei due raggi focali.

(5) $\quad \overset{\frown}{ATB} = 2\eta R;$ $\qquad$ (6) $\quad 2\psi = \varepsilon.$

Si ha così nella (6) la relazione fondamentale tra l'angolo di proiezione ψ, che la velocità V_0 fa con la tangente alla Terra nel punto di lancio, e il sunnotato angolo ε che insieme ad η definisce il *triangolo focale* M A M'.

Per precisare ora le costanti p ed e, cioè il *parametro* e l'*eccentricità* della ellisse corrispondente alle condizioni di lancio V_0 e ψ, desumeremo dalla (4), ponendovi

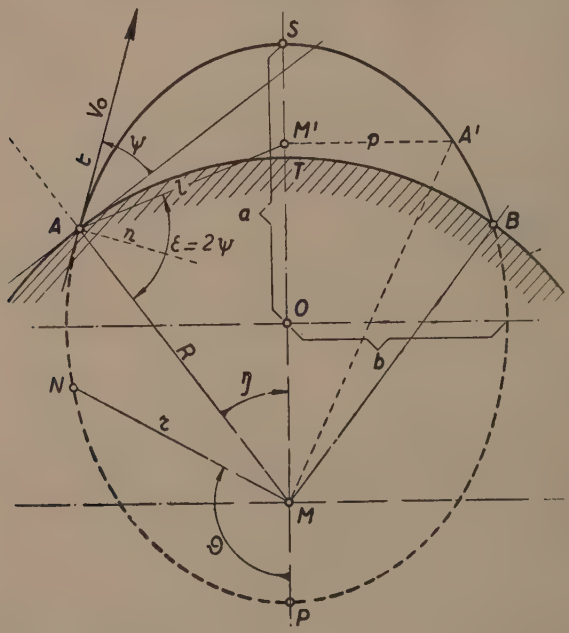


Fig. 2.

$\vartheta = 0$ e $\vartheta = \pi$, i due raggi vettori r_1 ed r_2 al perigeo ed all'apogeo, ottenendo, come è notorio, se indichiamo con a il semiasse maggiore;

$$(7) \qquad r_1 = \frac{p}{1+e} \quad ; \quad r_2 = \frac{p}{1-e} \quad ; \quad r_1 + r_2 = 2a = \frac{p}{1-e^2};$$

e ci serviremo delle (7) per ottenere anzitutto il parametro p in funzione di V e ψ, partendo dal *principio della conservazione* dell'energia, già ricordato; e dalla *legge delle aree*, per cui è costante l'area percorsa dal raggio vettore nell'unità di tempo.

Applicando il primo principio al perigeo P per cui è nulla la componente cinetica *radiale*; e la velocità V_1 nel punto P si riduce a $r_1\,(d\vartheta/dt)$, si otterrà subito

$$\frac{1}{2}\,r_1^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 - \frac{g_0 R^2}{r_1} = \frac{1}{2}\,V_0^2 - g_0 R\,; \tag{8}$$

nella quale il secondo membro, costante, rappresenterà l'energia totale nel punto A di partenza. Applicando poi al perigeo medesimo la legge delle aree si otterrà

$$r_1^2\,\frac{d\vartheta}{dt} = V_0 R \cos\psi\,; \tag{9}$$

dove il secondo membro fornisce l'area percorsa nell'unità di tempo dal raggio vettore iniziale R.

Cosicchè eliminando la incognita $d\vartheta/dt$ nella (8) per mezzo della (9) e semplificando si otterrà

$$\frac{V_0^2 R^2 \cos^2\psi}{2\,r_1^2} - \frac{g_1 R^2}{r_1} = \frac{V_0^2}{2} - g_0 R\,. \tag{10}$$

Una formulazione analoga alla (10) si potrà scrivere per l'apogeo sostituendo ad r_1 il raggio vettore r_2: e poichè il secondo membro resterà identico si potranno eguagliare i due primi membri, ottenendo

$$\frac{V_0^2 \cos^2\psi}{2\,r_1^2} - \frac{g_0}{r_1} = \frac{V_0^2 \cos^2\psi}{2\,r_2^2} - \frac{g_0}{r_2}\,. \tag{11}$$

Introducendo ora nella (11) le (7) vi apparirà, oltre al cercato parametro, p, anche la eccentricità, e, ancora ignota; ma quest'ultima variabile verrà ad eliminarsi nella eguaglianza dei due membri, e vi rimarrà solo p, in funzione delle condizioni iniziali, cioè:

$$p = \frac{V_0^2 \cos^2\psi}{g_0}\,. \tag{12}$$

Noto così p si otterrà l'eccentricità, e, dalla terza delle (7), previa la determinazione del semiasse maggiore, a, che passiamo a formulare, con analoga semplicità.

Perciò basterà ricordare che il parametro p di una conica è la ordinata di un fuoco; e che in una ellisse l'asse maggiore eguaglia la somma dei due raggi focali di un qualsiasi punto. Sarà dunque $p = M'A'$.

Considerando allora in fig. 2 i due triangoli $MM'A'$ ed $MM'A$ nel quale $MA = R$ e si porrà $M'A = l$; e richiamando la (6), dopo avere eliminato i lati incogniti, si otterrà la relazione

$$\frac{p}{R} = \frac{l(1+\cos\varepsilon)}{2\,a} = \left(1 - \frac{R}{2\,a}\right)\cos^2\psi\,; \tag{13}$$

ottenuta con sole proprietà geometriche e che, ragguagliata alla (12) ottenuta con considerazioni dinamiche, fornirà la notevole relazione

$$\frac{R}{2\,a} = 1 - \frac{V_0^2}{2\,g_0 R} = 1 - \lambda\,; \tag{14}$$

la quale, insieme alle (5), (6) e (12), basterà a risolvere i principali problemi della traiettoria.

Primo tra questi problemi è quello di determinare le condizioni iniziali corrispondenti alla gittata massima.

Per risolverlo rapidamente considereremo una data gittata, $2\eta R$, e ricercheremo le condizioni *ottime*, V_0 e ψ, corrispondenti ad η. Applicando per ciò la legge dei seni al triangolo $MM'A$, di cui indicheremo con ξ il terzo angolo in M' e porremo $R + l = 2a$, otterremo dalla (14)

$$(15) \qquad \frac{l}{R} = \frac{\lambda}{1-\lambda} = \frac{\sin\eta}{\sin\xi};$$

che, risoluta in λ, darà

$$(16) \qquad \lambda = \frac{l/R}{1 + l/R} = \frac{\sin\eta}{\sin\eta + \sin\xi}.$$

Considerando η prestabilito, potremo allora derivare la (17) rispetto a ξ ed ottenere la relazione ottima tra λ e ξ annullando questa derivata. Si avrà la (17) e quindi la (18)

$$(17) \qquad \frac{d\lambda}{d\xi} = \frac{-\sin\eta\cos\xi}{(\sin\eta + \sin\xi)^2}; \qquad (18) \qquad \sin\eta\cos\xi = 0$$

che è soddisfatta univocamente da $\cos\xi = 0$ cioè $\xi = \pi/2$. Da cui la interessante deduzione che *si ottiene la gittata massima per una coppia di valori qualsiansi* V_0 *e* ψ *quando il triangolo focale è rettangolo*: cioè quando la corda AB risulta perpendicolare all'asse maggiore dell'ellisse e vi cada il secondo fuoco M'.

Se ne ricavano subito le fondamentali relazioni

$$(19) \qquad \lambda_{opt} = \frac{\sin\eta}{1 + \sin\eta} \quad ; \quad \cos 2\psi = \sin\eta;$$

che dànno luogo subito a quasi tutte le altre relazioni concernenti la determinazione dell'ellisse. Indicheremo tra queste le (20)

$$(20) \qquad l = p = R\sin\eta \quad ; \quad 2a = R(1 + \sin\eta) \quad ; \quad MM' = R\sin 2\psi;$$

ed inoltre alcune espressioni equivalenti della eccentricità

$$(21) \qquad e = \sqrt{\frac{1-\sin\eta}{1+\sin\eta}} = \frac{\cos\eta}{1+\sin\eta} = \frac{1-\sin\eta}{\cos\eta} = \frac{\lambda}{\operatorname{tg}\eta};$$

ed infine le espressioni concernenti la quota del vertice della traiettoria $Z = SI$ e la velocità minima al vertice, cioè:

$$(22) \qquad Z = \frac{R}{2}(\cos\eta + \sin\eta - 1) \quad ; \quad \frac{V_Z}{V_E} = \sqrt{\frac{1-\cos\eta}{\sin\eta(1+\sin\eta)}}.$$

Soltanto le espressioni degli spazi percorsi e dei tempi impiegati a percorrerli sfuggono alla semplicità delle formulazioni qui ricavate. Riservandoci di indicarle

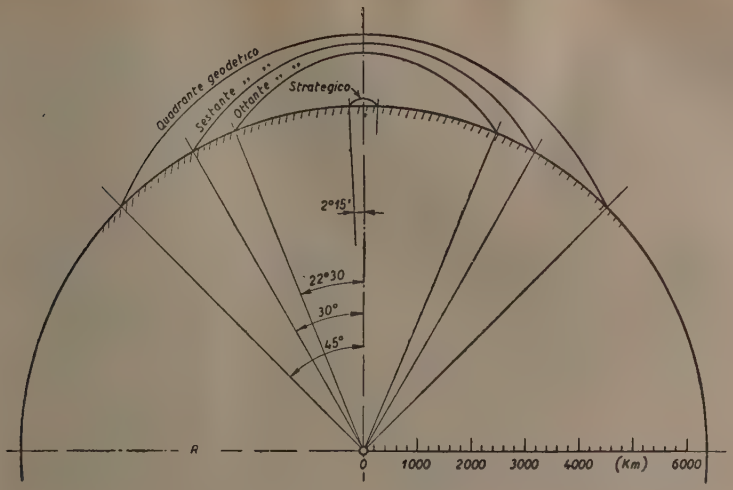


Fig. 3.

in ulteriore Nota, quando presenteremo un quadro numerico dei valori caratteristici calcolato prendendo l'angolo η di grado in grado, ora ci limitiamo a presentarne graficamente l'applicazione a tre valori di η, che chiameremo *ottante*, *sestante* e *quadrante*, per confrontarle tra di loro e coll'attuale tiro strategico in campo di forze parallele. La fig. 3 dà il confronto delle traiettorie assolute; mentre la fig. 4 presenta un interessante confronto fra le traiettorie *relative* alla Terra pianificata, che diventano iperboli nella trsformazione matematica e che sono state inoltre

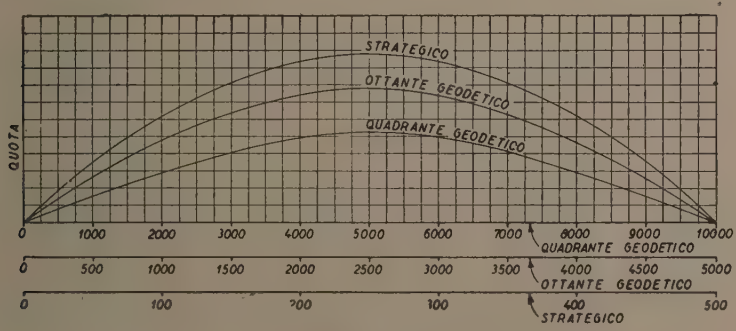


Fig. 4.

ridotte a base *unitaria* per un più interessante apprezzamento delle quote relative e degli angoli di proiezione.

Debbo esternare, concludendo, la mia riconoscenza al dott. Renato Pennacchi, assistente all'Istituto Motori della Scuola d'Ingegneria Aeronautica, che ha efficacemente collaborato nelle formulazioni di questa Nota.

Chimica organica. — *Perturbazioni intra- ed intermolecolari nei derivati del pirrolo.* – I. *N-acetilpirrolo ed α-acetilpirrolo* (*). Nota di Giov. Battista Bonino e Paolo Chiorboli, presentata (**) dal Socio G. B. Bonino.

In lavori pubblicati tra il 1933 ed il 1937 (1) da uno di noi (Bonino) e Collaboratori si era rilevata la netta differenza tra il comportamento del gruppo C=O nell'N-acetilpirrolo e nell'α-acetilpirrolo per quel che riguarda le loro manifestazioni nell'effetto Raman.

Mentre nello spettro Raman del primo composto la banda caratteristica del gruppo C=O appare in posizione pressochè « normale » (1716 cm^{-1}) e cioè nella stessa posizione rilevabile per i chetoni alifatici (per esempio per la serie dal metiletilchetone al metilnonilchetone essa cade a 1710–1712 cm^{-1}), nello spettro dell'α-acetilpirrolo la larga riga caratteristica del gruppo C=O appare in una posizione del tutto « anormale » e cioè a 1638 cm^{-1}, ad una frequenza dunque spostata di quasi 80 numeri d'onda rispetto al valore « normale ». Questo notevolissimo spostamento rivela una profonda perturbazione nel gruppo C=O della molecola dell'α-acetilpirrolo in contrapposto a quanto accade invece per l'N-acetilderivato.

Tale comportamento assai singolare si presta ancor oggi ad ulteriori ricerche e considerazioni. Siccome però gli spettri dei due derivati pirrolici non sono stati da allora ripresi in esame, a nostra conoscenza, da altri Autori, si è creduto opportuno ripetere gli spettri stessi, a distanza di circa 15 anni, su nuovi campioni di sostanze espressamente preparate e con l'aiuto di migliori apparecchiature oggi a nostra disposizione. In una Nota di E. Ghigi e P. Chiorboli, in pari data a questo lavoro, vengono comunicati i risultati di una tale ricerca di controllo che conferma pienamente, dal punto di vista sperimentale, gli interessanti risultati ricordati più sopra.

Osserviamo però che mentre lo spettro Raman dell'N-acetilpirrolo (composto liquido alla temperatura ordinaria) era stato eseguito sul chetone puro, quello dell'α-acetilpirrolo si era ottenuto da una soluzione satura del chetone in metanolo.

Ci siamo proposti perciò di approfondire qui le ricerche per stabilire più particolarmente:

a) se la forte perturbazione della riga Raman del C=O nelle soluzioni metanoliche sature di α-acetilpirrolo fosse in qualche modo da attribuirsi ad interazioni tra il chetone ed il solvente;

(*) Lavoro eseguito nel Centro Studi di Chimica Fisica del Consiglio Nazionale delle Ricerche presso l'Istituto Chimico « G. Ciamician » dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 10 febbraio 1951.

(1) Bonino, Manzoni, Pratesi, « Z. phys. Chem. », 22, 21 (1933); id. id., 25, 348 (1934); Bonino Manzoni, « Ricerca Sci. », 1937, II, p. 227.

b) se tale perturbazione dovesse attribuirsi a cause di ordine intermolecolare ovvero intramolecolare.

In quest'ultimo caso si potevano già escludere *a priori* azioni intramolecolari a carico dell'idrogeno iminico pirrolico, in quanto esperienze di già eseguite una decina di anni fa in questo Istituto [2] sullo spettro Raman dell'N–metil–2–acetilpirrolo avevano dimostrato che la riga del gruppo chetonico di questo composto si trova a circa 1642 cm^{-1}, e cioè in posizione pressochè coincidente con quella dell'α–acetilpirrolo non sostituito all'azoto.

Riferiamo in questa Nota sugli spettri Raman ottenuti su soluzioni benzeniche di varia concentrazione di α–acetilpirrolo e su soluzioni benzeniche e metanoliche di N–acetilpirrolo.

Il benzolo usato, in questo caso, come solvente, poteva rappresentare un mezzo « indifferente » nei riguardi del gruppo chetonico e perciò eventuali azioni intermolecolari avrebbero dovuto attenuarsi allontanando le molecole con la diluizione in detto solvente.

I campioni dei chetoni qui studiati sono gli stessi descritti nel lavoro sopra ricordato [3]. I solventi utilizzati corrispondevano a tutte le caratteristiche chimico–fisiche di purezza citate nella letteratura.

TABELLA I.

Spettro Raman dell' α–acetilpirrolo.

In soluz. metanolica satura (Ghigi e Chiorboli 1951)	In soluzione metanolica (frazione mol. 0,092) (questo lavoro)	In soluz. benzenica satura (questo lavoro)	In soluz. benzenica (frazione mol. 0,092) (questo lavoro)	In soluz. benzenica (frazione mol. 0,056) (questo lavoro)
895 (1)	—	895 (0)	895 (0)	—
932 (3)	934 (2)	934 (1)	934 (1)	934 (1)
990 (1) ?	—	—	—	—
1045 (3)	1045 (2)	1045 (2)	1045 (2)	1045 (1)
1150 (1)	1145 (0)	1145 (0)	1145 (0)	1145 (0)
1317 (1) ?	—	1320 (0) ?	1319 (0) ?	1321 (0) ?
1371 (3)	1371 (2)	1371 (1)	1369 (1)	1367 (1)
1408 (4)	1408 (2)	1408 (3)	1408 (3)	1408 (2)
1638 (6 dif)	*1638* (3 d f)	*1638* (4)	*1638* (4)	*1638* (4)
—	—	—	*1663* (1)	*1660* (3)
2954 (1)	2954 (0)	2956 (0)	2956 (0)	2954 (0)

(2) MANZONI, questi « Rendiconti », VII, 1, 669 (1940).

(3) GHIGI, CHIORBOLI, questi « Rendiconti », in corso di stampa.

Lo spettro Raman dell'α–acetilpirrolo è stato studiato sia in soluzione benzenica satura sia in soluzioni benzeniche più diluite, con concentrazione corrispondenti a frazioni molecolari di α–acetilpirrolo pari a 0,092 e 0,056 rispettivamente. È stata pure studiata una soluzione diluita di α–acetilpirrolo in soluzione metanolica alla concentrazione di 0,092, espressa sempre in frazione molecolare del composto.

TABELLA II.

Spettro Raman dell' N*–acetilpirrolo.*

Allo stato puro (Ghigi e Chiorboli 1951)	In soluz. benzenica (frazione mol. 0,307) (questo lavoro)	In soluz. benzenica (frazione mol. 0,078) (questo lavoro)	In soluz. metanolica (frazione mol. 0,218) (questo lavoro)
165 (2)	169 (1)	—	167 (1)
401 (2)	403 (1)	—	403 (1)
521 (2)	524 (1)	—	522 (1)
559 (1)	557 (0)	—	555 (1)
594 (1)	—	—	—
634 (3)	635 (2)	635 (1)	635 (2)
862 (2)	861 (1)	860 (0)	864 (2)
917 (4)	922 (3)	919 (1)	920 (3)
975 (3)	977 (2)	—	980 (2)
1027 (3)	1031 (2)	1031 (1)	1031 (2)
1082 (1)	1079 (0)	1083 (0)	1083 (1)
1135 (10)	1137 (8)	1136 (4)	1136 (8)
1299 (2)	1300 (1)	1302 (0)	1304 (1)
1319 (1)	—	—	—
1370 (1)	1372 (1)	—	—
1400 (4)	1401 (3)	1400 (1)	1399 (3)
1427 (1)	1424 (0)	—	1422 (1)
1464 (5)	1466 (4)	1465 (2)	1464 (4)
—	—	—	*1702* (3)
1716 (8)	*1716* (6)	*1719* (3)	*1719* (5)
2935 (3)	2935 (2)	—	2937 (2)
2982 (1)	—	—	2980 (1)
3021 (1)	—	—	3019 (1)
3118 (1)	—	—	3121 (1)
3154 (2)	3155 (1)	—	3156 (1)

L'N-acetilpirrolo è stato studiato in soluzioni benzeniche con concentrazioni 0,307 e 0,078 rispettivamente ed in soluzione metanolica alla concentrazione 0,218 (in frazioni molecolari).

I risultati sperimentali, ottenuti mediante le apparecchiature e la tecnica già descritte in precedenti e recenti nostri lavori, sono riassunti nelle due tabelle precedenti.

DISCUSSIONE DEI RISULTATI.

1° *Spettro Raman dell'α–acetilpirrolo.* – Le esperienze di cui riferiamo in questo lavoro ci mostrano che, sia in soluzione metanolica satura, sia in soluzione metanolica più diluita il gruppo C=O dell'α–acetilpirrolo si manifesta nello spettro Raman con una unica riga intensa e diffusa a 1638 cm^{-1} e cioè in posizione fortemente « anomala ».

In soluzione benzenica satura il gruppo C=O si manifesta pure per l'α–acetilpirrolo con una unica riga intensa la cui posizione coincide perfettamente con quella osservata negli spettri Raman delle soluzioni metanoliche dello stesso chetone.

Viceversa nelle soluzioni benzeniche più diluite accanto alla riga « anomala » del C=O a 1638 cm^{-1} circa appare una nuova riga a 1660–1663 cm^{-1} e cioè in una posizione caratterizzata da una frequenza che supera di circa 25 numeri d'onda quella della riga « anomala » già in precedenza stabilita. L'intensità relativa di questa riga aumenta con la diluizione della soluzione benzenica.

Dunque, allontanando le molecole dell'α–acetilpirrolo con un solvente « inerte », quale il benzolo, si osservano due righe del gruppo C=O anzichè una: e cioè una riga che coincide con quella già osservata nelle soluzioni metanoliche o nella soluzione benzenica satura ed una nuova riga in posizione « meno perturbata » ma ancora assai distante dalla riga « normale » del C=O dei chetoni alifatici.

Si può supporre che la riga a 1638 cm^{-1} corrisponda al gruppo C=O di molecole « associate » o fra di loro o con molecole dell'alcool solvente. Il mancato raddoppio della riga del C=O in soluzione metanolica diluita ci farebbe invero pensare ad una interazione tra il C=O dell'α-acetilpirrolo e le molecole del solvente. In soluzione benzenica diluita si renderebbero evidenti, accanto a molecole fra di loro associate intermolecolarmente, molecole non associate che presentano la riga Raman del gruppo C=O in posizione meno perturbata. Però resta il fatto che anche questa nuova riga a 1660 cm^{-1} circa deve essere attribuita ad un gruppo C=O assai perturbato, se pur in misura inferiore a quella corrispondente alle molecole « associate » che mostrano la riga Raman a 1638 cm^{-1}.

Per spiegare la perturbazione del C=O nelle molecole non associate, sempre seguendo il filo dell'ipotesi di lavoro da noi scelta, si dovrebbe pensare ad una intensa coniugazione che, con tutta probabilità, si verifica tra il gruppo C=O dell'α–acetilpirrolo ed il nucleo pirrolico stesso e cioè alla coniugazione con il sistema di elettroni p_z che caratterizzano le proprietà « aromatiche » del nucleo pirrolico.

Si nota invero che la posizione di 1663 cm^{-1} corrisponde ad una perturbazione assai più intensa di quella che non si osservi per esempio per il gruppo C=O dell'acetofenone che mostra, allo stato puro, una riga Raman a 1680 cm^{-1}, la quale si stabilizza, nelle soluzioni benzeniche diluite, a 1690 cm^{-1}, come abbiamo dimostrato in un precedente lavoro (4).

Stiamo a questo proposito eseguendo alcuni calcoli quanto-meccanici per studiare se una tale più intensa coniugazione possa eventualmente essere reclamata dalle teorie quanto-meccaniche della valenza, che oggi si invocano nei problemi di struttura molecolare.

2° *Spettro Raman dell' N-acetilpirrolo.* — Si è già ricordato che il gruppo C=O dell'N-acetilpirrolo mostra nello spettro Raman una intensa e caratteristica riga in posizione « normale » a 1716 cm^{-1}.

Le esperienze di cui riferiamo in questa Nota mostrano che in soluzioni benzeniche, anche diluite, questa riga si mantiene inalterata praticamente nella stessa posizione nella quale essa si trova nel composto allo stato puro. A differenza di quello che accade nel caso dell'α-acetilpirrolo l'allontanamento delle molecole dell'N-acetilpirrolo per mezzo di un solvente « inerte », quale è il benzolo, non porta ad alcun raddoppio o ad alcuno spostamento della riga caratteristica del C=O.

Viceversa lo spettro Raman di soluzioni metanoliche di N-acetilpirrolo mostra raddoppiata la riga caratteristica del gruppo C=O. Una delle componenti del raddoppio coincide con la riga « normale » del C=O del derivato pirrolico puro o diluito con benzolo, la seconda componente invece si mostra in una posizione « perturbata » più bassa di una ventina di numeri d'onda rispetto alla precedente e cioè a 1700 cm^{-1} circa. Ciò porterebbe a pensare che, mentre nell'N-acetilpirrolo allo stato puro o in soluzione benzenica le molecole del derivato pirrolico non sono associate, in soluzione metanolica si verifichino delle associazioni fra le stesse ed il solvente.

Il C=O perturbato di queste molecole plausibilmente associate con il solvente nella soluzione metanolica mostrerebbe una riga spostata di circa 20 numeri d'onda verso le più basse frequenze. Ma presso a poco questo spostamento è lo stesso che si riscontra nella posizione della riga del gruppo C=O dell'α-acetilpirrolo in soluzione metanolica (ed in genere dell'α-acetilpirrolo associato intermolecolarmente) rispetto alla riga del gruppo C=O delle molecole dello stesso α-acetilpirrolo in soluzione benzenica diluita, considerate come molecole non associate.

Le differenze di comportamento che noi abbiamo osservato nei casi analoghi dell'acetofenone e dell'aldeide benzoica ci suggeriscono l'opportunità di seguire uno studio parallelo tra il comportamento in soluzione dei derivati pirrolici (già presi in esame in questa Nota) e dell'aldeide pirrolica. Ma su questa nuova serie di esperienze riferiremo in un prossimo lavoro.

(4) Bonino, Chiorboli, « Memorie dell'Accademia delle Scienze di Bologna », in corso di stampa (1950).

Biologia. — *Potere germinativo dei tessuti somatici e germi embrionali nell'origine dei neoplasmi.* Nota (*) del Socio ACHILLE RUSSO.

Indipendente da quanto si discute, se i *blastomi* siano preceduti da proliferazioni cellulari o si sviluppino direttamente nei tessuti, con questa Nota si vuole soltanto rilevare che la causa del primo impulso alla moltiplicazione è il potere germinativo, comune alle cellule somatiche ed ai germi embrionali, e che essa non riguardi quella più complessa dell'origine della malignità.

Come fu cennato in Note precedenti (1), tale causa può essere identificata in alcuni caratteri, che sono propri agli elementi sessuali femminili, quali la eliminazione di una parte della sostanza nucleare e l'arricchimento del protoplasma.

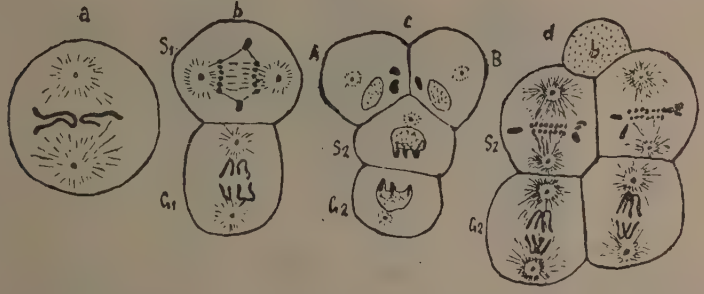


Fig. 1. – Stadi dello sviluppo di *Ascaris megalocephala univalens*, secondo Th. Boveri: *a*) ovo fecondato; *b*) divisione differenziale con eliminazione di sostanza nucleare dal blastomero somatico S_1; *c*) stadio successivo, i blastomeri somatici A e B hanno i nuclei a riposo e la sostanza nucleare, emessa nello stadio precedente, nel protoplasma; *d*) stadio a 4 blastomeri di ovo centrifugato: i due blastomeri somatici (S_2) in mitosi emettono la sostanza nucleare: i due germinativi G_1 e G_2.

È noto, difatti, che nel periodo precedente la formazione dei gameti, solo la originaria cellula sessuale femminile, l'*ovogonio*, al quale in prevalenza è dovuto lo sviluppo del nuovo organismo, compie i fenomeni di eliminazione e di arricchimento; ma, sopratutto, è notevole che gli stessi fenomeni si osservano nel periodo postgametico, quando l'embrione inizia il suo sviluppo, nei blastomeri, che, dopo la *divisione differenziale* della 1ª cellula embrionale, daranno origine ai tessuti del soma, com'è rappresentato nella figura annessa (fig. 1).

(*) Presentata nella seduta del 13 gennaio 1951.

(1) A. RUSSO, *Diminuzione cromatica nei blastomeri somatici di alcuni Metazoi e negl'individui equivalenti di un Ciliato.* « Rendic. Acc. Naz. Lincei », Roma 1949; Ibidem, *Ulteriori notizie sul potere germinativo del soma nei Metazoi e su le sue manifestazioni in relazione al ciclo biologico di un Ciliato.* « Atti Acc. Gioenia », Catania, 1950.

Il riconoscimento del potere germinativo nelle cellule dei tessuti somatici, derivato dalla comunanza con quelle germinali, come più volte si è detto [2], ha la più evidente dimostrazione nel ciclo di sviluppo di un organismo elementare, rappresentato nella fig. 2, dalla quale risulta che soltanto gl'individui di sesso fem-

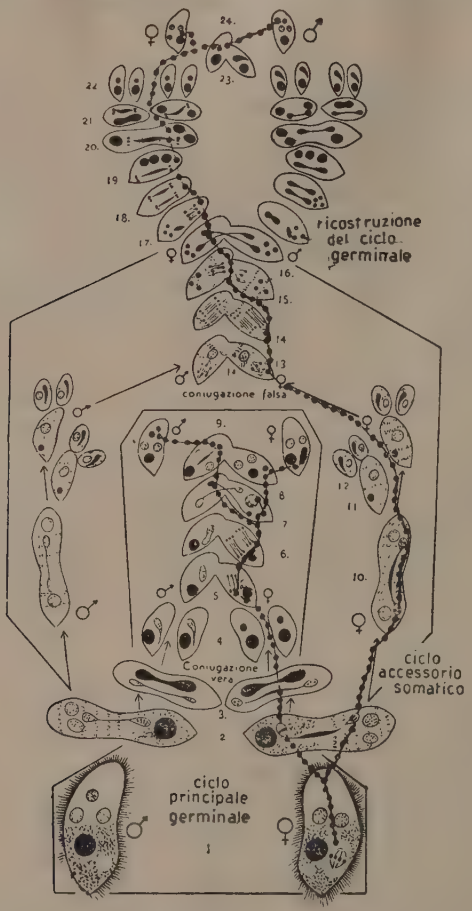


Fig. 2. - Ciclo evolutivo di *Cryptochilum echini* Mps., distinto in una parte *germinale*, una *somatica* ed una *ricostruttiva* derivata da quella *somatica* con la formazione di nuovi gameti e nuovi individui adulti. Dal n. 1 al 9 ciclo germinale, da 10 a 24 ricostruzione del ciclo germinale dagl'individui somatici, originati dalla *divisione differenziale* dell'individuo adulto femminile (n. 2).

minile, *germinali* e *somatici*, formatisi dopo la *divisione differenziale* (n. 2 della figura), compiono i fenomeni di eliminazione e di arricchimento e che da en-

(2) A. Russo, *Stadi del ciclo evolutivo di un Ciliato, loro individualità e rapporto con analoghe manifestazioni nei Metazoi*. «Rendic. Acc. dei XL», ser. III, vol. XXVII, Roma 1948.

trambi si producono nuovi gameti, che dànno origine a due distinti nuovi cicli biologici (3).

Tali fatti non solo confermano il significato biologico del fenomeno di arricchimento dell'elemento femminile, ma dimostrano che esso, essendo comune ad

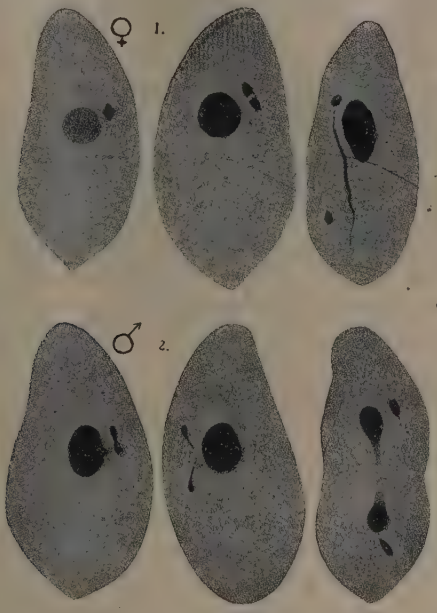


Fig. 3. – Seconda divisione per la formazione dei due gameti femminili (♀ 1) con divisione *mitotica* del nucleo sessuale *(micronucleo)* ed emissione di sostanza nucleare, e dei due gameti maschili (♂ 2) con *amitosi* e senza emissione. Essi, tratti da preparati colorati con *Ematossilina ferrica*, corrispondono ai numeri 3-4 10-11 della figura precedente. Ingr. 1-800.

organismi tanto lontani nella scala zoologica, rappresenti una delle manifestazioni primordiali della vita, nelle quali sono comprese le proprietà germinative del soma (4).

Per l'affinità con i fenomeni sopra cennati si ricorda che l'elemento femminile, con il suo potere germinativo, è la originaria manifestazione della sessualità con propria indipendenza, alla quale, come nel Ciliato ed in altre forme poco diffe-

(3) Per l'eliminazione di sostanza nucleare negl'individui femminili, nei diversi stadi del ciclo, si osservino le microfotografie, tratte dai preparati, nella tav. VII della Memoria: *Ciclo evolutivo di « Cryptochilum echini » Mps.* « Atti R. Acc. Naz. Lincei », 1930.

(4) A tali concetti s'ispirarono, mezzo secolo fa, gli esperimenti di arricchimento artificiale, adoperando un prodotto opoterapico con potere gonadotropo, la *Lecitina*, che determinò l'incremento dei nati di sesso femminile nella Coniglia (Cfr. *Modificazioni sperimentali dell'elemento epiteliale dell'ovaia dei Mammiferi.* « Atti Acc. Lincei », 1907; *Studien über die Bestimmung des Weiblichen Geschlectes.* Jena, Fischer, 1909). L'incremento del sesso femminile fu confermato in America e segnalato da BATTISTA GRASSI in: *I progressi della Biologia in Italia nell'ultimo cinquantennio.* « Acc. Lincei », Roma 1910.

renziate, è affidata la perpetuazione della specie, figurando l'elemento maschile da attivatore, che non prende parte all'*amfimissi* (5).

La causa della proliferazione neoplastica in origine fu riferita a germi embrionali annidatisi nei tessuti dell'adulto durante lo sviluppo. La concezione teorica fu in seguito avvalorata da casi particolari, nei quali furono riconosciuti elementi cellulari dell'embrione, residuati da organi destinati ad atrofizzarsi, che producono *tumori cordali*, *renali*, *branchiali* ed altri consimili.

Tali casi, non potendosi generalizzare, indussero a ricercare la causa della proliferazione preblastomatosa nello sviluppo delle prime cellule sessuali, che recenti studi avevano dimostrato non si formino per approfondimento delle cellule celomiche, che rivestono le *creste genitali* (Waldeyer 1870), ma per migrazione di cellule dell'area endodermica dell'embrione. Si è supposto, pertanto, che nel loro percorso per raggiungere la sede definitiva, alcuni elementi resterebbero indietro per far parte di altri tessuti e di proliferare, stimolati da agenti cancerigeni.

Non ostante però si sia dimostrato (Dantschakoff 1941) che le gonadi non si formino, cauterizzando l'area endodermica, ipotetico è il parziale arresto delle cellule sessuali primitive lungo il loro percorso.

Nei casi sopra cennati, se la funzione preblastomatosa dei germi embrionali fosse meglio documentata, potrebbe ritenersi anch'essi, essendo di origine somatica, partecipino al potere germinativo. Diversamente però dei casi anzidetti, ipotetico è quanto fu dedotto dalle *fecondazioni dispermiche*, ottenute da Boveri (1903–1910) nelle ova degli Echini, nelle quali, formandosi quattro *centri di attrazione*, i cromosomi si distribuiscono irregolarmente nei primi blastomeri per fornire ad alcuno di essi elementi precancerigeni; ed analogamente ipotetica è la causa della proliferazione, riferita alle *mutazioni*, non essendo sicuro se esse siano *geniche* o *somatiche* e se vi prendano parte i *geni* allineati (?) nei cromosomi.

Rimandando ai *Trattati* per i vari, complessi e discussi problemi relativi all'origine dei *neoplasmi*, in base alle attuali conoscenze morfologiche e comparative, si può dire che la proliferazione cellulare, che per lo più precede lo sviluppo dei tumori, derivi da causa organica fondamentale, il *potere germinativo* comune in tutti i tessuti somatici e nei germi embrionali, potere che è manifesto anche nelle cellule che producono direttamente alcuni *blastomi*, come i *melanomi* ed i *miomi*.

Il potere germinativo dei tessuti è sempre valido non ostante recentemente si sia osservato che i *melanoblasti* abbiano origine da germi embrionali della cresta neurale in alcuni Vertebrati per diffondersi dopo nelle aree *perineurali*, *pericelomiche*, *perivascolari* ed *epiteliali*. (Cfr. G. Du Shane, *Biology of Melanomas*. « Acad. Sciences », New York, 1948).

(5) Oltre ai casi di *Partenogenesi*, meglio documentati da Br. Monterosso in un Insetto *Troctes divinatorius* Müller (« Boll. Acc. Gioenia », Catania 1950), sono da rilevare le recenti ricerche di Mario Benazzi, che, in alcune *Planarie di acqua dolce*, osservò che lo spermio penetra nell'ovo e provoca l'emissione delle vescicole polari, ma non prende parte all'*amfimissi*, essendo espulso, determinandosi un caso di *eredità materna*. *Chromosoma* – Bd. 3, Heft 6–1950.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Geometria. — *Sulle varietà quasi–asintotiche.* – III. *Ancora sulle varietà subordinate.* Nota di GIACOMO SABAN, presentata (*) dal Socio E. BOMPIANI.

In questa terza parte, non prevista nello schema che mi ero inizialmente tracciato, ho voluto dare alcuni teoremi che mi serviranno altrove, per la classificazione delle varietà quasi–asintotiche a più indici (23), e che si riallacciano direttamente alle mie precedenti Note su questo argomento.

13. Scelti gli interi $k_1 > k_2 > k_3$ e $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$, consideriamo le varietà $V_{k_1}, V_{k_2}, V_{k_3}$ tali che V_{k_2} sia quasi–asintotica $\sigma^{i_{12}}_{Q_1, Q_2}$ a V_{k_1}, e V_{k_3} quasi–asintotica $\sigma^{i_{23}}_{Q_2, Q_3}$ a V_{k_2}: cercheremo di determinare una condizione sufficiente perchè V_{k_3} sia quasi–asintotica $\sigma^{i_{13}}_{Q_1, Q_3}$ di V_{k_1}, e di trovare una limitazione per la sua specie.

Posto

$$c_h = \binom{k_h + \rho_h}{\rho_h} - \binom{k_h + \rho_0}{\rho_0}$$

$$c_{hj} = \binom{k_h + \rho_h}{\rho_h} + \binom{k_j + \rho_j}{\rho_j} - \binom{k_h + \rho_0}{\rho_0} - \binom{k_j + \rho_h}{\rho_h} \quad (\rho_0 = 0\,,\ h < j)$$

$$i_{hj} = \binom{k_j + \rho_h}{\rho_h} - \binom{k_h + \rho_0}{\rho_0}$$

$$\tau_j = \binom{k_j + \rho_j - 1}{\rho_j - 1}$$

è noto (24) che c_h è la dimensione dello spazio $S^{k_h}(\rho_h)$, c_{hj} la dimensione dello spazio congiungente $S^{k_h}(\rho_h)$ con $S^{k_j}(\rho_j)$, nel caso che V_{k_h} sia una varietà subordinata generica di V_{k_j} e $\rho_h < \rho_j$, i_{hj} la dimensione dello spazio intersezione di questi due spazi nelle medesime ipotesi, e τ_j è il valore massimo della specie di una quasi–asintotica di dimensione k_j e secondo indice ρ_j. Fra queste quantità, le prime tre verificano alle relazioni

$$(3:1) \qquad c_{12} + i_{12} + c_3 = c_{23} + i_{23} + c_1 = c_{13} + i_{13} + c_2\,.$$

Dalle ipotesi poste all'inizio di questo paragrafo segue che (25)

$$\mathrm{Dim}\,[S^{k_2}(\rho_2) \cup S^{k_1}(\rho_1)] = c_{12} - t_{12} \quad ; \quad \mathrm{Dim}\,[S^{k_2}(\rho_2) \cap S^{k_1}(\rho_1)] = i_{12} + t_{12}$$

$$\mathrm{Dim}\,[S^{k_3}(\rho_3) \cup S^{k_2}(\rho_2)] = c_{23} - t_{23} \quad ; \quad \mathrm{Dim}\,[S^{k_3}(\rho_3) \cap S^{k_2}(\rho_2)] = i_{23} + t_{23}\,.$$

(*) Nella seduta del 13 gennaio 1951. – Continuazione delle Note omonime, apparse in questi «Rendiconti» vol. VIII, pp. 562–568 e vol. IX, pp. 55–61 (1950).

(23) Queste varietà sono state considerate da M. VILLA e G. VAONA in *Varietà quasi–asintotiche a più indici e curve caratteristiche di una trasformazione puntuale.* Questi «Rendiconti», ser. VIII, vol. VIII, pp. 470-476 (1950).

(24) Cfr. le formule (1 : 1) e (1 : 4) della 1ª parte della presente Nota.

(25) Le notazioni impiegate, dal significato d'altronde immediato, sono state introdotte nella 1ª parte della presente Nota.

Dunque, indicato con S_l un certo spazio lineare tale che sia

$$S_l \cap S^{k_2}(\rho_2) = \emptyset$$

si potrà scrivere

$$S^{k_3}(\rho_3) = [S^{k_3}(\rho_3) \cap S^{k_2}(\rho_2)] \cup S_l \subseteq S^{k_2}(\rho_2) \cup S_l$$

ed

$$l = c_3 - i_{23} - t_{23}.$$

Dunque ancora

$$\text{Dim}\,[S^{k_3}(\rho_3) \cup S^{k_1}(\rho_1)] \leq \text{Dim}\,[S^{k_2}(\rho_2) \cup S^{k_1}(\rho_1)] + \text{Dim}\,[S_l \cup S^{k_1}(\rho_1)]$$

cioè

$$\text{Dim}\,[S^{k_3}(\rho_3) \cup S^{k_1}(\rho_1)] \leq \text{Dim}\,[S^{k_2}(\rho_2) \cup S^{k_1}(\rho_1)] + \text{Dim}\,S_l$$

essendo già $S^{k_1}(\rho_1)$ contenuto nel primo addendo. Quindi

$$\text{Dim}\,[S^{k_3}(\rho_3) \cup S^{k_1}(\rho_1)] \leq c_{12} - t_{12} + c_3 - i_{23} - t_{23}.$$

Ma

$$c_{12} + i_{12} + c_3 = c_{13} + i_{13} + c_2$$

per cui si potrà infine scrivere

$$\text{Dim}\,[S^{k_3}(\rho_3) \cup S^{k_1}(\rho_1)] \leq c_{13} - [t_{12} + t_{23} + i_{12} + i_{23} - i_{13} - c_2].$$

Ne risulta che se $t_{12} + t_{23}$ verifica la ineguaglianza

$$(3:2) \qquad t_{12} + t_{23} > c_2 + i_{13} - i_{12} - i_{23}$$

la V_{k_3} è una quasi-asintotica $\sigma_{\varrho_1,\varrho_3}$ di V_{k_1}. In tal caso deve essere

$$t_{13} \geq t_{12} + t_{23} + i_{12} + i_{23} - i_{13} - c_2$$

ma dovendo inoltre sussistere anche l'ineguaglianza

$$t_{13} \leq \tau_3$$

perchè la V_{k_3} sia una quasi-asintotica di V_{k_1} di specie t_{13} e di indici ρ_1 e ρ_3, $t_{12} + t_{23}$ dovrà ancora verificare la condizione

$$(3:3) \qquad t_{12} + t_{23} \leq \tau_3 + c_2 + i_{13} - i_{12} - i_{23}.$$

Concludendo: *data una varietà* V_{k_1} *di cui la varietà* V_{k_2} *sia una quasi-asintotica* $\sigma^{t_{12}}_{\varrho_1,\varrho_2}$, *e la varietà* V_{k_3}, *quasi-asintotica* $\sigma^{t_{23}}_{\varrho_2,\varrho_3}$ *della varietà* V_{k_2}:

1) *condizione sufficiente perchè* V_{k_3} *sia una varietà quasi-asintotica* $\sigma^{t_{12}}_{\varrho_1,\varrho_3}$ *di* V_{k_1} *è che* $t_{12} + t_{23}$ *soddisfi alla doppia condizione*

$$c_2 + i_{13} - i_{12} - i_{23} < t_{12} + t_{23} \leq \tau_3 + c_2 + i_{13} - i_{12} - i_{23};$$

2) *condizione sufficiente perchè* V_{k_3} *sia una varietà quasi-asintotica* $\sigma_{\varrho_1,\varrho_3}-\lambda$ *di* V_{k_1} *è che* $t_{12}+t_{23}$ *verifichi alla unica condizione*

$$t_{12}+t_{23} > c_2+i_{13}-i_{12}-i_{23}\,.$$

14. Supponiamo ora che V_{k_1} sia una quasi-asintotica $\sigma^{t_{12}}_{\varrho_1,\varrho_2}$ di V_{k_1} e V_{k_3} una quasi-asintotica $\sigma^{t_{13}}_{\varrho_1,\varrho_3}$ di V_{k_1}: come prima, $\rho_1<\rho_2<\rho_3$: come si esprime la condizione sufficiente perchè V_{k_3} sia una quasi-asintotica $\sigma^{t_{23}}_{\varrho_2,\varrho_3}$ di V_{k_2}, supposto che la varietà V_{k_2} passi per la varietà V_{k_3}?

Sempre con le notazioni del numero precedente, in virtù delle ipotesi, possiamo scrivere

$$\mathrm{Dim}\,[S^{k_2}(\rho_2)\cup S^{k_1}(\rho_1)]=c_{12}-t_{12}\quad;\quad \mathrm{Dim}\,[S^{k_2}(\rho_2)\cap S^{k_1}(\rho_1)]=i_{12}+t_{12}$$

$$\mathrm{Dim}\,[S^{k_3}(\rho_3)\cup S^{k_1}(\rho_1)]=c_{13}-t_{13}\quad;\quad \mathrm{Dim}\,[S^{k_3}(\rho_3)\cap S^{k_1}(\rho_1)]=i_{13}+t_{13}$$

e, come prima, indicato con S_m un certo spazio lineare tale che sia

$$S_m\cap S^{k_1}(\rho_1)=\varnothing$$

sarà possibile scrivere

$$S^{k_3}(\rho_3)=[S^{k_3}(\rho_3)\cap S^{k_1}(\rho_1)]\cup S_m\subseteq S^{k_1}(\rho_1)\cup S_m$$

dove m è

$$m=c_3-i_{13}-t_{13}\,.$$

Allora

$$S^{k_3}(\rho_3)\cup S^{k_2}(\rho_2)\subseteq[S^{k_1}(\rho_1)\cup S^{k_2}(\rho_2)]\cup[S_m\cup S^{k_2}(\rho_2)]$$

e quindi, come per il ragionamento del n. 13,

$$\mathrm{Dim}\,[S^{k_3}(\rho_3)\cup S^{k_2}(\rho_2)]\leq \mathrm{Dim}\,[S^{k_1}(\rho_1)\cup S^{k_2}(\rho_2)]+\mathrm{Dim}\,S_m$$

cioè

$$\mathrm{Dim}\,[S^{k_3}(\rho_3)\cup S^{k_2}(\rho_2)]\leq c_{12}-t_{12}+c_3-i_{13}-t_{13}\,.$$

Ma di nuovo

$$c_{12}+i_{12}+c_3=c_{23}+i_{23}+c_1$$

per cui si trova infine

$$\mathrm{Dim}\,[S^{k_3}(\rho_3)\cup S^{k_2}(\rho_2)]\leq c_{23}-[t_{12}+t_{13}+i_{12}+i_{13}-i_{23}-c_1]\,.$$

Con considerazioni del tutto analoghe a quelle del n. 13, si giunge ai seguenti teoremi:

Data una varietà V_{k_1} *di cui le varietà* V_{k_2} *e* V_{k_3} *siano varietà quasi-asintotiche* $\sigma^{t_{12}}_{\varrho_1,\varrho_2}$ *e* $\sigma^{t_{13}}_{\varrho_1,\varrho_3}$, *supposto che la varietà* V_{k_3} *sia una varietà subordinata della varietà* V_{k_2}:

1) *condizione sufficiente perchè* V_{k_3} *sia una varietà quasi-asintotica* $\sigma^{t_{23}}_{\varrho_2,\varrho_3}$ *di* V_{k_2} *è che* $t_{12}+t_{13}$ *soddisfi alla doppia condizione*

$$c_1+i_{23}-i_{12}-i_{13}<t_{12}+t_{13}\leq\tau_3+c_1+i_{23}-i_{12}-i_{13}\,;$$

2) *condizione sufficiente perchè* V_{k_3} *sia una varietà quasi–asintotica* $\sigma_{\varrho_2,\varrho_3-\mu}$ *di* V_{k_2} *è che* $t_{12}+t_{13}$ *soddisfi alla unica condizione*

$$t_{12}+t_{13} > c_1+i_{23}-i_{12}-i_{13}.$$

15. Estendiamo anzitutto una definizione dovuta al Villa [26], e conveniamo di dire che una varietà V_{k_2}, subordinata ad una varietà V_{k_1}, ha una *striscia quasi–asintotica* k_3*–dimensionale, di indici* ϱ_1, ϱ_2 alla V_{k_1} se in ogni punto di una varietà k_3–dimensionale subordinata di V_{k_2} gli spazi osculatori $S^{k_2}(\varrho_2)$ ed $S^{k_1}(\varrho_1)$ $(\varrho_1 < \varrho_2)$ hanno uno spazio congiungente di dimensione inferiore a quella che generalmente loro compete.

Consideriamo ora una varietà V_{k_1} ed una sua varietà subordinata V_{k_2}, e supponiamo che una varietà subordinata a tutte e due, la varietà V_{k_3}, sia quasi–asintotica $\sigma^{12}_{\varrho_1,\varrho_3}$ di V_{k_1} e $\sigma^{23}_{\varrho_2,\varrho_3}$ di V_{k_2}. Determineremo ora una condizione sufficiente perchè lungo la V_{k_3} la V_{k_2} abbia una striscia quasi–asintotica (ovviamente k_3–dimensionale) alla V_{k_1}, di indici ϱ_1 e ϱ_2.

Di nuovo, mediante un ben determinato spazio lineare S_n, è possibile decomporre, in ciascun punto della V_{k_3}, lo spazio $S^{k_2}(\varrho_2)$ in modo che

$$S^{k_2}(\varrho_2) = [S^{k_2}(\varrho_2) \cap S^{k_3}(\varrho_3)] \cup S_n \subseteq S^{k_3}(\varrho_3) \cup S_n$$

ed

$$S_n \cap S^{k_3}(\varrho_3) = \emptyset,$$

essendo inoltre

$$n = c_2 - i_{23} - t_{23}$$

poichè è

$$\mathrm{Dim}\,[S^{k_2}(\varrho_2) \cap S^{k_3}(\varrho_3)] = i_{23} + t_{23}.$$

Ma, per ipotesi

$$\mathrm{Dim}\,[S^{k_1}(\varrho_1) \cup S^{k_3}(\varrho_3)] = c_{13} - t_{13};$$

quindi, nei punti della V_{k_3},

$$\mathrm{Dim}\,[S^{k_1}(\varrho_1) \cup S^{k_2}(\varrho_2)] \leq \mathrm{Dim}\,[S^{k_1}(\varrho_1) \cup S^{k_3}(\varrho_3)] +$$

$$+ \mathrm{Dim}\,S_n \leq c_{13} - t_{13} + c_2 - i_{23} - t_{23}.$$

Avendosi però

$$c_{13} + i_{13} + c_2 = c_{12} + i_{12} + c_3$$

si ha ancora

$$\mathrm{Dim}\,[S^{k_1}(\varrho_1) \cup S^{k_2}(\varrho_2)] \leq c_{12} - [t_{13} + t_{23} + i_{13} + i_{23} - i_{12} - c_3].$$

(26) Cfr. la definizione di striscia quasi–asintotica ad una dimensione, data da M. Villa nella Memoria: *Sulle trasformazioni puntuali degeneri*. « Mem. Accad. Sc. Bologna », ser. IX, vol. IX, p. 19 (1942).

Poichè, nonostante la differenza che vi è fra esse, la nozione di specie si estende di per sé dalle varietà alle striscie quasi-asintotiche, i ragionamenti del n. 13 si possono applicare a queste: si perviene quindi al seguente teorema:

Data una varietà V_{k_1} *ed una sua varietà subordinata* V_{k_2} *sia una varietà* V_{k_3} *quasi-asintotica* $\sigma^{t_{13}}_{Q_1,\varrho_3}$ *di* V_{k_1} *e* $\sigma^{t_{23}}_{Q_2,\varrho_3}$ *di* V_{k_2}:

1) *condizione sufficiente perchè la* V_{k_2} *abbia, lungo la* V_{k_3}, *una striscia quasi-asintotica alla* V_{k_1} *di indici* ϱ_1 *e* ϱ_2, *è che* $t_{13} + t_{23}$ *soddisfi alla doppia condizione*

$$c_3 + i_{12} - i_{13} - i_{23} < t_{13} + t_{23} \leqq \tau_2 + c_3 + i_{12} - i_{13} - i_{23};$$

2) *condizione sufficiente perchè la* V_{k_2} *abbia, lungo la* V_{k_3}, *una striscia quasi-asintotica alla* V_{k_1} *di indici* ϱ_1 *e* $\varrho_2 - \nu$, *è che* $t_{13} + t_{23}$ *soddisfi alla unica condizione*

$$t_{13} + t_{23} > c_3 + i_{12} - i_{13} - i_{23}.$$

Analisi. — *Sulle proprietà di minimo e di massimo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali lineari del secondo ordine di tipo ellittico.* Nota di CARLO MIRANDA, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

Sia

$$E[u] = a_{11}\,u_{xx} + 2\,a_{12}\,u_{xy} + a_{22}\,u_{yy} + b_1\,u_x + b_2\,u_y + cu$$

un operatore differenziale lineare di tipo ellittico-parabolico, cioè tale che i suoi coefficienti siano funzioni definite in ogni punto di un insieme aperto A, ivi verificanti la relazione

$$a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2 \geqq 0,$$

e sia $f(x, y)$ una funzione parimenti definita in A. Una soluzione $u(x, y)$ dell'equazione $E[u] = f$ si dirà *regolare* in A se essa è continua in A insieme con le sue derivate parziali prime e seconde.

Sono ben noti (1) i teoremi:

I. *Se è in* A: $c < 0$, $f(x, y) \leqq 0$ $[f(x, y) \geqq 0]$ *oppure* $c \leqq 0$, $f(x, y) < 0$ $[f(x, y) > 0]$, *ogni soluzione regolare dell'equazione* $E[u] = f$ *non può avere in alcun punto di* A *un minimo relativo negativo* [*un massimo relativo positivo*].

II. *Sia* A *limitato e sia* $u(x, y)$ *una soluzione regolare in* A *dell'equazione* $E[u] = 0$, *continua in* $A + \mathfrak{F}A$. *Se è* $c < 0$ *si ha in* A

$$|u| < \max_{\mathfrak{F}A} |u|,$$

mentre se è $c \leqq 0$, $a_{11} > 0$ *e* b_1/a_{11} *limitato superiormente si ha in* A:

$$|u| \leqq \max_{\mathfrak{F}A} |u|.$$

(*) Nella seduta del 10 febbraio 1951.

(1) Cfr. M. PICONE, *Appunti di Analisi superiore*, pp. 694-697 [1ª ed., A. Rondinella, Napoli 1940].

III. *Sia* A *limitato e sia* $u(x, y)$ *una soluzione regolare in* A *dell'equazione* $E[u] = 0$, *continua in* $A + \mathfrak{F}A$. *Se è* $c \equiv 0$ *riesce in* A

$$\min_{\mathfrak{F}A} u \leqq u(x, y) \leqq \max_{\mathfrak{F}A} u.$$

Scopo della presente Nota è di mostrare come, limitatamente alle sole equazioni di tipo ellittico, i precedenti teoremi possano essere notevolmente perfezionati, ammettendo qualche ipotesi lievemente più restrittiva sui coefficienti della $E[u]$.

Se infatti si ammette che, per ogni porzione limitata di A, si possono determinare due numeri α e β tali da risultare:

$$(1) \qquad a_{11} a_{22} - a_{12}^2 \geqq \alpha > 0,$$

$$(2) \qquad |a_{11}| + |a_{12}| + |a_{22}| + |b_1| + |b_2| + |c| \leqq \beta$$

sussistono i seguenti teoremi [2]:

I'. *Se è in* A : $c \leqq 0$, $f \leqq 0$ [$f \geqq 0$], *ogni soluzione regolare dell'equazione* $E[u] = f$, *non può avere in alcun punto* P_0 *di* A *un minimo relativo negativo* [*un massimo relativo positivo*] *senza ridursi a una costante in un intorno circolare di* P_0 [3].

II'. *Sia* A *limitato e connesso e sia* $u(x, y)$ *una soluzione regolare in* A *dell'equazione* $E[u] = 0$, *continua in* $A + \mathfrak{F}A$. *Se è:* $c \leqq 0$, *la* $u(x, y)$ *non può avere in alcun punto* P_0 *di* A *nè un minimo relativo negativo, nè un massimo relativo positivo, senza ridursi ad una costante in un intorno circolare di* P_0; *inoltre, se la* $u(x, y)$ *non è costante in* A [4], *riesce in* A:

$$(3) \qquad |u| < \max_{\mathfrak{F}A} |u|.$$

III'. *Nelle stesse ipotesi del teorema precedente e se è* $c \equiv 0$, *la* $u(x, y)$ *non può avere in alcun punto* P_0 *di* A *nè un minimo relativo, nè un massimo relativo, senza ridursi ad una costante in un intorno di* P_0; *inoltre, se la* u *non è costante in* A, *si ha in tutto* A:

$$(4) \qquad \min_{\mathfrak{F}A} u < u < \max_{\mathfrak{F}A} u.$$

Cominciamo con l'osservare che i teoremi II' e III' sono facili corollari del teorema I'.

Per quanto riguarda il teorema II' è ovvio infatti, in conseguenza del teorema I', che la $u(x, y)$ non può avere in alcun punto P_0 di A un minimo relativo negativo o un massimo relativo positivo senza ridursi ad una costante in un intorno di P_0. Dopo ciò resta ancora da dimostrare che, se la (3) non è verificata, la $u(x, y)$ è costante in A. Per questo osserviamo che, se la (3) non è verificata, la funzione $|u|$ assume il suo massimo valore, diciamo μ, in almeno

(2) L'estensione al caso di più variabili non presenterebbe difficoltà. Ciò non può dirsi invece degli analoghi teoremi dimostrati dal Lichtenstein [« Rend. Palermo », *33*, pp. 201-211 (1912)] nell'ipotesi che i coefficienti di $E[u]$ abbiano derivate terze continue, in quanto tale A. si vale della riduzione a forma canonica dell'equazione.

(3) Caso, quest'ultimo, che può verificarsi solo se in un intorno di P_0 è: $c \equiv f \equiv 0$.

(4) Caso questo che può verificarsi solo se è in A: $c \equiv 0$.

un punto P_0 di A. Se, tanto per fissare le idee, supponiamo che sia $\mu = u(P_0)$, la $u(x, y)$ presenta nel punto P_0, e in ogni altro punto P di A in cui risulti $u(P) = \mu$, un massimo relativo positivo. Per la prima parte del teorema l'insieme B dei punti P di A per i quali risulta $u(P) = \mu$ è, perciò, aperto. E poichè il derivato di B, per la continuità della u, è contenuto in $A + \mathfrak{F}A$ ed A è connesso, ne segue facilmente, con un noto ragionamento, che $B \equiv A$ e quindi che la $u(x, y)$ è costante in A.

Per dimostrare poi il teorema III' basta osservare che, se la $u(x, y)$ ha in P_0, per esempio, un minimo relativo, la funzione $v(P) = u(P) - u(P_0) - 1$ ha in P_0 un minimo relativo negativo e poichè, essendo $c \equiv 0$, si ha $E[v] = 0$, la $v(x, y)$, e quindi anche la $u(x, y)$, è, per il teorema II', costante in un intorno di P_0. Dopo ciò la dimostrazione procede come nel caso del teorema II'.

Resta dunque da dimostrare soltanto il teorema I' e per questo procediamo per assurdo supponendo che, risultando $f(x, y) \leqq 0$, la $u(x, y)$ abbia in un punto P_0, per semplicità l'origine, un minimo relativo negativo m:

$$(5) \qquad m < 0 \quad , \quad u(0, 0) = m \leqq u(x, y) \qquad \text{per} \qquad x^2 + y^2 \leqq r_0^2$$

e che la $u(x, y)$ non sia costante nel cerchio C_0 di centro P_0 e raggio r_0. Esisterà allora in C_0 almeno un punto P_1, e sia per fissare le idee il punto $(r, 0)$, tale che, con $0 \leqq \alpha < 1$ risulti

$$(6) \qquad u(P_1) = u(r, 0) = \alpha m > m.$$

Detto C il cerchio di centro P_0 e raggio r, si potrà trovare un arco γ di $\mathfrak{F}C$ col centro nel punto P_1, tale che risulti

$$(7) \qquad u(x, y) \geqq \frac{1 + \alpha}{2} m \qquad \text{su } \gamma.$$

Se $Q_1(r \cos \sigma, r \operatorname{sen} \sigma)$ e $Q_2(r \cos \sigma, -r \operatorname{sen} \sigma)$ sono gli estremi di γ e se com'è lecito, supponiamo $0 < \sigma < \pi/2$, l'ellisse di equazione

$$\varphi(x, y) = (x - r)^2 + \frac{2 \cos \sigma - \cos^2 \sigma}{\operatorname{sen}^2 \sigma} y^2 = r^2$$

passerà per i punti Q_1, Q_2 e P_0. L'arco $\mathfrak{F}C - \gamma$ sarà perciò esterno a detta ellisse e pertanto, posto

$$\omega_k(x, y) = 1 + \frac{1}{k}\left[e^{-k r^2} - e^{-k \varphi(x, y)}\right] \qquad (k > 0)$$

sarà

$$\omega_k(x, y) \geqq 1 \qquad \text{su} \quad \mathfrak{F}C - \gamma,$$

da cui

$$(8) \qquad \frac{u(x, y)}{\omega_k(x, y)} \geqq m \qquad \text{su} \quad \mathfrak{F}C - \gamma.$$

D'altra parte, essendo uniformemente in C:

$$(9) \qquad \lim_{k \to \infty} \omega_k(x, y) = 1,$$

si può determinare un k_0 tale che per $k > k_0$ sia

$$\omega_k(x, y) > \frac{1+\alpha}{2}. \tag{10}$$

Dalle (7) e (10) segue che, per $k > k_0$, la (8) è verificata anche su γ e quindi, posto

$$v_k(x, y) = \frac{u(x, y)}{\omega_k(x, y)},$$

si ha

$$v_k(x, y) \geqq m \qquad \text{su } \mathfrak{F}C,$$

mentre è anche, ovviamente

$$v_k(0, 0) = m.$$

Per $k > k_0$ la $v_k(x, y)$ ha dunque nell'interno di C un punto di minimo $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$, in cui essa assume valore non superiore ad m:

$$v_k(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \leqq m.$$

Ora si ha in tal punto

$$v_k < 0 \quad , \quad \frac{\partial v_k}{\partial x} = \frac{\partial v_k}{\partial y} = 0 \quad , \quad v_k[\mathrm{E}[\omega_k] - c\,\omega_k] + \omega_k \mathrm{E}[v_k] = f \leqq 0$$

e poichè, per il teorema II, deve risultare $\mathrm{E}[v_k] \geqq 0$, si ha in definitiva che nel punto $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$ riesce:

$$\mathrm{E}[\omega_k] - c\,\omega_k \geqq 0.$$

Esplicitando quest'ultima relazione si trova:

$$2k[a_{11}(\bar{x}_k - r)^2 + 2a_{12}\lambda\bar{y}_k(\bar{x}_k - r) + a_{22}\lambda^2\bar{y}_k^2] \leqq a_{11} + \lambda a_{22} + b_1(\bar{x}_k - r) + b_2\lambda\bar{y}_k \tag{11}$$

avendo posto

$$\lambda = \frac{2\cos\sigma - \cos^2\sigma}{\operatorname{sen}^2\sigma}.$$

Dalla (11), in forza delle (1) e (2), segue ovviamente:

$$\lim_{k\to\infty} \bar{x}_k = r \quad , \quad \lim_{k\to\infty} \bar{y}_k = 0$$

e dopo ciò dalla relazione:

$$u(\bar{x}_k, \bar{y}_k) = v_k(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\,\omega_k(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \leqq m\,\omega_k(\bar{x}, \bar{y})$$

si trae per $k \to \infty$ e tenendo conto della (9):

$$u(r, 0) \leqq m,$$

ciò che contraddice la (6); di qui il teorema.

Si noti che dalla dimostrazione svolta segue che, se la u ha un minimo negativo nel punto P_0, essa risulta costante in ogni intorno di P_0 in cui riesca $u \geqq u(P_0)$.

Meccanica. — *Le equazioni di seconda approssimazione nella nuova teoria relativistica unitaria di Einstein.* Nota II di PAOLO UDESCHINI, presentata (*) dal Corrisp. B. FINZI.

3. CAMPO UNITARIO STATICO. – Dalle (6) della Nota I deduciamo le equazioni della statica unitaria, per le regioni vuote dello spazio, ponendo accanto alle condizioni ordinariamente poste per la statica einsteiniana nella teoria della gravitazione, l'ulteriore condizione che anche la parte emisimmetrica del tensore fondamentale, il cui coniugato è costituito dal tensore elettromagnetico, sia funzione soltanto delle coordinate spaziali (campo elettromagnetico stazionario).

Precisamente sia $g_{ik} = g_{ik}(x^1\, x^2\, x^3)$, la metrica spazio-temporale si presenti sotto la forma:

$$ds^2 = g_{00}\, dx^{0^2} + \sum_1^3{}_{\mu\nu}\, g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu = g_{00}\, dx^{0^2} - dl^2$$

dove $dl^2 = -\sum_1^3{}_{\mu\nu}\, g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$ dà la metrica dello spazio geometrico tridimensionale.

Il coefficiente g_{00} risulta legato alla velocità della luce V dalla relazione $V = c\sqrt{g_{00}}$, con c costante.

La statica einsteiniana della gravitazione ci offre una semplice soluzione di prima approssimazione atta a fornire la parte simmetrica del tensore b_{ik}: la seguente (1):

$$13)\quad \begin{cases} ds^2 = (1-2\gamma)\, dx^{0^2} - (1+2\gamma)(dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2}) \qquad \Delta\gamma = \sum_1^3{}_{\mu\nu}\, a^{\mu\nu}\, \gamma_{,\mu\nu} = 0 \\ g_{00} = a_{00} + b_{00} = 1 - 2\gamma \quad g_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} + b_{\mu\nu} = a_{\mu\nu}(1+2\gamma) \qquad (\mu\nu = 1, 2, 3) \\ b_{00} = -2\gamma \qquad b_{\mu\nu} = 2\gamma\, a_{\mu\nu} \qquad V = c(1-\gamma) \qquad \Delta V = -c\,\Delta\gamma = 0. \end{cases}$$

Le (13) ci permettono di scrivere le equazioni della statica unitaria di seconda approssimazione in modo da poter calcolare i divari di 2° ordine in funzione dei g_{ik} noti di prima approssimazione, oltre che degli elementi emisimmetrici di prima approssimazione riguardanti il campo elettromagnetico.

La prima approssimazione permette, com'è noto, di spiegare lo spostamento verso il rosso delle righe spettrali e la deflessione dei raggi luminosi per effetto di un campo gravitazionale. Essa non porta però alcuna differenza fra la legge di movimento di un pianeta conforme alla teoria newtoniana e quella conforme alla teoria einsteiniana. Per notare in tale legge una differenza fra i risultati delle due teorie, classica e relativistica, bisogna spingersi ad una ulteriore approssimazione. È infatti ben noto che soltanto in seconda approssimazione i pianeti presentano uno spostamento secolare del perielio nel loro movimento attorno al sole.

E che cosa avviene nella statica unitaria? Il campo elettromagnetico influisce sul moto dei pianeti? Influisce sulla velocità della luce?

(*) Nella seduta del 9 dicembre 1950.

(1) Cfr. ad esempio, LEVI-CIVITA, *Fondamenti di meccanica relativistica*; Bologna 1928.

Per calcolare tale influenza basta determinare (come si fa in relatività generale) la seconda approssimazione per g_{00}, ossia per V^2/c^2, mentre ci si può accontentare della prima approssimazione per i coefficienti del dl^2 spaziale [2].

4. Velocità della luce. – Per calcolare g_{00} e quindi la velocità della luce, basta tener presenti le (13) nonchè le ipotesi poste per la statica unitaria, e calcolare da (11) il c_{00} che dà appunto il termine di seconda approssimazione per g_{00} e di conseguenza anche la seconda approssimazione per la velocità della luce. Si ha:

$$c_{00},_j{}^j = -2a^{js}(b_{\underset{\vee}{r}0}\,\Gamma^r_{(j0)} + b_{\underset{\vee}{0}r}\,\Gamma^r_{(0j)} + b_{\underline{rj}}\,\Gamma^r_{(00)}),_s - 2\Gamma^s_{(0r)}\Gamma^r_{(s0)} + 2\Gamma^s_{(00)}\Gamma^r_{(\underline{sr})}$$

dove gli indici di derivazione assumono i valori 1, 2, 3. Dopo alcuni calcoli, si ottiene (per (13) e (1)):

$$c_{00},_j{}^j = 4a^{sr}\gamma,_s\gamma,_r - b_{\underset{\vee}{0}}{}^r,_s(b_{\underset{\vee}{0}r},_s + b_{\underset{\vee}{0}s},_r) \tag{14}$$

quindi a meno di una funzione armonica nello spazio geometrico

$$c_{00} = 2\gamma^2 + c^*_{00} \tag{15}$$

dove c^*_{00} è soluzione dell'equazione:

$$c^*_{00},_{js}\,a^{js} = -a^{jr}a^{ks}\,b_{\underset{\vee}{0}j},_k(b_{\underset{\vee}{0}r},_s + b_{\underset{\vee}{0}s},_r). \tag{16}$$

Identificando ${}^*g_{\underset{\vee}{ik}} = 1/2\,\varepsilon_{ikrs}\,g^{\underset{\vee}{rs}}$ col tensore elettromagnetico $F_{\underset{\vee}{ik}}$ e ricordando che $F_{23} = H_1$, $F_{31} = H_2$, $F_{12} = H_3$ dove H_i rappresenta il campo magnetico, si ha:

$$\Delta c^*_{00} = \frac{1}{2}(H_{i,k} + H_{k,i})(H^{i,k} + H^{k,i}) \tag{17}$$

dove Δ rappresenta l'operatore di Laplace nello spazio geometrico tridimensionale [3]. c^*_{00} soddisfa ad un'equazione di Poisson, dove il secondo membro, che dipende soltanto dal campo magnetico, è (a meno d'un fattore numerico) l'invariante quadratico della parte simmetrica del tensore derivato del campo magnetico.

Pertanto la teoria unitaria, nell'approssimazione considerata, dà per g_{00} e per la velocità V della luce le espressioni:

$$g_{00} = 1 - 2\gamma + 2\gamma^2 + c^*_{00} \qquad V = c\left(1 - \gamma + \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{1}{2}\,c^*_{00}\right). \tag{18}$$

Esse sono quelle stesse dell'ordinaria statica relativistica della gravitazione [4], con l'aggiunta del nuovo termine correttivo c^*_{00} che reca il contributo del campo magnetico alla determinazione della velocità della luce, quindi anche alla determinazione del movimento dei pianeti attorno al sole.

(2) Cfr., ad esempio, Levi-Civita loco citato.

(3) Essendo Δ applicato ad un elemento del secondo ordine, esso, nell'approssimazione considerata, è il medesimo sia se calcolato nello spazio euclideo di tensore fondamentale a_{ik}, sia se valutato nello spazio non riemanniano di tensore fondamentale $a_{ik} + b_{ik}$. Così pure le derivate del campo magnetico che compaiono a secondo membro della (17) possono essere sostituite, nell'approssimazione considerata, da derivate tensoriali, così che la (17) assume veste tensoriale.

(4) Cfr. ad esempio Levi-Civita, loco citato.

Dunque la velocità della luce e i pianeti nel loro movimento sono influenzati non soltanto dal campo gravitazionale, ma anche da quello magnetico. Qualora si prescinda da quest'ultimo, quindi si ritenga $g_{ik} = 0$, c^*_{00} si riduce a una funzione armonica e perciò l'espressioni di g_{00} e di V sono quelle stesse della teoria della gravitazione: $g_{00} = 1 - 2\gamma + 2\gamma^2$ $V = c(1 - \gamma + 1/2\,\gamma^2)$, come del resto si può verificare direttamente partendo dalle equazioni (11′) che danno $c'_{00} = 2\gamma^2$.

Mentre nella teoria relativistica gravitazionale la velocità della luce, nelle regioni vuote dello spazio, è rigorosamente armonica, nella teoria unitaria la velocità della luce è armonica in prima approssimazione, ma non lo è più in seconda approssimazione. Infatti calcoliamo il laplaciano unitario ΔV in seconda approssimazione

$$(19) \qquad \Delta V = \underset{+}{V_{/ik}}\, g^{ik} = \underset{+}{V_{/ik}}\,(a^{ik} - b^{ki}) = \underset{+}{V_{/ik}}\, a^{ik} - V_{,ik}\, b^{ki} \text{ (5)}$$

tenendo presente che in seconda approssimazione $\underset{+}{V_{/ik}} = V_{,ik} - V_{,s}\, L^s_{(k)}$, $\underset{-}{V_{/ik}} = V_{,ik} - V_{,s}\, L^s_{(ki)}$:

$$\Delta V = \underset{+}{V_{/ik}}\, g^{ik} = \underset{-}{V_{/ik}}\, g^{ik} = (V_{,ik} - V_{,s}\, L^s_{(ik)})\, a^{ik} - V_{,ik}\, b^{ki}.$$

Poichè in seconda approssimazione $\Delta(1 - \gamma + 1/2\,\gamma^2) = 0$ e $\Delta c^*_{00} = -c^*_{00,i}{}^{i}$

$$(20) \qquad \Delta V = \frac{1}{2} c \Delta c^*_{00} = \frac{c}{4}(H_{i/k} + H_{k/i})(H^{i/k} + H^{k/i}) = c\, \underset{-}{H_{i/k}}\, \underset{-}{H^{k/i}}.$$

La velocità della luce in seconda approssimazione soddisfa dunque ad un'equazione di Poisson, dove il secondo membro è un'invariante quadratico tratto dal tensore derivato del campo magnetico.

Manifesta è l'influenza del campo elettromagnetico nella determinazione del campo gravitazionale. È pure manifesta l'influenza del campo gravitazionale nella determinazione degli elementi elettromagnetici. Così ad esempio dall'equazione $\Gamma_i = 0$, tradotta dalla (10) o (10′) di seconda approssimazione, con facili calcoli, ricordando le (13), si ottiene:

$$(21) \qquad \underset{\vee}{c_{0s}}{}^{,s} = 2\, \underset{\vee}{b_{0s}}\, V^{,s} \qquad \underset{\vee}{c_{is}}{}^{,s} = -2\, \underset{\vee}{b_{is}}\, V^{,s} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Poichè al secondo membro è presente il gradiente della velocità della luce, che dipende anche dal campo gravitazionale, quest'ultimo interviene nella determinazione dei termini di 2° ordine $\underset{\vee}{{}^*c_{is}}$ del campo elettromagnetico.

(5) Da notare che se in prima approssimazione $g_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$, passando alla forma controvariante si ha: $g^{ik} = a^{ik} - b^{ki}$ essendo $b^{ki} = a^{kj}\, a^{ih}\, b_{jh}$. Infatti componendo le due relazioni $g_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ e $g^{ik} = a^{ik} + \lambda^{ik}$ si ha:

$$g^k_j = a^k_j + a^{ik}\, b_{ij} + a_{ij}\, \lambda^{ik}$$
$$0 = b^k_{\cdot j} + \lambda^{\cdot k}_j$$
$$0 = a^{ji}\, b^k_{\cdot j} + a^{ji}\, \lambda^{\cdot k}_j$$
$$0 = b^{ki} + \lambda^{ik}$$
$$\lambda^{ik} = -b^{ki} \quad \text{c. v. d.}$$

Meccanica. — *Applicazione del metodo delle caratteristiche alla corrente supersonica vorticosa.* Nota di PIETRO TEOFILATO, presentata (*) dal Socio G. ARMELLINI.

1. INTRODUZIONE. – Come abbiamo accennato in un precedente lavoro (1), l'intervento dei fenomeni di urto nelle velocità supersoniche determina una variazione di entropia, con conseguente formazione di vortici. Si impone perciò l'applicazione del metodo delle caratteristiche, oltre che al problema tridimensionale del moto potenziale, come abbiamo fatto in altro successivo lavoro (2), anche al problema tridimensionale del moto vorticoso.

In questa prima Nota, però, ci limiteremo al solo caso bidimensionale anzitutto perchè propedeutico a quello più generale di più di due dimensioni, e poi perchè offrente l'occasione a particolari considerazioni circa un errore che si commette nella integrazione al passo, e che deve essere tollerabile, come invece parmi non sia in altri metodi esibiti (3) riguardanti le due dimensioni.

2. IL SISTEMA NORMALE. – Siano: $\mathbf{I}$ il vettore vorticoso, $\mathbf{V}$ il vettore velocità, p la pressione, ρ la densità, S l'entropia, $\Delta S = S - S_0$ la variazione di quest'ultima, k il rapporto dei calori specifici $c_p : c_v$, U la velocità locale del suono, β la velocità massima, per cui:

$$U^2 = \frac{k-1}{2}(\beta^2 - V^2) \tag{1}$$

$$p = \frac{p_0}{\rho_0^k}\rho^k e^{\Delta S/c_v} \tag{2}$$

$$\rho = \rho_0\left(1 - \frac{V^2}{\beta^2}\right)^{1/(k-1)}. \tag{3}$$

Ho poi accennato nel lavoro citato (1) che, potendo considerare il regime come isoenergetico attraverso il fronte di urto, si ha:

$$2\,\mathbf{V} \wedge \mathbf{I} + \frac{p_v}{(k-1)\rho_0^k}\rho^{k-1}\,\mathrm{grad}\, e^{\Delta S/c_v} = 0 \tag{4}$$

cui deve aggiungersi l'equazione di continuità:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\rho u_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\rho u_2) = 0 \tag{5}$$

(*) Nella seduta del 10 febbraio 1951.

(1) PIETRO TEOFILATO, *L'analogia idrogasdinamica per i moti vorticosi.* Monografie scientifiche del Ministero dell'Aeron., N. 10, 1949.

(2) PIETRO TEOFILATO, *Determinazione della corrente supersonica tridimensionale col metodo delle caratteristiche.* «Pont. Accad. delle Scienze», 1950.

(3) ANTONIO FERRI, *Application of the method of caratteristics to supersonic rotational flow.* «National Advisory Commitee of Aeron. (N. A. C. A.)», 1946.

dove u_1 u_2 rappresentano rispettivamente le proiezioni della velocità sopra le direzioni degli assi.

Quando con gli indici x_1 x_2 si indichino le derivazioni parziali rispetto alle variabili x_1 x_2, l'invariabilità dell'entropia lungo una linea di corrente s (invariabilità che è lecito presumere), si traduce nell'equazione:

$$\frac{\partial S}{\partial s} = S_{x_1} u_1 + S_{x_2} u_2 = 0; \tag{6}$$

mentre proiettando i termini della (4) sulla normale n alla linea s, risulta:

$$2\,VI + \frac{1}{(k-1)\,c_v}\frac{p}{\rho}\frac{\partial S}{\partial n} = 0, \tag{7}$$

dove l'intensità I del vettore vorticoso (che è normale al piano del moto) è data da:

$$2\,I = -(u_1)_{x_2} + (u_2)_{x_1}. \tag{8}$$

D'altra parte risulta dall'equazione di continuità (4):

$$u_1 = \frac{1}{\rho}\psi_{x_2} \quad , \quad u_2 = -\frac{1}{\rho}\psi_{x_1}, \tag{9}$$

dove ψ è la cosiddetta *funzione di corrente* (4).

La (6) diventa quindi:

$$S_{x_1}\psi_{x_2} - S_{x_2}\psi_{x_1} = 0, \tag{10}$$

mentre la (8) diventa:

$$-2\,I = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{\rho}\psi_{x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{\rho}\psi_{x_2}\right) \tag{11}$$

e pertanto la (7) si riduce a:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{\rho}\psi_{x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{\rho}\psi_{x_2}\right) + \frac{p}{(k-1)\,c_v\,\rho^2\,V^2}\left(S_{x_1}\psi_{x_1} + S_{x_2}\psi_{x_2}\right) = 0. \tag{12}$$

Eseguendo le derivate di ρ mediante la (3), nella quale ρ_0 rappresenta la densità di ristagno, si ha dalla (12):

$$A_{11}\psi_{x_1x_1} + 2\,A_{12}\psi_{x_1x_2} + A_{22}\psi_{x_2x_2} - \left(1 - \frac{V^2}{U^2}\right)\frac{p}{V^2}\left(-S_{x_1}u_2 + S_{x_2}u_1\right) = 0, \tag{13}$$

dove:

$$A_{11} = 1 - \frac{u_1^2}{U^2} \quad , \quad A_{12} = -\frac{u_1 u_2}{U^2} \quad , \quad A_{22} = 1 - \frac{u_2^2}{U^2}. \tag{14}$$

La (10) e la (13) costituiscono un sistema di due equazioni in ψ ed S; allora, operando una sostituzione di variabili $z\,z_1$ in luogo di $x_1\,x_2$, ne risulta come determinante dei coefficienti di

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \quad , \quad \frac{\partial S}{\partial z}$$

(4) LUIGI CROCCO, *Singolarità della corrente iperacustica ecc. Aerotecnica*, 1937.

il seguente:

$$(15)\quad \mathfrak{D} \equiv \begin{vmatrix} A_{11} z_{x_1}^2 + 2 A_{12} z_{x_1} z_{x_2} + A_{22} z_{x_2}^2 & , & -\left(1 - \frac{V^2}{U^2}\right) \frac{p}{(k-1) c_v \rho V^2} \left(z_{x_1} \psi_{x_1} + z_{x_2} \psi_{x_2}\right) \\ 0 & & z_{x_1} \psi_{x_2} - z_{x_2} \psi_{x_1} \end{vmatrix}$$

Quando $\mathfrak{D}$ non è nullo, le (10) e (13) costituiscono nelle nuove variabili un *sistema normale*, nel senso di Levi–Civita e la integrazione al passo si può eseguire applicando il metodo di Cauchy.

3. Le varietà caratteristiche. – Supponiamo invece $\mathfrak{D} = 0$, cioè:

$$(16)\quad (z_{x_1} u_1 - z_{x_2} u_2)(A_{11} z_{x_1}^2 + 2 A_{12} z_{x_1} z_{x_2} + A_{22} z_{x_2}^2) = 0,$$

equazione cui soddisfa la varietà caratteristica $z(x_1 x_2) = \text{costante}$, a partire dalla quale non è più applicabile il metodo di Cauchy; ciò che accade nel moto supersonico. Infatti, nell'intorno infinitesimo del punto $M(x_1^0 x_2^0)$, la varietà suddetta soddisfa all'equazione:

$$(17)\quad z \equiv \mu_1 (x_1 - x_1^0) + \mu_2 (x_2 - x_2^0) \equiv 0,$$

dove i coefficienti $\mu_1 \mu_2$ sono legati da una o l'altra delle due equazioni:

$$(18)\quad \mu_1 u_2^0 - \mu_2 u_1^0 = 0 \qquad \text{oppure} \qquad A_{11}^0 \mu_1^2 + 2 A_{12}^0 \mu_1 \mu_2 + A_{22}^0 \mu_2^2 = 0,$$

la seconda delle quali ammette soluzioni reali soltanto nel caso supersonico, come è facile riscontrare. (L'apice indica grandezze relative al punto M). L'elemento di caratteristica spiccato dal punto $M(x_1^0 x_2^0)$ avrà, sopra gli assi, le proiezioni $x_1 - x_1^0$, $x_2 - x_2^0$ che soddisferanno una delle due equazioni risultanti da (17) e (18):

$$(19)\quad u_2^0 (x_1 - x_1^0) - u_1^0 (x_2 - x_2^0) = 0 \quad ;$$

$$A_{22}^0 (x_1 - x_1^0)^2 - 2 A_{12}^0 (x_1 - x_1^0)(x_2 - x_2^0) + A_{11}^0 (x_2 - x_2^0)^2 = 0.$$

Le (19) possono anche scriversi:

$$(20)\quad \frac{x_2 - x_2^0}{x_1 - x_1^0} = \frac{u_2^0}{u_1^0} \qquad \text{oppure} \qquad \frac{x_2 - x_2^0}{x_1 - x_1^0} = \left(-\frac{u_1^0 u_2^0}{U^2} \pm \sqrt{\mathfrak{M}^{0^2} - 1}\right) : \left(1 - \frac{u_1^2}{U^2}\right)$$

dove $\mathfrak{M}$ è il numero di Mach nel punto M, per ipotesi maggiore dell'unità.

4. L'integrazione al passo. – Pongasi:

$$(21)\quad x_1 - x_1^0 = a' \quad , \quad x_2 - x_2^0 = a''$$

e denotino gli apici M N P Q le grandezze relative ai punti M N P Q, rispettivamente. Scelto un elemento MN di caratteristica, avente quindi le proiezioni a' a'', si avrà:

$$
(22)\quad \begin{cases}
\psi^N_{x_1} - \psi^M_{x_1} = a' \psi^M_{x_1 x_1} + a'' \psi^M_{x_1 x_2} \\
\psi^N_{x_2} - \psi^M_{x_2} = a' \psi^M_{x_1 x_2} + a'' \psi_{x_2 x_2} \\
0 = A^M_{11} \psi_{x_1 x_1} + 2 A^M_{12} \psi^M_{x_1 x_2} + A^M_{22} \psi_{x_2 x_2} - \left(1 - \frac{V^2}{U^2}\right)^{(M)} (-u^M_2 S^M_{x_1} + u^M_1 S^M_{x_2}) \\
S^N - S^M = a' S^M_{x_1} + a'' S^M_{x_2} \\
0 = u_1 S^M_{x_1} + u_2 S^M_{x_2}
\end{cases}
$$

dove la prima, seconda e quarta equazione sono ottenute per differenziazione, la terza non è altro che la (13), e la quinta non è altro che la (6).

Il determinante D formato con i coefficienti delle cinque equazioni (22) rispetto alle cinque incognite $\psi_{x_r x_s}$, S_i, è dato da:

$$
(23)\qquad D = (a' u^M_2 - a'' u^M_1) \cdot (A^M_{22} a'^2 - 2 A^M_{12} a' a'' + A^M_{11} a''^2)
$$

nullo in virtù della (19).

Ma allora, indicando con D_{ij} il complemento algebrico ottenuto in D cancellando la i–ma linea e la j–ma colonna, e indicati con c_i i primi membri delle (22), cioè:

$$
(24)\quad c_1 = \psi^N_{x_1} - \psi^M_{x_1}\ ,\quad c_2 = \psi^N_{x_2} - \psi^M_{x_2}\ ,\quad c_3 = 0\ ,\quad c_4 = S^N - S^M\ ,\quad c_5 = 0,
$$

deve aversi, se le $\psi_{x_r x_s}$, S_i sono finite:

$$
(25)\qquad \sum_{i=1}^{5} D_{ij}\, c_i = 0 \qquad (j = 1, \cdots 5).
$$

D'altra parte, essendo D nullo, i complementi algebrici di una linea sono proporzionali ai corrispondenti elementi algebrici di qualsiasi altra linea; pertanto le (25) si riducono ad una sola equazione, ad esempio la terza delle (22), cioè: $\Sigma D_{i3}\, c_i = 0$, che, per le (24) diventa:

$$
(26)\quad (\psi^N_{x_1} - \psi^M_{x_1})(a' u^M_2 - a'' u^M_1) \cdot a' A^M_{11} - (\psi^N_{x_2} - \psi^M_{x_2})(a' u^M_2 - a'' u^M_1)(2 a' A^M_{12} - a'' A^M_{11}) -
$$
$$
- (S^N - S^M)\, a'^2 \left(1 - \frac{V^2}{U^2}\right)^{(M)} (V^2)^{(M)} = 0\,,
$$

dalla quale si ritrova, nel caso che sia $a'\,;\, a'' = u_1\,;\, u_2$, ossia l'elemento di corrente coincida con l'elemento di caratteristica, $S^N = S^M$ [isotropia lungo s, secondo la (6)].

Indicando poi con $\bar a'\ \bar a''$ le proiezioni di un elemento di caratteristica spiccato da P, si avrà, analogamente alla (26):

$$
(27)\quad (\psi^N_{x_1} - \psi^P_{x_1})(\bar a' u^P_2 - \bar a'' u^P_1)\, a' A^P_{11} - (\psi^N_{x_2} - \psi^P_{x_2})(\bar a' u^P_2 - \bar a'' u^P_1)(2 \bar a' A^P_{12} - \bar a'' A^P_{11}) -
$$
$$
- (S^N - S^P)\, \bar a'^2 \left(1 - \frac{V^2}{U^2}\right)^{(P)} \cdot (V^2)^{(P)} = 0\,.
$$

Le equazioni (26) e (27) possono pensarsi come due equazioni nelle tre grandezze $\psi^N_{x_1}\ \psi^N_{x_2}\ S^N$, note che siano le grandezze riferentisi ai punti M e P.

Per avere un'altra relazione, si scrivano la quarta delle (22) e la sua analoga:

$$S^M - S^N = -a' S^N_{x_1} - a'' S^N_{x_2} \tag{28}$$

$$S^P - S^N = -\bar{a}' S^N_{x_1} - \bar{a}'' S^N_{x_2}. \tag{29}$$

A queste si aggiunga l'altra seguente, nella quale Q indica il quarto vertice del parallelogramma (infinitesimo) MNPQ, formato dalle caratteristiche di M e P (MN ed MQ date dalle soluzioni della seconda delle (20), che è relativa al punto M; PN e PQ date dalle soluzioni analoghe relative al punto P)

$$S^Q - S^N = -c' S^N_{x_1} - c'' S^N_{x_2}, \tag{30}$$

dove c' e c'' indicano le proiezioni di QN sopra gli assi.

Le (28), (29) e (30) costituiscono un sistema di tre equazioni in $S^N\ S^N_{x_1}\ S^N_{x_2}$, da cui si ricava S^N in funzione di $S^M\ S^P\ S^Q$, supposte note. Precisamente, posto:

$$\lambda_1 = \begin{vmatrix} a' & \bar{a}'' \\ c' & c'' \end{vmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{vmatrix} \bar{a}'' & \bar{a}' \\ c'' & c' \end{vmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{vmatrix} a' & a'' \\ \bar{a}' & \bar{a}'' \end{vmatrix}, \tag{31}$$

si ricava S^N come media ponderata di $S^M\ S^P\ S^Q$, con i pesi $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$, cioè:

$$S^N = \frac{\lambda_1 S^M + \lambda_2 S^P + \lambda_3 S^Q}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}. \tag{32}$$

Conosciuto in tal modo S^N, le (26) e (27) forniranno $\psi^N_{x_1}$ e $\psi^N_{x_2}$; sarà così compiuto un passo nella integrazione.

5. Ammissibilità o meno di errori nella integrazione al passo. – Nel lavoro citato al n. 3) denotato con β^N l'angolo formato dalla velocità con la caratteristica spiccata da N (angolo di Mach) e con φ^N l'angolo tra velocità ed asse x_1, vengono date le formole:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial n}\right)^{(M)} = \frac{S^N - S^M}{(x^N_1 - x^M_1)\dfrac{\operatorname{sen}(\beta^M + \varphi^M)}{\operatorname{sen}\beta^M}}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial n}\right)^{P} = \frac{S^N - S^P}{(x^N_1 - x^P_1)\dfrac{\operatorname{sen}(\beta^P + \varphi^P)}{\operatorname{sen}\beta^P}} \tag{33}$$

e viene assunto:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial n}\right)^{M} = \left(\frac{\partial S}{\partial n}\right)^{P} = \left(\frac{\partial S}{\partial n}\right)^{N}, \tag{34}$$

da cui, per una nota proprietà delle proporzioni, applicata alle (33), risulta:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial n}\right)^{(N)} = \frac{(S^N - S^M) - (S^N - S^P)}{(x^N_1 - x^M_1)\dfrac{\operatorname{sen}(\beta^M + \varphi^M)}{\operatorname{sen}\beta^M} - (x^N_1 - x^P_1)\dfrac{\operatorname{sen}(\beta^P + \varphi^P)}{\operatorname{sen}\beta^P}}. \tag{35}$$

Si riesce così ad eliminare S^N ed a ricavare $\left(\frac{\partial S}{\partial n}\right)^{(N)}$ espresso per mezzo di elementi di P e di M.

Eguagliando allora $\left(\frac{\partial S}{\partial n}\right)^{(N)}$ ad uno dei secondi membri delle (33), si deduce S^N che serve poi alla determinazione finale degli elementi relativi ad N, i quali con le sole due equazioni (26) e (27) rimanevano indeterminati.

A questo punto conviene osservare che l'assunzione (34) porta a trascurare quantità del primo ordine, mentre la sostituzione della (28) alla quarta delle (22), si riduce a commettere un errore del secondo ordine. Infatti, nel primo dei metodi, essendo:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial n}\right)^{(M)} \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial n}\right)^{(P)}$$

tra loro differenti per una quantità ε infinitesima del primo ordine, quale è l'ordine assunto per il *passo*, cioè per MN e PN, ed avendo posto:

$$A^M = \frac{\operatorname{sen}(\beta^M + \varphi^M)}{\operatorname{sen}\beta^M} \quad , \quad A^P = \frac{\operatorname{sen}(\beta^P + \varphi^P)}{\operatorname{sen}\beta^P}$$

si ha dalle (33):

$$\frac{S^N - S^M}{(x_1^N - x_1^M)A^M} = \frac{S^N - S^P}{(x_1^N - x_1^P)A^P} + \varepsilon$$

ovvero:

$$S^N = \frac{S^M A^P (x_1^N - x_1^P) - S^P A^M (x_1^N - x_1^M)}{A^P (x_1^N - x_1^P) - A^M (x_1^N - x_1^M)} + \varepsilon \left[\frac{A^M A^P (x_1^N - x_1^M)(x_1^N - x_1^P)}{A^P (x_1^N - x_1^P) - A^M (x_1^N - x_1^M)} \right].$$

Il fattore di ε, che è compreso in parentesi quadrata, è una frazione il cui numeratore è una quantità del secondo ordine, ed il cui denominatore è un differenziale di quantità del primo ordine. Numeratore e denominatore sono quindi grandezze paragonabili formanti un rapporto generalmente finito; pertanto quando si assume $\varepsilon = 0$, come si fa nel metodo citato [3], si commette un errore del primo ordine cioè dello stesso ordine del *passo*, e quindi intollerabile.

Invece, col metodo qui proposto, distinto con $\overline{S}^N$ il valore di S^N dato dalla (28), e con $\overline{\overline{S}}^{(N)}$ quello dato dalla quarta equazione delle (22), e posto:

$$S_{x_1}^N = S_{x_1}^M + \eta' \quad , \quad S_{x_2}^N = S_{x_2}^M + \eta''$$

dove η' η'' sono quantità del primo ordine, si ha:

$$\overline{S}^N - \overline{\overline{S}}^N = (\overline{S}^N - S^M) - (\overline{\overline{S}}^N - S^M) = [S_{x_1}^N a' + S_{x_2}^N a''] - [S_{x_1}^M a' + S_{x_2}^M a''] = \eta' a' + \eta'' a''$$

dove l'ultimo membro è del secondo ordine e quindi trascurabile di fronte al passo.

Meccanica. — *Un principio variazionale in idrodinamica piana.* Nota di GUIDO GOTUSSO, presentata (*) dal Corrisp. B. FINZI.

1. MOTI ROTAZIONALI PIANI STAZIONARI DI UN FLUIDO PERFETTO INCOMPRIMIBILE. – Consideriamo il moto di un fluido perfetto incomprimibile nel caso stazionario. Indichiamo col σ il campo di movimento, con ν il suo contorno, con ρ la densità costante, con ζ il vortice, con ψ la funzione di corrente, con p la pressione, con U il potenziale unitario delle forze di massa, con v la velocità, per modo che:

$$(1) \qquad v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad ; \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad ; \quad \zeta = \Delta\psi.$$

È ben noto (1) che il movimento è determinato esprimendo che $\Delta\psi$ è funzione arbitraria ψ, e, anzi, posto:

$$(2) \qquad \Delta\psi = -F'(\psi)$$

con F funzione arbitraria di cui F' è la derivata, si ha:

$$(3) \qquad F(\psi) + \frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} - U = \text{costante}.$$

2. L'ENERGIA COMPLEMENTARE. – Se nella (3) moltiplichiamo per ρ e integriamo in tutto il campo di movimento, otteniamo:

$$(4) \qquad \rho \int_\sigma F\,d\sigma + T + \int_\sigma p\,d\sigma - \int_\sigma \rho U\,d\sigma = \text{costante}.$$

La (4) esprime che nel moto naturale rimane costante la somma di certe energie: il secondo addendo rappresenta l'energia cinetica totale, il terzo l'energia di pressione (entalpia), il quarto l'energia potenziale totale delle forze di massa. Quanto al primo addendo, lo indicheremo brevemente con K, ponendo cioè:

$$(5) \qquad K = \rho \int_\sigma F\,d\sigma$$

e lo chiameremo energia complementare. Nei moti irrotazionali K diventa una costante e la (3) si riduce al teorema di Bernoulli.

(*) Nella seduta del 10 febbraio 1951.

(1) Ad esempio, CISOTTI, *Idromeccanica Piana*, vol. I, p. 59 (1921).

Osserviamo che per quanto detto sopra è, come subito si verifica:

$$K = -\rho \int_{\sigma} d\sigma \int \Delta\psi \, d\psi. \tag{6}$$

Ora noi possiamo pensare il campo di moto suddiviso in tubi di flusso infinitesimi da una famiglia di linee di flusso corrispondenti a valori della ψ via via crescenti per incrementi costanti $d\psi$. La (6) ci mostra allora che K, a meno del segno, è la somma di tanti addendi del tipo:

$$\int_{\sigma'} \rho \, d\psi \, \zeta \, d\sigma \tag{7}$$

essendo σ' un tubo di flusso generico. Ma $\rho \, d\psi$ misura la portata del tubo e $\zeta \, d\sigma$ l'intensità del vortice nell'elemento $d\sigma$. Se ne conclude che K si presenta come somma, estesa a tutti i tubi, del prodotto della corrispondente portata per l'intensità totale del vortice nel tubo stesso.

L'energia si presenta sempre come prodotto di un fattore estensivo per un fattore intensivo: nel caso di K il fattore estensivo è la portata e il fattore intensivo è l'intensità del vortice: dunque, due elementi di chiaro e immediato significato meccanico.

3. IL PRINCIPIO VARIAZIONALE. – Consideriamo ora l'integrale seguente:

$$D = \int_{\sigma} \{\operatorname{grad}\psi \times \operatorname{grad}\psi - 2F\} \, d\sigma \tag{8}$$

e calcoliamone la variazione prima in corrispondenza a una variazione $\delta\psi$ che rispetti i valori al contorno. Ricorrendo, come sempre in simili casi, al lemma di Green, avremo (in condizioni di regolarità):

$$\delta D = 2 \int_{\sigma} \operatorname{grad}\psi \times \delta \operatorname{grad}\psi \, d\sigma - 2 \int_{\sigma} F' \delta\psi \, d\sigma = \tag{9}$$

$$= -2 \int_{\nu} \frac{d\psi}{dn} \delta\psi \, d\nu - 2 \int_{\sigma} (\Delta\psi + F') \delta\psi \, d\sigma$$

dove n indica la normale a σ volta verso l'interno di ν.

Ma il primo integrale è nullo per l'ipotesi fatta su $\delta\psi$, il secondo è nullo in forza della (2), donde:

$$\delta D = 0. \tag{10}$$

Quanto alla variazione seconda, abbiamo subito:

$$\delta^2 D = \delta\delta D = 2 \int_{\sigma} \delta \operatorname{grad}\psi \times \delta \operatorname{grad}\psi \, d\sigma - 2 \int_{\sigma} F'' \, \delta^2\psi \, d\sigma. \tag{11}$$

Confrontando la (8) e la (10) possiamo concludere che il movimento naturale è, fra tutti i movimenti di eguale portata, quello per il quale risulta stazionaria la formazione:

$$T - K$$

e in ciò consiste il principio variazionale annunciato [2].

Se, in particolare, il moto è irrotazionale, allora $\Delta\psi = 0$, segue, per la (2), $F =$ costante, $K =$ costante, ma, intanto, la (11) ci fornisce $\delta^2 D > 0$, e ritroviamo così il noto risultato: fra tutti i moti irrotazionali di eguale portata, quello naturale si distingue per la minima energia cinetica totale.

Astronomia. — *Su una possibile deviazione della luce attraverso la nebulosa delle Pleiadi*. Nota di ATTILIO COLACEVICH, presentata [*] dal Socio G. ARMELLINI.

È nota l'esistenza nello spazio interstellare di materia cosmica. Essa è talvolta ben visibile sotto forma di nube oscura o di nebulosa chiara; altre volte, anche se non visibile, produce particolari righe negli spettri stellari e si rivela con la diminuzione e l'arrossamento della luce stellare.

Si pone qui la domanda se una nebulosa possa influire sul percorso dei raggi luminosi e vi sia un modo per rivelare una tale eventuale deviazione della luce. Le nostre attuali conoscenze della natura di questi corpi e le leggi note della fisica farebbero prevedere una risposta negativa; tuttavia conviene esaminare i dati di osservazione assumendo una tale ipotesi come base di ricerca. Assumiamo che la nebulosa sia interposta tra noi ed un astro più lontano che soltanto per motivi di prospettiva appaia in prossimità o dentro il campo della nebulosa. Chiameremo tali astri stelle di campo e supporremo la loro distanza dalla nebulosa dello stesso ordine di quella della nebulosa da noi.

Conviene per la discussione introdurre un modello di nebulosa ad esempio sia essa di forma sferica e con densità funzione della distanza dal centro. Per rifrazione si vede subito che la luce deve subire una deviazione nel senso che i

(2) Il procedimento qui seguito, che lega in sostanza l'integrale dell'equazione $\Delta\zeta + F'(\zeta) = 0$ alla stazionarietà di $\int_\Omega \{\text{grad}^2 \zeta - 2F\}\, d\sigma$ è una estensione del principio variazionale di Dirichlet relativo all'equazione di Laplace $\Delta\zeta = 0$. Esso può essere impiegato a particolari equazioni, quali, ad esempio

$$\Delta\varphi = K \qquad (K \text{ costante rispetto a } \varphi)$$

$$\Delta\varphi + K\varphi = 0.$$

Vale forse la pena di notare che alla seconda delle equazioni scritte si perviene partendo dalla equazione di D'Alembert, qualora si ponga l'integrale sotto forma di prodotto di una funzione di sola t per una funzione del solo posto. La parte temporale dà allora luogo a una funzione circolare, mentre la parte spaziale si presenta appunto nella forma sopra riferita.

(*) Nella seduta del 13 gennaio 1951.

raggi piegano volgendo in genere la concavità della loro traiettoria al centro della nebulosa. Per l'osservatore la stella avrà perciò una posizione la cui distanza angolare dal centro del disco della nebulosa sarà maggiore di quella che si avrebbe se la nebulosa stessa non esistesse. È difficile che tale spostamento produca conseguenze apprezzabili sulla distribuzione numerica delle stelle attorno alla nebulosa. Altri motivi, quali l'assorbimento della luce, influirebbero molto più sui relativi conteggi.

La rifrazione dovrebbe avere però anche un effetto sul moto delle stelle. Infatti consideriamo una stella che si sposti con moto proprio uniforme dietro la nebulosa e che passi per semplicità per il centro del disco di questa. Al momento della sua immersione, della emersione e del transito per il centro non si deve avere alcuna deviazione della luce. Quindi il moto medio tra due qualsiasi di questi tre punti sarà quello che si avrebbe se la nebulosa non esistesse. È però anche evidente che, ad esempio, tra il momento dell'immersione ed il passaggio per il centro del disco questo moto potrà variare appunto a motivo della rifrazione; essa variazione in una prima corteccia sferica esterna dovrà equipararsi ad una diminuzione del moto in senso assoluto e poi, in una parte interna, ad un aumento dello stesso moto.

Se la stella ha un moto la cui direzione non passa per il centro del disco, allora considereremo la componente radiale del moto proprio R e le considerazioni sopra svolte varranno per questa. La componente tangenziale T del moto invece dovrebbe risultare priva di ogni deformazione rifrazionale.

Naturalmente questo ragionamento non ha senso farlo per una stella dato che non sappiamo il valore del suo moto. Ha un senso invece farlo per un gruppo di stelle. Infatti si può per il gruppo studiare la distribuzione statistica di R e di T ed eseguirne un confronto. Una differenza nella distribuzione statistica tra queste due quantità potrebbe essere attribuita ad effetti rifrazionali specie se esiste un abbondante materiale di osservazione in modo da poter eliminare le fluttuazioni statistiche inevitabili. Ciò deriva dal fatto che i valori di R verranno alterati per il supposto effetto rifrazionale in modo diverso nelle diverse corone concentriche della nebulosa. Se le stelle sono uniformemente distribuite nel campo nebulare, ne conseguirà che dominerà uno o l'altro degli effetti rifrazionali a seconda dell'estensione interessata da essi.

L'applicazione di questi concetti ad un caso pratico è stato reso possibile con la pubblicazione del Catalogo di 3259 stelle nel campo delle Pleiadi per opera di E. Hertzsprung [1]. In questo catalogo sono dati i moti propri per 2920 di tali stelle; di queste 291 appartengono e sono sospette di appartenere al gruppo delle Pleiadi e sono state escluse dall'esame. Le altre stelle si distinguono nettamente per il loro moto dalle Pleiadi e sono perciò stelle di campo. La distanza delle Pleiadi è, secondo L. Binnendijk [2], di 100 parsecs mentre la distanza media delle stelle di campo varia secondo lo stesso autore da 300 a 1000 parsecs. Siamo quindi nella possibilità di applicare il criterio sovraesposto

(1) « Annalen v. d. Sterrenwacht t. Leiden », Tome XIX/1 A.
(2) « Annalen v. d. Sterrenwacht t. Leiden », Tome XIX/2.

per la determinazione di un'eventuale deviazione della luce attraverso le nebulosità che circondano e fanno parte di questo ammasso stellare.

Naturalmente non era possibile mantenere l'ipotesi di lavoro della nebulosa di forma sferica. In luogo di ciò per ogni stella si è determinato l'angolo P a partire da Nord per Est da 0° a 360° in direzione dell'aumento della densità nebulare e si è scomposto il moto stellare nelle due componenti R e T secondo le formule:

$$R = \mu_{\alpha \cos \delta} \operatorname{sen} P + \mu_\delta \cos P$$

$$T = \mu_{\alpha \cos \delta} \cos P - \mu_\delta \operatorname{sen} P.$$

La componente R risultava perciò positiva in caso di moto di allontanamento dalla parte più densa della nebulosa.

Sono state esaminate in questo modo le stelle attorno alla nebulosità di Alcione, Elettra, Merope, Maia in base alla fotografia esistente nell'Atlante Astronomico di P. Emanuelli e stelle più esterne in zone nebulari messe bene in evidenza nella bella fotografia eseguita a Forcalquier in Francia (3).

Vennero scartate tutte quelle stelle il cui moto medio in parallelo era esterno all'intervallo $-2'' \; -32''$ ed in meridiano esterno a $+23'' \; +53''$, ciò per non introdurre elementi statisticamente troppo eterogenei o stelle che potevano anche non essere di campo al di là delle Pleiadi bensì al di qua; in totale vennero considerate 462 stelle.

Tabella I.

P	N	R	T	$\bar{R}$	$\bar{T}$
0°	54	+ 39″.3	— 14″.8	+ 40″.8	— 13″.9
30	29	+ 23 .1	— 36 .5	+ 25 .4	— 39 .9
60	23	+ 4 .5	— 42 .8	+ 4 .8	— 44 .2
90	46	— 15 .8	— 39 .9	— 18 .4	— 40 .5
120	40	— 36 .9	— 20 .7	— 33 .8	— 27 .0
150	39	— 41 .6	— 8 .5	— 45 .1	— 4 .3
180	54	— 41 .7	+ 15 .8	— 42 .4	+ 19 .7
210	34	— 25 .4	+ 35 .7	— 27 .2	+ 37 .8
240	30	— 6 .4	+ 43 .3	— 5 .8	+ 44 .9
270	36	+ 20 .5	+ 39 .8	+ 17 .5	+ 42 .4
300	25	+ 37 .5	+ 23 .2	+ 36 .5	+ 27 .7
330	52	+ 45 .3	+ 7 .9	+ 45 .1	+ 5 .8

(3) « Bulletin Soc. Astron. de France », vol. 52, p. 180 (1938).

Il materiale venne poi raccolto in dipendenza dell'angolo di posizione P con intervalli di 30° in 30°. Così nel primo gruppo sono comprese tutte quelle stelle per le quali P è compresa tra 345° e 14°,99 e così via. Gli angoli di posizione vennero stimati a vista con quella precisione che era possibile con le fotografie in possesso e con la struttura nebulare in esame, in genere detta precisione non può essere stata superiore a $\pm 5°$.

In questa tabella I sono dati: i vari settori di P, il numero delle stelle in ogni settore ed i valori R e T medi per le stelle ivi contenute. Le ultime due colonne dànno i valori medi $\overline{R}$ e $\overline{T}$ di gruppi di 40 stelle alla volta prese così come sono date nelle prime pagine del catalogo di Hertzsprung e scartando solamente quelle appartenenti al gruppo delle Pleiadi od uscenti dagli stessi limiti adottati già precedentemente. Questo gruppo di stelle venne considerato per un confronto in modo da poter praticamente considerare le fluttuazioni statistiche per un numero di stelle quale quello qui esaminato.

Naturalmente il valore di R dovrebbe variare in modo sinusoidale e quello di T essere sfasato di 90°. Dato che un confronto deve esser fatto sia con i valori precedenti che seguenti di 90° sia in R che in T ed anche per smussare ulteriormente i residui statistici, si sono raggruppati senza segno i valori opposti di 180° i cui valori medi pesati sono qui appresso indicati senza segno e messi in corrispondenza opportunamente sfasati per il confronto.

TABELLA II.

R	T	R — T	N	$\overline{R}$	$\overline{T}$	$\overline{R} - \overline{T}$
17″.86	15″.30	+ 2″.56	95	17″.95	16″.80	+ 1″.15
37 .13	36 .07	+ 1 .06	64	35 .15	36 .90	— 1 .75
43 .71	43 .08	+ 0 .63	72	45 .10	44 .55	+ 0 .55
40 .50	39 .86	+ 0 .64	95	41 .60	41 .45	+ 0 .15
24 .34	21 .66	+ 2 .68	64	26 .30	27 .35	— 1 .05
5 .57	8 .15	— 2 .58	72	5 .30	5 .05	+ 0 .25

Il valore medio pesato di $R - T$ è pari a $+ 0″,87$ mentre quello di $\overline{R} - \overline{T}$ risulta di appena $- 0″,12$. Questo valore varia a seconda dei valori di P che si attribuiscono ai vari gruppi di 40 stelle, ma oscilla entro $\pm 0″,12$.

Gli errori probabili delle medie trovate risultano pari a $\pm 0″,63$ ed a $\pm 0″,28$. In definitiva si possono scrivere i seguenti risultati:

$$R - T = + 0″.87 \pm 0″.63 \qquad \text{da } 462 \text{ stelle}$$

$$\overline{R} - \overline{T} = \quad 0″.00 \pm 0″.28 \qquad \text{da } 480 \text{ stelle.}$$

Concludendo si vede che, nonostante la notevole entità dell'errore probabile, esiste una probabilità che il supposto effetto rifrazionale esista veramente. Non

si crede che, con i dati a disposizione e con il metodo usato, si possa rendere maggiore la precisione delle conclusioni. Dato lo stato attuale delle cose si ritiene perciò opportuno comunicare i risultati ottenuti.

Se si accettano i risultati in questo senso si deve concludere che esiste una rifrazione media attraverso alla nebulosità delle Pleiadi per un valore medio di 0″,9 per ogni 30″ circa (medio assoluto dei valori di R nella curva di distribuzione sinusoidale di questa quantità) di spostamento lungo il gradiente massimo di variazione della nebulosità. Il senso della rifrazione fa aumentare in media il modulo del moto proprio nel senso radiale come avverrebbe se la nebulosa si comportasse similmente ad una lente. D'altra parte secondo i concetti esposti deve esistere nella parte più esterna probabilmente una deviazione in senso contrario che deve ritenersi relegata ad una stretta striscia per modo che le stelle interessate siano relativamente di piccolo numero. In conclusione ringrazio il prof. M. Cimino per il suo amichevole interessamento critico a questo argomento.

Astronomia (Astrofisica). — *Diagramma colore-grandezza e distanza dell'ammasso globulare M 56. – I. Istrumenti, tecnica delle osservazioni e risultati.* Nota di Leonida Rosino, presentata (*) dal Socio G. Silva.

1. Nella Nota III di una mia serie di ricerche sugli ammassi globulari (1) si sono anticipati alcuni provvisori risultati sul colore di diverse stelle appartenenti all'ammasso M 56 della Lira e proiettate sopra di esso. Uno studio della grandezza e del colore delle componenti si presenta particolarmente difficile, data la posizione dell'M 56 in un campo di stelle della Via Lattea che solo in pochi casi è possibile distinguere da quelle dell'ammasso. In compenso però si possono trarre delle conclusioni molto interessanti sulla natura del sistema e sull'eccesso di colore e quindi sulla sua reale distanza. Con la scoperta di Baade dell'esistenza di due tipi di popolazioni stellari è sempre più pressante il problema di determinarne le singole caratteristiche, sia fotometriche che spettroscopiche, di studiarne i sistemi misti, di individuare tra quelli di uno stesso tipo le eventuali differenze. I massimi telescopi tendono ad affrontare questi problemi nelle nebulose extragalattiche; ma moltissimo ancora c'è da fare entro i confini della Galassia, nel campo degli ammassi globulari di stelle, la cui popolazione è del tipo II, ma che pur lasciano scorgere, nei pochi casi ben studiati, delle singolari deviazioni dall'uno all'altro.

(*) Nella seduta del 13 gennaio 1951.

(1) Le precedenti sono: I. – *Distribuzione e variabilità delle stelle dell'ammasso M 30 e valutazione della sua distanza.* «Pubbl. Oss. Bologna», V, 9 (1949). «Mem. Soc. Astr. Ital.», XX, 1 (1949); II. – *Sui periodi e curve di luce di 10 stelle variabili appartenenti all'ammasso globulare NGC 5053.* «Pubbl. Oss. Bologna», V, 10 (1949), «Mem. Soc. Astr. Ital.», XX, 3 (1949); III. – *Su alcune interessanti stelle variabili appartenenti o vicine all' ammasso globulare M 56 della Lira.* «Pubbl. Oss. Bologna», V, 12 (1950), «Mem. Soc. Astr. Ital.», XXI, 1 (1950); IV. – *Twenty-nine new Variable Stars in the Globular Cluster M 15.* «Astroph. Journal», 112, 1 (1950); Vedi inoltre la Nota sull'M 56 in «Pubbl. Oss. Bologna», IV, 7 (1944), «Mem. Soc. Astr. Ital.», XVI, 4 (1944).

In questa V Nota della serie sopracitata sono esposti i risultati definitivi delle osservazioni con filtri di luce eseguite a Lojano ed Asiago negli anni scorsi, appunto allo scopo di studiare nell'M 56, già ampiamente esaminato in precedenti comunicazioni da altri punti di vista, alcuni dei problemi di cui si è ora detto.

2. Il piano iniziale del presente lavoro contemplava:

a) accurata determinazione, in tre gruppi di lunghezza d'onda, delle grandezze di un conveniente numero di stelle tutt'attorno all'ammasso, mediante confronti polari;

b) determinazione della grandezza e del colore delle stelle interne ad un campo circolare centrato sull'ammasso, su lastre calibrate sugli standard di cui al precedente capoverso.

Per l'esecuzione dei confronti polari si è usato in prevalenza il telescopio Zeiss di 60 cm, F : 3,5 di Lojano. Qualche coppia è stata presa però anche ad Asiago al fuoco newtoniano F : 5 del telescopio di 120 cm. Non si è riscontrata apprezzabile differenza nell'equazione di colore dei due istrumenti. Si è data la preferenza al riflettore di Lojano, perchè con esso è possibile passare in pochi minuti dal Polo al campo in esame, riducendo al minimo l'intervallo tra le due lastre; ma sopratutto perchè sono più frequenti a Lojano nottate con cielo tranquillo, uniforme e costante, specialmente in autunno. La tecnica dei confronti è la solita: due lastre sono esposte in rapida successione e per un tempo eguale, una sul Polo (centro su 5 *s*) e la seconda, presa dalla medesima scatola, sulla regione (centro sull'ammasso). Le lastre vengono sviluppate insieme (Final, 10^m a 18° C) e sono poi ridotte con misure al fotometro fotoelettrico Zeiss, tipo Schilt, dell'Osservatorio universitario di Bologna. Tutte le stelle di confronto, sia nella lastra del Polo, che in quella dell'ammasso, sono scelte vicinissime al centro ottico, e quindi non v'è sensibile coma. Non occorre applicare una correzione per l'assorbimento atmosferico, in quanto si è sempre avuto cura che l'oggetto, al momento in cui si fotografava, avesse all'incirca l'altezza del Polo.

Le grandezze fotografiche delle stelle di confronto furono dedotte al fotometro dall'esame di dieci coppie di lastre sensibili al blu (nove su emulsione « ferrania » non ortocromatica etichetta blu ed una su Eastman 103 *a*–O). Quelle fotovisuali da sei coppie di lastre « ferrania » ortocromatiche con filtro giallo medio Agfa 3. Infine le grandezze fotorosse si sono desunte da sette coppie di lastre pancromatiche (cinque coppie su emulsione « ferrania » superpancro e due su Eastman 103 *a*–F) con un filtro rosso RG 1 di Jena. Aggiungiamo che in realtà i confronti sono stati molti di più; ma tra tutti quelli disponibili abbiamo voluto scegliere solo i migliori in quanto a qualità delle immagini e guida. Una coppia di lastre blu e due di lastre pancromatiche vennero prese col telescopio di 120 cm. di Asiago; tutte le altre furono ottenute a Lojano tra il 1948 ed il 1950 e guidate al telescopio dallo scrivente. Le grandezze fotografiche e fotovisuali del Polo sono riferite al sistema di Mt. Wilson [2]; le fotorosse sono quelle date da Nassau e Burger [3].

(2) *Handbuch der Astrophysik*, II–2, 494.
(3) « Astroph. Journal », *103*, 25 (1946).

Per l'identificazione delle stelle di confronto il lettore dovrà riferirsi alla fig. 1 della tavola fuori testo, che riproduce da una lastra blu di 60 minuti di posa, ottenuta ad Asiago dal dott. Mannino, l'ammasso e le stelle vicine. Tre circonferenze con centro sul centro dell'ammasso, ciascuna con raggio metà di quella più esterna (che ha raggio 4'.3) rinchiudono la regione più interessante. Ogni stella che sia compresa nell'anello circolare diviso in quadratini tra la più interna e la più esterna delle tre circonferenze, è contraddistinta dalle cifre, verticali ed orizzontali, che individuano il quadratino e dal numero d'ordine entro il quadratino stesso. Per esempio, la stella 9101 è quella che reca il numero 1 (ultima cifra) entro il quadratino che ha ordinata 9 (prima cifra) ed ascissa 10. La 462 è la stella n. 2 del quadratino d'ordinata 4 ed ascissa 6.

TABELLA I.

Grandezze fotografiche, fotovisuali e fotorosse delle stelle di confronto.

Stella N.	m_{ph}	E. P.	m_v	E. P.	m_r	E. P.
1051	12.10	0.06	11.90	0.13	11.87	0.03
991	12.89	05	12.75	03	12.17	01
551	13.07	05	12.57	05	12.53	01
981	13.33	03	12.74	04	12.58	03
641	13.59	05	12.61	02	12.23	03
6121	13.98	07	13.19	04	12.83	03
4101	14.69	05	14.01	05	13.71	02
952	14.81	04	14.75	03	14.53	03
1161	14.94	02	13.89	03	13.46	03
9101	15.17	01	14.44	03	14.06	01
1061	15.21	02	13.94	02	13.25	04
6112	15.27	06	14.59	03	14.23	03
951	15.32	02	13.42	03	14.03	01
6111	15.41	05	14.23	02	13.55	04
1131	15.69	04	14.47	03	13.82	02
1162	15.72	03	14.65	—	13.91	04
591	15.85	05	14.60	06	14.05	03
1062	15.90	04	—	—	14.41	05
4102	16.43	05	—	—	14.80	03
1031	16.65	03	15.55	—	15.25	—
1041	16.70	07	15.80	—	15.25	—
1042	16.95	05	15.65	—	15.05	—
1181	17.35	—	—	—	15.20	—

La tabella I dà le grandezze fotografiche, fotovisuali e fotorosse delle stelle « standard » di riferimento. I valori conclusi sono medie aritmetiche delle determinazioni relative ad ogni singola coppia di uno stesso tipo, e quindi per lo più sono medie di dieci distinte determinazioni per le grandezze fotografiche, di sei per le fotovisuali e di sette per le fotorosse. In questo senso hanno significato

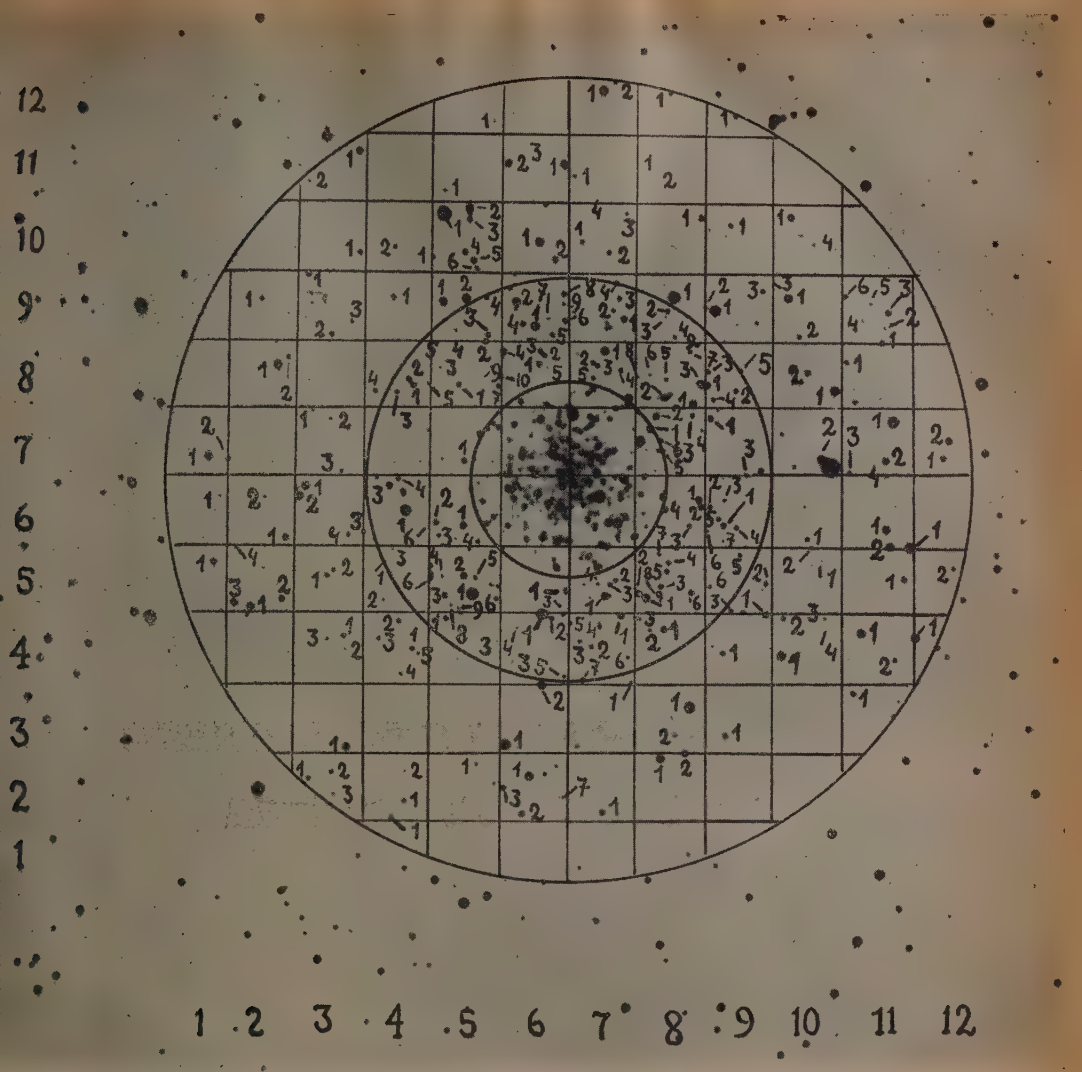
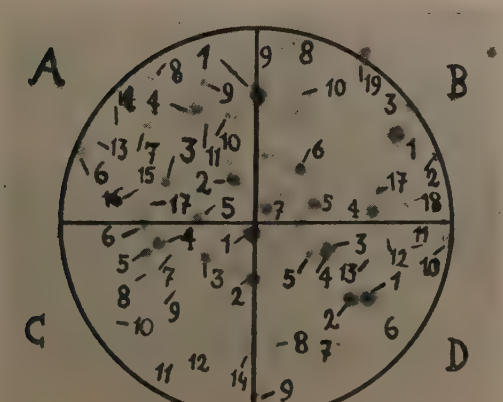


Fig. 1. - L'ammasso globulare M 56.



le seconde cifre decimali, mentre l'attendibilità delle medie e la dispersione dei valori singoli è indicata dagli errori probabili.

Non sono assegnati gli errori probabili, in quei pochi casi, relativi alle stelle più deboli, in cui i singoli valori furono meno di cinque.

3. La tabella I riassume il lavoro preliminare di cui si è detto al capoverso *a*) del paragrafo precedente. Per passare alla fase successiva era opportuno ricorrere a lastre di maggiore scala, in modo da ridurre per quanto possibile l'effetto di fusione di immagini vicine, che diventa importante quando ci si avvicina al centro dell'ammasso. Si ricorse perciò non più al telescopio di Lojano, ottimo ma di corta focale, ma a quello di Asiago, la cui distanza focale al newtoniano è di 6 metri circa. Con ciò si ebbe anche, essendo 1 : 5 il rapporto focale, un maggior campo libero da coma. Alcune lastre blu dell'M 56 ci furono gentilmente date a tale scopo dal prof. Gennaro e due furono prese dal dott. Mannino. Oltre a queste, chi scrive eseguì ad Asiago, nel settembre 1949, una serie di fotografie su emulsione « ferrania » blu ed un'altra serie su « ferrania » pancro e filtro RG 1, con tempi di posa variabili tra una decina di minuti ed oltre un'ora. Questo materiale di Asiago è stato poi misurato a Bologna.

Come si è detto la fig. 1 della tavola fuori testo consente l'identificazione delle stelle che circondano l'ammasso da una distanza di 64″ a 4′.3 dal centro. Nella fig. 2 è riprodotta, più ingrandita, la regione centrale interna alla circonferenza di raggio 64″. Il cerchio è diviso nei quattro quadranti indicati con le lettere A, B, C, D ed in ciascun quadrante sono state numerate progressivamente le stelle che si sperava di poter misurare. La fotografia riprodotta ingrandita nella fig. 2, allo scopo di eliminare l'intenso fondo di deboli stelle che si aggrovigliano in questa zona e di porre in risalto le componenti più luminose quasi tutte di intenso color rosso, fu eseguita con materiale pancromatico e filtro RG 1.

TABELLA II.

Lastre di Asiago misurate a Bologna.

Lastra N.	Data	Qualità « ferrania » Filtro	Posa	Osservatore
—	1947 settembre 13	blu	60m	Mannino
863	1949 » 19	»	20	Rosino
872	» » 26	»	30	»
1212	1950 luglio 16	»	10	Mannino
869	1949 settembre 23	Superpancro RG 1	40	Rosino
870	» » 26	» »	62	»
871	» » 26	» »	62	»
878	» » 27	» »	30	»

Tabella III.

Catalogo delle grandezze e del colore di stelle dell' M 56.

N.	m_{ph}	m_r	c_r	N.	m_{ph}	m_r	c_r	N.	m_{ph}	m_r	c_r	N.	m_{ph}	m_r	c_r
1251	17.15	14.75	2.40	821	15.15	13.05	2.10	444	17.05	14.85	2.20	841	16.10	14.20	1.90
1271	14.85	13.00	1.85	822	16.65	15.15	1.50	445	16.85	14.85	2.00	842	16.35	14.35	2.00
1272	16.95	15.00	1.95	844	16.65	15.30	1.35	491	16.45	15.50	0.95	843	16.60	14.55	2.05
1281	16.80	15.50	1.30	895	16.55	15.25	1.30	4101	14.69	13.71	0.98	844	16.65	15.30	1.35
1291	16.65	14.65	2.00	8101	14.60	13.70	0.90	4102	16.43	14.80	1.63	845	16.95	14.85	2.10
				8102	16.15	14.45	1.70	4103	17.00	14.80	2.20	851	16.70	14.30	2.40
1131	15.69	13.82	1.87	8111	16.50	14.60	1.90	4104	17.45	15.05	2.40	852	16.50	14.75	1.75
1132	17.15	14.90	2.25					4111	14.90	12.74	2.16	853	17.35	14.95	2.40
1151	17.00	14.85	2.15	711	15.50	13.48	2.02	4112	16.70	14.80	1.90	854	17.35	14.95	2.40
1161	14.94	13.46	1.48	712	16.35	14.29	2.06	4121	15.00	12.95	2.05	855	17.55	15.15	2.40
1162	15.75	13.91	1.84	731	16.95	14.85	2.10					857	16.70	15.10	1.60
1163	16.65	15.35	1.30	732	17.30	15.25	2.05	331	15.40	14.10	1.30	859	17.8?	15.25	2.55
1171	16.90	14.95	1.95	733	16.90	14.85	2.05	361	13.95	13.06	0.89	8510	17.00	14.95	2.05
1181	17.35	15.20	2.15	7102	15.10	13.05	2.05	362*v*	14.70	12.25	2.45	861	16.20	14.25	1.95
1182	17.75	15.4?	2.35	7111	13.60	13.01	0.59	371	16.60	15.25	1.35	862	16.60	15.00	1.60
				7112	15.65	13.70	1.95	381	13.60	13.00	0.60	863	16.60	14.90	1.70
1031	16.65	15.25	1.40	7113	16.70	14.50	2.20	382	16.85	14.85	2.00	864*v*	15.75	14.45	1.30
1041	16.70	15.25	1.45	7114	17.00	14.90	2.10	391*v*	16.40	14.80	1.60	865	17.25	15.00	2.25
1042	16.95	15.05	1.90	7121	16.15	13.45	2.70	3111	16.55	14.40	2.15	871	15.20	12.85	2.35
1051	12.10	11.87	0.23	7122	15.80	13.75	2.05					872	16.65	15.25	1.40
1052	15.15	13.55	1.60					231	16.75	14.80	1.95	873	16.60	15.50	1.10
1053	16.30	15.10	1.20	611	17.25	15.00	2.25	232	16.65	14.85	1.80	874	16.60	15.25	1.35
1054	16.20	14.15	2.05	621	15.85	13.85	2.00	233	17.15	14.95	2.20	875	16.70	15.40	1.30
1055	15.85	14.00	1.85	622	17.15	15.00	2.15	241	16.85	14.75	2.10	881	15.15	13.05	2.10
1056	16.30	15.05	1.25	631	15.05	12.70	2.35	242	17.25	14.95	2.30	882	15.80	13.80	2.00
1061	15.21	13.25	1.96	632	15.20	13.00	2.20	251	16.90	15.70	1.20?	883	15.35	13.25	2.10
1062	15.90	14.41	1.49	633	16.50	15.10	1.40	261	14.80	12.80	2.00	885	16.70	15.20	1.50
1071	16.70	14.70	2.00	6101	16.70	14.65	2.05	262	16.00	14.65	1.35	886	17.05	14.95	2.10
1072	16.65	15.20	1.45	6111	15.41	13.55	1.86	263	16.35	13.90	2.45	887	16.70	15.20	1.50
1073	17.00	14.90	2.10	6112	15.27	14.23	1.04	267	17.55	15.05	2.50	888	17.05	14.95	2.10
1074	17.40	15.20	2.20	6121	13.98	12.83	1.15	271	16.25	14.65	1.60	889	16.20	14.80	1.40
1081	15.95	14.55	1.40					281	15.15	14.15	1.00	891	15.15	13.00	2.15
1091	16.60	15.4?	1.20	511	16.00	14.40	1.60	282	15.70	14.09	1.61	892	16.20	14.80	1.40
10101	15.65	13.65	2.00	521	15.20	14.15	1.05					893	16.55	15.10	1.45
10104	17.20	15.10	2.10	522	15.85	14.15	1.70	4141	16.45	14.75	1.70	894	16.50	14.50	2.00
				523	15.45	14.25	1.20					895	16.65	15.50?	1.15
921	16.90	14.60	2.30	524	16.90	14.70	2.20								
931	15.95	14.65	1.30	531	16.60	14.25	2.35					751	16.30	15.10	1.20
932	16.50	15.05	1.55	532	16.75	14.85	1.90	953	16.30	15.05	1.25	781	15.50	13.45	2.05
933	17.00	14.80	2.20	541	16.85	14.75	2.10	954	17.30	15.15	2.15	782	15.75	13.85	1.90
941	16.45	14.75	1.70	542	17.10	14.95	2.15	961*v*	14.75	12.31	2.44	783	16.60	14.70	1.90
951	15.32	13.42	1.90	591	15.85	14.05	1.80	962	15.10	13.26	1.84	786	16.70	14.55	2.15
952	14.82	14.53	0.29	592	16.75	14.60	2.15	964	16.30	15.00	1.30	785	17.00	14.90	2.10
981	13.33	12.58	0.75	593	16.65	15.5?	1.15	965	16.50	15.10	1.40	791	15.85	14.40	1.45
991	13.89	12.17	1.72	5101	17.50	15.25	2.25	966	16.25	14.30	1.95	793	16.75	14.70	2.05
992	16.85	14.80	2.05	5102	17.05	14.95	2.10	967	17.30	15.10	2.20				
993	16.55	15.25	1.30	5111	16.25	15.00	1.25	968	16.25	14.35	1.90	641	13.59	12.25	1.34
9101	15.17	14.06	1.11	5122	16.85	14.60	2.25	969	16.9?	14.80	2.10	643	15.70	14.45	1.25
9102	16.75	14.75	2.00					971	15.85	14.10	1.75	644	16.70	15.10	1.60
9103	16.45	15.40	1.05	431	16.45	15.10	1.35	972	16.80	14.65	2.15	646	17.25	14.85	2.40
9111	16.25	13.90	2.35	432	17.20	15.10	2.10	973	16.70	14.70	2.00	651	15.60	14.55	2.05
9112	16.05	14.60	1.45	433	17.20	15.00	2.20	974	16.45	14.60	1.85	652	16.50	14.95	1.55
9113	17.25	14.95	2.30	441	16.60	14.75	1.85	982	16.50	14.45	2.05	653	17.20	15.05	2.15
9114	17.20	15.00	2.20	442	16.45	15.00	1.45	983	17.25	15.05	2.20	654	16.80	15.40	1.40
9116	16.50	15.00	1.50	443	16.75	14.60	2.15	984	16.85	15.70?	1.15?	681	15.60	13.55	2.05

Segue: TABELLA III.

N.	m_{ph}	m_r	c_r	N.	m_{ph}	m_r	c_r	N.	m_{ph}	m_r	c_r	N.	m_{ph}	m_r	c_r
682	15.95	14.30	1.65	582	15.55	13.70	1.85					C–1	14.80	12.80	2.00
683	16.55	14.90	1.65	583	16.35	14.40	1.95	A–1*v*	13.90	12.20	1.70	C–2	15.15 ?	13.45	1.70
684	16.20	14.55	1.65	584	16.75	14.80	1.95	A–2	15.15	13.15	2.00	C–3	15.30	13.55	1.75
691	15.95	14.10	1.85	585	16.65	15.10	1.55	A–3	15.60	13.60	2.00	C–4	15.35	13.30	2.05
692	16.35	14.45	1.90	586	16.50	15.10	1.40	A–4	15.40	13.50	1.90	C–5	15.30	13.40	1.90
693	16.95	14.85	2.10	587	16.90	14.80	2.10	A–5	15.40	13.60	1.80	C–6	15.80	13.95	1.85
694	16.30	15.10	1.20	588	17.00	14.60	2.40	A–6	15.70	14.00	1.70	C–7	16.80	14.90	1.90
695	16.65	15.50	1.15	589	16.90	14.75	2.15	A–7	15.90	14.10	1.80	C–8	16.00	14.40	1.60
696	16.90	14.65	2.25	595	16.85	15.50	1.35	A–8	15.85	14.20	1.65	C–9	15.95	14.00	1.95
697	17.10	15.00	2.10	596	17.05	14.80	2.25	A–9	15.95	14.05	1.90	C–10	16.40	14.50	1.90
								A–10	15.90	14.30	1.60	C–11	16.70	14.70	2.00
543	17.50	14.95	2.55	451	16.30	14.50	1.80	A–11	16.40	14.70	1.70	C–12	15.85	14.20	1.65
546	17.70	14.60	2.10	453	17.30	14.90	2.40	A–13	16.55	14.70	1.85	C–14	15.75	14.00	1.75
551	13.07	12.53	0.54	461	13.60	12.80	0.80	A–14	16.45	14.95	1.50				
552	15.60	13.82	1.78	462	16.40	14.80	1.60	A–15	16.80	14.50	2.30	D–1	14.70	12.70	2.00
553	16.05	14.15	1.90	463	17.60	15.05	2.55	A–16	15.90	14.30	1.60	D–2	15.00	12.90	2.10
554	17.25	15.05	2.20	464	17.30	14.90	2.40					D–3	15.20	13.30	1.90
555	16.75	14.90	1.85	465	16.85	15.25	1.60	B–1	15.00	12.65	2.35	D–4	15.50	13.65	1.85
556	16.90	14.85	2.05	471	15.90	13.90	2.00	B–2	16.75	14.85	1.90	D–5	15.40	13.70	1.70
558	17.20	14.80	2.40	472	16.70	15.15	1.55	B–4	15.15	13.25	1.90	D 6	15.95	14.25	1.70
559	17.15	14.80	2.35	473	16.75	15.25	1.50	B–5	15.45	13.75	1.70	D–7	15.60	13.70	1.90
561	15.90	14.05	1.85	474	16.70	14.75	1.95	B–6	15.70	13.95	1.75	D–8	15.65	14.20	1.45
563	16.70	14.50	2.20	475	16.65	14.55	2.10	B–8	15.80	14.10	1.70	D–9	15.45	13.60	1.85
571	15.80	13.90	1.90	476	16.90	15.50	1.40	B–9	16.00	14.20	1.80	D–10	15.50	13.80	1.70
572	16.70	15.40 ?	1.30	477	16.35	15.25	1.10	B–10	15.85	14.15	1.70	D–11	16.85	15.30	1.55
573	16.80	15.50	1.30	481	15.85	14.00	1.85	B–17	16.60	14.60	2.00	D–12	16.70	14.70	2.00
574	17.20	14.80	2.40	482	17.00	14.80	2.20	B–18	16.40	15.20	1.20	D–13	16.75	14.60	2.15
581	15.15	12.85	2.30	483	16.80	15.30	1.50	B–19	15.70	14.10	1.60				

Si ritenne sufficiente limitare la ricerca di cui al capoverso *b*) del paragrafo precedente alla determinazione delle sole grandezze fotografiche e fotorosse, escludendosi le fotovisuali, che si erano invece determinate, per la sequenza standard, a scopo di controllo. Nell'esecuzione delle misure si adottò il seguente criterio. Tutte le stelle dell'anello più esterno furono misurate col fotometro fotoelettrico tipo Schilt dell'Osservatorio di Bologna su quattro delle migliori lastre blu e su quattro delle pancromatiche con filtro rosso, scelte tutte tra quelle di Asiago. I dati relativi a queste otto lastre sono raccolti nella tabella II. Nelle lastre blu 863 e 1212 e nelle due rosse 869 e 878 furono misurate al fotometro la maggior parte delle stelle dell'anello intermedio. Le misure in quest'anello furono poi ripetute direttamente a stima sulle lastre, esaminando la regione visualmente con un microscopio di circa cinque ingrandimenti, in due epoche diverse. Dei valori stimati, in ottimo accordo tra loro, e di quelli misurati fu fatta una media pesata secondo criteri dipendenti dalla posizione della stella, dalla sua vicinanza al centro ed a altre componenti, ecc. In generale l'accordo tra valori misurati e stimati è buono, ma come ci si avvicina alla zona centrale, l'occhio, che può scegliere e giudicare, stima meglio del fotometro. Perciò le grandezze delle componenti numerate nella fig. 2 della tavola fuori testo furono fatte dipendere unicamente da ripetute stime dirette.

Le grandezze fotografiche e fotorosse e gli indici di colore rossi così conclusi sono elencati nella tabella III. Le prime centotrentacinque stelle del Catalogo, dal n. 1251 al 141, si trovano nell'anello esterno; le centoventitre stelle seguenti, dal n. 953 al 483, sono nell'anello intermedio. Le altre cinquantadue appartengono al centro. L'errore probabile delle grandezze è, in media, sugli $0^m.03$ per le componenti dell'anello esterno, sugli $0^m.05$ in quello intermedio. Peso minore però si deve dare ai valori delle grandezze, quando si va al disotto della $17^m.3$ fotografica e della $15^m.2$ fotorossa. Nella zona centrale le stime sono state limitate alle stelle più luminose, ma l'incertezza è molto maggiore e comunque difficile da valutare. Si sono tuttavia scartate tutte quelle stelle le cui singole grandezze presentavano scarti superiori a $0^m.3$ dalla media.

Geodesia. — *Sul trasporto delle coordinate e dell'azimut lungo una geodetica e sul problema inverso sopra una superficie qualunque.* Nota di Massimo Mineo, presentata (*) dal Corrisp. C. Mineo.

1. Siano le coordinate u e v d'un punto di una geodetica della superficie definite in funzione dell'arco s, contato a partire da un punto (u_0, v_0) della geodetica. Introduciamo le *variabili normali* (Lipschitz):

$$(1) \qquad p = s\left(\frac{du}{ds}\right)_0 \quad , \quad q = s\left(\frac{dv}{ds}\right)_0 ,$$

dove le derivate du/ds, dv/ds s'intendono calcolate nel punto (u_0, v_0). Per teoremi ben noti sulla esistenza e unicità degl'integrali delle geodetiche, se i coefficienti E, F, G del quadrato dell'elemento lineare della superficie sono sviluppabili in serie di potenze di $u - u_0$ e $v - v_0$, si avranno le serie (1):

$$(2) \qquad \begin{cases} u = u_0 + p + a\ p^2 + b\ pq + c\ q^2 + \cdots, \\ v = v_0 + q + a_1 p^2 + b_1 pq + c_1 q^2 + \cdots, \end{cases}$$

dove $a, b, c, \cdots; a_1, b_1, c_1, \cdots$ sono determinate funzioni di u_0 e v_0.

Le (2) effettuano *in coordinate qualunque e su una superficie qualunque,* quello che i geodeti chiamano *trasporto delle coordinate lungo un arco di geodetica.*

La serie per il trasporto dell'azimut segue immediatamente.

Chiamando θ l'angolo che la geodetica forma con le linee $v = \text{cost.}$ si ha

$$\frac{d\theta}{ds} = A\frac{du}{ds} + B\frac{dv}{ds},$$

dove A e B sono funzioni di E, F, G e loro derivate prime.

(*) Nella seduta del 10 febbraio 1951.

(1) Vedi Darboux, *Lecons sur la théorie générale des surfaces.* Deuxième Partie, Paris 1889, p. 408 e seguenti.

E quindi si ha

$$\theta = \theta_0 + a_2 p + b_2 q + \cdots \tag{3}$$

Ma le variabili normali sono particolarmente vantaggiose nella geodesia, perchè permettono di risolvere il così detto problema inverso del trasporto, cioè la determinazione di s e degli azimut della geodetica negli estremi dell'arco, note che siano le coordinate curvilinee (u_0, v_0), (u, v) degli estremi dell'arco. Infatti, essendo il Jacobiano

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(p, q)}$$

eguale a 1 per $p = q = 0$, le serie (2) possono essere invertite e possono dare quindi p e q in serie ordinate secondo le potenze di $u - u_0$ e $v - v_0$ (convergenti, naturalmente, quando i moduli delle due differenze restano inferiori a un certo limite). Allora nel caso del problema inverso, potremo calcolare dapprima p e q, poi s dalla formula

$$s^2 = E_0 p^2 + 2 F_0 pq + G_0 q^2,$$

quindi $(du/ds)_0$, $(dv/ds)_0$, epperò θ_0, e infine dalla (3) si avrà θ.

Tutto ciò è stato notato e le formule per la risoluzione del problema inverso del trasporto sono state già date per l'Ellissoide di Bessel [2].

2. In questa Nota voglio trattare gli stessi problemi sopra una superficie qualunque, ma riferita a un sistema di coordinate geografiche, sia perchè le coordinate geografiche sono determinabili astronomicamente sia perchè non si può escludere che del Geoide si possano determinare, in un sistema di coordinate geografiche, i coefficienti delle due forme fondamentali, per mezzo di misure geodetico–astronomiche [3].

Chiamiamo φ la latitudine di un punto P della nostra superficie S (complemento dell'angolo, nel caso del Geoide, che la direzione positiva della normale alla S nel punto P forma con l'asse del mondo) e ω la longitudine di P (angolo diedro che il semipiano, contenente la retta per P parallela all'asse del mondo e la seminormale positiva P alla S, forma con un piano arbitrario parallelo all'asse del mondo).

(2) Vedi CORRADINO MINEO, *Nuova soluzione del problema inverso del trasporto delle coordinate lungo una geodetica.* Questi «Rendiconti», vol. XXIX, ser. V, seduta del 4 giugno 1920.

(3) Vedi VITERBI, *Sulla determinazione degli elementi intrinseci fondamentali della superficie terrestre mediante misure locali.* «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo», to. XXV, 1908; C. MINEO, *Sulle superficie riferite a un sistema geografico e sulla determinazione intrinseca del Geoide.* «Giornale di Matematiche di Battaglini», vol. XLVIII, 1910; REINA, *Sulla determinazione di porzioni della superficie del Geoide per mezzo di misure sopra di esse.* Questi «Rendiconti», dicembre 1917; C. MINEO, *Sulla determinazione intrinseca del Geoide.* «Memorie della Società Astronomica Italiana», nuova serie, vol. II, 1921.

Considerando, lungo una geodetica di S, le coordinate φ e ω come funzioni dell'arco s, le formule generali, valevoli per qualunque sistema di coordinate, dànno per la geodetica le due equazioni differenziali seguenti (4):

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\varphi}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & \end{matrix} \right\} \left(\dfrac{d\varphi}{ds}\right)^2 + 2 \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & \end{matrix} \right\} \dfrac{d\varphi}{ds}\dfrac{d\omega}{ds} + \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ 1 & \end{matrix} \right\} \left(\dfrac{d\omega}{ds}\right)^2 = 0, \\ \dfrac{d^2\omega}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{matrix} \right\} \left(\dfrac{d\varphi}{ds}\right)^2 + 2 \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & \end{matrix} \right\} \dfrac{d\varphi}{ds}\dfrac{d\omega}{ds} + \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ 2 & \end{matrix} \right\} \left(\dfrac{d\omega}{ds}\right)^2 = 0, \end{cases}$$

dove i simboli di Christoffel di 2ª specie s'intendono calcolati per la 1ª forma fondamentale della superficie

$$(5)\qquad ds^2 = E\,d\varphi^2 + 2F\,d\varphi\,d\omega + G\,d\omega^2.$$

Ma, come è noto, i coefficienti E, F, G sono dati in funzione dei coefficienti D, D′, D″ della 2ª forma fondamentale della S, per mezzo delle formule

$$(6)\qquad \begin{cases} E = D^2 + D'^2 \sec^2\varphi, \\ F = D'(D + D'' \sec^2\varphi), \\ G = D'^2 + D''^2 \sec^2\varphi, \end{cases}$$

e i simboli di Christoffel di 2ª specie, per mezzo delle (6), si esprimono in funzione di D, D′, D″ come segue (5)

$$(7)\qquad \begin{cases} \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & \end{matrix} \right\} = \dfrac{1}{\Delta}\left(D'' \dfrac{\partial D}{\partial\varphi} + D' \dfrac{\partial D}{\partial\omega} - 2D' \dfrac{\partial D'}{\partial\varphi}\right), \\ \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & \end{matrix} \right\} = \dfrac{1}{\Delta}\left(D'' \dfrac{\partial D}{\partial\omega} - D' \dfrac{\partial D''}{\partial\varphi}\right), \\ \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ 1 & \end{matrix} \right\} = \dfrac{1}{\Delta}\left(2D'' \dfrac{\partial D'}{\partial\omega} - D' \dfrac{\partial D''}{\partial\omega} - D'' \dfrac{\partial D''}{\partial\varphi}\right) - \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi, \\ \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{matrix} \right\} = \dfrac{1}{\Delta}\left(2D \dfrac{\partial D'}{\partial\varphi} - D' \dfrac{\partial D}{\partial\varphi} - D \dfrac{\partial D}{\partial\omega}\right), \\ \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & \end{matrix} \right\} = \dfrac{1}{\Delta}\left(D \dfrac{\partial D''}{\partial\varphi} - D' \dfrac{\partial D}{\partial\omega}\right) + \operatorname{tang}\varphi, \\ \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ 2 & \end{matrix} \right\} = \dfrac{1}{\Delta}\left(D \dfrac{\partial D''}{\partial\omega} + D' \dfrac{\partial D''}{\partial\varphi} - 2D' \dfrac{\partial D'}{\partial\omega}\right), \end{cases}$$

essendo

$$(8)\qquad \Delta = DD'' - D'^2.$$

(4) Vedi BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale*. 3ª ediz., vol. I, parte I, Bologna, 1927, p. 276.

(5) Vedi CORRADINO MINEO, Memoria citata del 1910, formole (9) e (13). È bene ricordare che fu primo il MINDING (*Ueber einige Grundformeln der Geodäsie*. « Journal fur die reine und angewandte Mathematik », 1852) a generalizzare ed estendere a una superficie qualunque la nozione di meridiani e paralleli (cfr. anche DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, vol. I, p. 311); ma un sistema completo di formole per la geometria delle superficie riferite a coordinate geografiche fu dato nella Memoria citata di C. MINEO. Si vedano anche dello stesso Autore: *Sistemi geografici sulle superficie*. « Periodico di Matematica », to. XXVI, fasc. 1) e *Sulle rappresentazioni geografiche d'una superficie su di un'altra*. (« Pubblicazioni del Circolo Matematico di Catania », vol. II, fasc. 3, 1924).

Continueremo a chiamare p e q le variabili di Lipschitz, che ora sono

$$(9) \qquad p = s\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)_0 \quad , \quad q = s\left(\frac{d\omega}{ds}\right)_0 ,$$

e intenderemo che l'arco della geodetica sia contato dal punto (φ_0 , ω_0).

Dalla forma delle (4) si scorge subito che $s^m (d^m \varphi/ds^m)_0$ e $s^m (d^m \omega/ds^m)_0$ sono forme di grado m nelle variabili p e q. Seguono quindi gli sviluppi

$$(10) \qquad \begin{cases} \varphi = \varphi_0 + p - \frac{1}{2}\left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & \end{matrix} \right\}_0 p^2 - \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & \end{matrix} \right\}_0 pq - \frac{1}{2}\left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ 1 & \end{matrix} \right\}_0 q^2 \cdots , \\ \omega = \omega_0 + q - \frac{1}{2}\left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{matrix} \right\}_0 p^2 - \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & \end{matrix} \right\}_0 pq - \frac{1}{2}\left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ 2 & \end{matrix} \right\}_0 q^2 \cdots , \end{cases}$$

che effettuano il trasporto di φ e ω lungo l'arco di geodetica uscente dal punto (φ_0 , ω_0).

Per il trasporto dell'azimut A della geodetica, basta ricordare il sistema di 1° ordine di Gauss delle geodetiche, che in coordinate geografiche è [1]:

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{D' - D \operatorname{tang} A \cos\varphi}{D' \operatorname{tang} A \cos\varphi - D''} \quad , \quad \frac{dA}{d\varphi} = \frac{(D' - D \operatorname{tang} A \cos\varphi) \operatorname{sen}\varphi}{D' \operatorname{tang} A \cos\varphi - D''} ,$$

dal quale discende:

$$\frac{dA}{ds} = \operatorname{sen}\varphi \frac{d\omega}{ds} \quad , \quad \frac{d^2 A}{ds^2} = \cos\varphi \frac{d\varphi}{ds}\frac{d\omega}{ds} + \operatorname{sen}\varphi \frac{d^2\omega}{ds^2} , \cdots$$

E quindi

$$(11) \qquad A = A_0 - q \operatorname{sen}\varphi_0 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\varphi_0 \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{matrix} \right\}_0 p^2 +$$

$$+ \left[\frac{1}{2}\cos\varphi_0 - \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & \end{matrix} \right\}_0 \operatorname{sen}\varphi_0 \right] pq - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\varphi_0 \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ 2 & \end{matrix} \right\}_0 q^2 + \cdots$$

Invertendo le (10) si ha:

$$(12) \qquad \begin{cases} p = \varphi - \varphi_0 + \frac{1}{2}\left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & \end{matrix} \right\}_0 (\varphi - \varphi_0)^2 + \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & \end{matrix} \right\}_0 (\varphi - \varphi_0)(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ 1 & \end{matrix} \right\}_0 (\omega - \omega_0)^2 \cdots , \\ q = \omega - \omega_0 + \frac{1}{2}\left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{matrix} \right\}_0 (\varphi - \varphi_0)^2 + \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & \end{matrix} \right\}_0 (\varphi - \varphi_0)(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ 2 & \end{matrix} \right\}_0 (\omega - \omega_0)^2 \cdots . \end{cases}$$

Nel caso del problema inverso, essendo noti i valori di $\varphi_0 , \omega_0 , \varphi , \omega$, le (12) dànno p e q. Note le quali, s è dato, tenendo presenti le (6), dalla

$$s^2 = E_0 p^2 + 2 F_0 pq + G_0 q^2 .$$

Noto s, si hanno $(d\varphi/ds)_0$ e $(d\omega/ds)_0$ dalle (9) e quindi A_0. Dalla (11), infine, si deduce l'azimut A.

Qui, per ragione di spazio, le serie si sono fermate ai termini di 2° grado; ma non ci sono difficoltà, se non la lunghezza dei calcoli, per proseguirle.

Fisica. — *Sulla propagazione degli ultrasuoni nei ferromagnetici* (*). Nota (**) di STEFANO PETRALIA, presentata dal Corrisp. G. VALLE.

Lo studio dei fenomeni connessi colla propagazione degli ultrasuoni (u. s.) nelle sostanze ferromagnetiche, sotto il duplice aspetto dell'influenza degli u. s. sulla magnetizzazione di tali corpi e dell'azione dello stato di magnetizzazione sulle costanti di propagazione degli u. s. (velocità, coefficiente di assorbimento ecc.) nei ferromagnetici, ha avuto fino adesso scarso sviluppo. Le conoscenze che si hanno oggi sul ferromagnetismo possono incoraggiare tale studio. Si può infatti prevedere un'azione degli u. s. sulla magnetizzazione di una sbarra ferromagnetica, se si pensa ai legami che intercorrono tra questa grandezza e le varie sollecitazioni elastiche, alle quali la sbarra può essere assoggettata. E in tal senso c'è qui da ricordare una ricerca di Hollmann e Bauch (1) sull'azione degli u. s. sui salti di Barkhausen, i quali si manifesterebbero nel materiale irradiato con campi magnetici d'intensità minore che nel normale: gli autori parlano impropriamente di un allentamento della compagine cristallina del ferromagnetico per effetto degli u. s. Altre ricerche sono state condotte da Schmid e Jetter (2), i quali trovano una più facile magnetizzazione in un campione di nichel vibrante longitudinalmente e dimostrano che ciò è connesso colla componente alternativa della pressione sonora. Per quanto riguarda l'altro aspetto del problema, l'influenza cioè della magnetizzazione sulla propagazione delle vibrazioni nei ferromagnetici, di recente Rogers e Johnson (3) hanno riscontrato, per onde trasversali propagantesi in una sbarra di nichel, un notevole effetto di un campo magnetico longitudinale sull'attenuazione di tali onde. L'effetto si manifesta come una riduzione dell'attenuazione, dipendente dall'intensità del campo, l'ampiezza degli impulsi ultrasonori trasmessi dalla sbarra potendo crescere fino a cento volte l'impulso trasmesso in assenza di campo.

Mi è sembrato necessario esaminare quest'ultimo aspetto del problema da un punto di vista più diretto, quale può essere quello della propagazione di onde elastiche longitudinali, e per materiali magnetici diversi dal nichel. Ho adoperato sbarre di acciaio dolce (Ø 1,8 cm, lunghezza variabile tra 25 e 68 cm); esse conservano un magnetismo residuo quando sono prese alla lunghezza massima di 68 cm, mentre alla lunghezza di 25 cm il campo smagnetizzante rapidamente annulla ogni magnetizzazione residua. Comunque per ora non ho condotto misure

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica dell'Università di Bologna.

(**) Pervenuta all'Accademia il 13 gennaio 1951.

(1) H. E. HOLLMANN e W. BAUCH, «Naturwiss.», *23*, 35 (1935).

(2) G. SCHMID e U. JETTER, «Z. Elektrochem.», *47*, 155 (1941); *48*, 227 (1942).

(3) T. F. ROGERS e S. J. JOHNSON, «J. App. Phys.», *21*, 1067 (1950).

precise al riguardo, mentre spero in seguito di poter estendere le ricerche a campioni di ferro dolce.

La disposizione sperimentale è molto semplice. La sbarra porta a una estremità, pressato attraverso un sottile strato di olio di paraffina, un cristallino di quarzo a taglio X, di frequenza fondamentale 800 kHz oppure 1500 kHz; con l'artificio di Gruetzmacher si è cercato di far irradiare il quarzo solo dalla parte a contatto con la sbarra, nella quale quindi vengono eccitate onde longitudinali. L'altra estremità di questa penetra in una vasca piena d'acqua, ove è posto, a distanza di 40 cm dalla superficie irradiante, un pendolo di torsione, che serve da rivelatore degli u. s., che trasmessi dalla sbarra si propagano nell'acqua; la superficie della paletta pendolare fa un angolo di circa 70° con la direzione di propagazione degli u. s. Alla frequenza maggiore si è fatto anche uso, per le misure dell'intensità degli u. s. di un metodo ottico, si è misurata cioè, mediante un fotomoltiplicatore (tipo 931 A) connesso a un galvanometro, l'intensità della luce diffratta, di primo ordine, dagli u. s. (onde progressive) che procedono nell'acqua della vasca. Il metodo, a parte la quistione della sensibilità, che può essere legata alla particolare disposizione sperimentale, ha il vantaggio di essere molto pronto rispetto al metodo meccanico. Naturalmente nei due casi non si misura tutta l'energia ultrasonora, che si propaga nella sbarra, data la riflessione che il fascio subisce al passaggio dal metallo all'acqua.

La sbarra è disposta nell'asse di un solenoide, lungo circa tanto quanto la sbarra stessa, e che serve a creare il campo magnetizzante. L'alimentazione e dell'oscillatore e della lampada, che illumina il reticolo ultrasonoro, è fatta in corrente continua e costante.

Sperimentando su una sbarra lunga 68 cm, si nota anzitutto che, al variare della frequenza della tensione oscillante applicata al quarzo, l'intensità del fascio ultrasonoro, che dalla sbarra penetra nell'acqua passa per dei massimi e dei minimi, intercalati da massimi secondari di minor ampiezza, massimi che naturalmente van crescendo d'intensità man mano che ci si avvicina alla frequenza propria del quarzo: la sbarra entra successivamente in risonanza per le frequenze per le quali la sua lunghezza uguaglia un multiplo intero di $\lambda/2$, essendo λ la lunghezza d'onda dell'oscillazione. La presenza dei massimi secondari, probabilmente, può essere connessa al fatto, che l'accoppiamento qui adottato tra sbarra e quarzo è il più stretto possibile, il che può perturbare la formazione di sistemi di onde stazionarie pure nella sbarra. Orbene regolata la frequenza *opportunamente* in vicinanza a un massimo di trasmissione, l'eccitazione del campo magnetico produce un notevole aumento nell'intensità ultrasonora.

Nella fig. 1 è riprodotta una curva, che dà la grandezza $I/I_0 - 1$, essendo I l'intensità ultrasonora, in unità arbitrarie, con campo, e I_0 l'intensità in mancanza di campo, in funzione del campo magnetizzante H, curva costruita coi dati di misure eseguite alla frequenza di 805 kHz col pendolo di torsione. Curve analoghe si ottengono alla frequenza superiore. Da essa curva risulta che le variazioni, che l'assorbimento ultrasonoro della sbarra subisce per effetto del campo, hanno lo stesso andamento di quello riferito per onde trasversali e per il nichel da R. e J, solo che l'intensità massima dell'effetto qui è molto minore: la moltiplica-

zione dell'ampiezza trasmessa può raggiungere valori compresi tra 5 e 6. L'esperienza dimostra inoltre, che l'azione del campo magnetizzante è indipendente dal senso di questo ed è pure indipendente dalla frequenza delle vibrazioni ultrasonore, almeno entro i limiti da 760 kHz a 1685 kHz. Coi successivi trattamenti magnetici la sbarra, che non è di ferro puro, subisce un invecchiamento, che rende meno evidente l'azione del campo.

Durante le osservazioni fatte col campo magnetico ho controllato sia la frequenza della tensione applicata al quarzo, che la corrente che lo attraversa, per rendermi conto se le variazioni nella trasmissione degli u. s. non dovessero ascriversi, in tutto o in parte, a uno spostamento di frequenza, dovuto a un'eventuale azione della sbarra magnetizzata sul circuito oscillante, benchè lontano, spostamento che avrebbe potuto determinare una formazione diversa di onde stazionarie nella sbarra, rispetto a quella esistente in assenza di campo. Effettivamente una lievissima alterazione di frequenza, nelle condizioni sperimentali da me realizzate si poteva osservare; essa però era dell'ordine di 100 Hz su 1600 kHz circa, e quindi, come è facile vedere, non era tale da modificare sensibilmente il sistema di onde stazionarie. La corrente, che attraversava il cristallo di quarzo, poteva subire col campo piccole variazioni, dell'ordine di un m. ampère su 160–170 m. ampères, e per qualche sbarra era un aumento, per qualche altra una diminuzione della corrente totale.

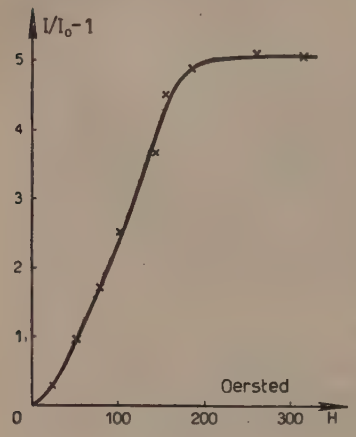


Fig. 1.

Comunque, per rendermi conto dell'influenza che un eventuale spostamento di frequenza, causato dalla magnetizzazione, potesse avere sull'attenuazione del fascio, poichè manifestamente analoghi spostamenti si possono imporre variando ad esempio la capacità del circuito LC dell'oscillatore, ho determinato (tabella I) col metodo ottico i valori I_{min} e I_{max} della corrente fotoelettrica per un minimo e il massimo successivo di trasmissione ultrasonora e alle frequenze limiti f_1 e f_2 ($f_1 > f_2$), che si avevano facendo variare l'anzidetta capacità di 25 pF (per cui più massimi passavano) e ciò a sbarra vergine o magnetizzata.

Come si vede i massimi a sbarra magnetizzata sono superiori a quelli che si hanno in assenza di campo, l'aumento dell'ampiezza ultrasonora essendo qui dell'ordine di 4–5.

Questo esperimento mi ha pure permesso di constatare, che la posizione dei massimi di trasmissione ultrasonora col campo non coincide, in frequenza, con la posizione degli stessi massimi in assenza di campo. Precisamente, regolata la frequenza dell'oscillatore al massimo di trasmissione senza campo, o a un valore lievemente inferiore, magnetizzando la sbarra si ha una diminuzione dell'inten-

sità del fascio trasmesso; che se invece la frequenza è alquanto superiore alla frequenza, cui corrisponde il massimo sopradetto, il campo aumenta l'intensità del fascio. L'effetto quindi si inverte da una parte e dall'altra di una qualunque frequenza di risonanza.

TABELLA I.

H		0	260 Oe.
f_1	I_{min}	$4.0{,}25 \cdot 10^{-7}$ amp.	$4.0{,}25 \cdot 10^{-7}$ amp.
	I_{max}	9 » »	26 » »
f_2	I_{min}	4,5 » »	4,8 » »
	I_{max}	13 » »	45 » »

Nella sbarra più corta da me adoperata, sempre dello stesso materiale, l'intensità ultrasonora all'uscita supera, in assenza di campo, quella che si raccoglie con la sbarra lunga, e manifestamente vi si potrebbe ricavare il valore del coefficiente d'assorbimento per le onde longitudinali, se si fosse sicuri che nei due casi l'accoppiamento con la sorgente risulta lo stesso. L'effetto del campo è meno intenso che per la sbarra lunga, ma è molto evidente lo spostamento nella posizione dei massimi di risonanza, che si ha con questo, e l'inversione nel segno della sua azione.

Cercheremo adesso di dare un'interpretazione di questi fatti, che potrà essere solo qualitativa, data la scarsa conoscenza che ancora oggi abbiamo del meccanismo della propagazione degli u. s. nei solidi e sulle cause che ne determinano l'affievolimento, come anche dei valori delle costanti del materiale, che possono essere interessate nella propagazione. Tra le cause determinanti l'assorbimento, oltre la diffusione nei granuli cristallini diversamente orientati nella massa, deve intervenire l'attrito interno del materiale, come già aveva riconosciuto Stokes. In corrispondenza si suole introdurre un modulo di Young complesso [4] $E - jE'$ e si definisce come fattore di perdita la grandezza $\varepsilon = E/E'$ indipendente dalla frequenza: esso è legato al decremento logaritmico ϑ delle oscillazioni nella sostanza dalla relazione $\vartheta = \pi\varepsilon$, mentre, se indichiamo con α il coefficiente d'assorbimento degli u. s. è $\alpha = \pi\varepsilon/\lambda$, con λ lunghezza d'onda. I valori di ε dipendono fortemente dalla purezza e dalla storia del materiale in esame; i dati sperimentali sopra di esso sono piuttosto scarsi, come scarse sono pure le conoscenze su α per le diverse sostanze solide.

Per i corpi ferromagnetici, e in particolare per il nichel, misure del decremento logaritmico sono state fatte da Giebe e Blechschmidt [5], i quali hanno

(4) Vedi, ad esempio, BERGMANN, *Der Ultraschall*, 5ª ediz., 1949.
(5) E. GIEBE e E. BLECHSCHMIDT, «Ann. d. Phys.», *11*, 905 (1931).

trovato il fatto notevole, che i valori di ϑ dipendono dallo stato di magnetizzazione della sostanza. Per il nichel duro ϑ aumenta col campo agente; per il nichel dolce esso diminuisce col campo, passando da $2{,}6 \cdot 10^{-2}$ in campo nullo al valore $1{,}7 \cdot 10^{-2}$ per un campo magnetizzante di 25 Oe. Siegel e Quimby [6], sperimentando anch'essi su un campione di nichel, trovano che il decremento decresce notevolmente, aumentando il campo magnetizzante a tutte le temperature al disotto del punto di Curie, tendendo al valore del decremento per materiali non ferromagnetici: dalle loro curve si può dedurre che, alla temperatura di 20–25° C, il decremento logaritmico passa da quasi $5 \cdot 10^{-2}$ per il campione vergine a $2 \cdot 10^{-3}$ per una magnetizzazione a saturazione.

Con riferimento ancora all'influenza dello stato di magnetizzazione sul decremento logaritmico di un ferromagnetico, è da citare una brillante esperienza di Becker e Kornetzki [7]. Questi autori facevano oscillare torsionalmente un filo di ferro estremamente dolce: le oscillazioni risultavano fortemente smorzate; facendo oscillare il filo in un campo magnetico di un centinaio di Oe diretto come l'asse del filo, lo smorzamento si riduceva a 1/10 del valore in assenza di campo. Secondo gli autori, quando il filo oscilla senza campo, l'energia elastica viene rapidamente spesa per produrre spostamenti di parete nei domini elementari di Weiss del ferromagnetico, cioè come energia necessaria per provocare processi irreversibili di magnetizzazione. Se agisce un campo esterno viene a mancare questa causa di dissipazione di energia.

Se allora per i ferromagnetici il decremento diminuisce quando sono magnetizzati, e sembra che effettivamente ciò sia vero almeno per quelli che chiamiamo dolci, le esperienze sulla propagazione di u. s. in tali sostanze, fatte da R. e J. e da me, possono interpretarsi dicendo che, per effetto del campo, il coefficiente di assorbimento α delle onde elastiche nei ferromagnetici viene a diminuire. In mancanza di dati precisi, dobbiamo contentarci di dedurre solo l'ordine di grandezza delle variazioni subìte da α. Ammettendo valida la legge d'assorbimento esponenziale, se α_1 e α_2 sono i coefficienti di assorbimento per il materiale vergine e per quello magnetizzato e poniamo $\alpha_1 = K\alpha_2$, indicando con I_1, I_2 le intensità ultrasonore nei due casi, dopo aver attraversato la sbarra lunga 68 cm., sarà $I_2/I_1 = \exp. \alpha_2 \cdot 68\,(K - 1)$. Se poniamo, come risulta dalle mie misure ai campi più elevati $I_2/I_1 = 5$ e per α_2, che dovrebbe essere prossimo al coefficiente d'assorbimento di una sostanza non ferromagnetica, un valore di 10^{-3} cm^{-1}, che probabilmente è piuttosto elevato, risulta $K \simeq 24$, valore che è in buon accordo col dato sopra riferito di Siegel e Quimby per il caso del nichel, differisce per un fattore 2 circa col dato di Becker e Kornetzki per il ferro; il disaccordo è invece rilevato coi risultati delle misure di ϑ di Giebe e Blechschmidt. Naturalmente i risultati di R. e J. richiedono un valore di K notevolmente superiore.

Per interpretare lo spostamento nella posizione dei massimi di risonanza operato dal campo e l'inversione nel segno della attenuazione, si può invocare

(6) S. Siegel e S. L. Quimby, «Phys. Rev.», *49*, 663 (1936).
(7) R. Becker e M. Kornetzki, «Z. Phys.», *88*, 634 (1934).

in via di tentativo, l'effetto ΔE, il fatto cioè che la magnetizzazione aumenta il modulo di Young dei ferromagnetici, e quindi accresce la velocità di onde elastiche che in essi si propaghino, e di conseguenza la lunghezza d'onda. L'esperienza fa vedere infatti che, se siamo in una posizione di risonanza, la corrente fotoelettrica, operando col metodo ottico, diminuisce magnetizzando la sbarra e si può ristabilire il massimo in queste condizioni riducendo la capacità del circuito oscillante, cioè aumentando la frequenza delle vibrazioni del quarzo. Viceversa per ottenere la stessa riduzione nella corrente fotoelettrica, e quindi la stessa variazione nella lunghezza d'onda, una volta che sia tolto il campo, bisogna diminuire alquanto la frequenza.

In una misura è risultata una variazione di frequenza di circa 900 Hz, per la sbarra lunga 25 cm, per il caso che il campo applicato raggiungeva i 320 Oe, la frequenza di risonanza essendo $N = 1653{,}8$ kHz. Naturalmente tale valore è piuttosto basso, dato che l'effetto del ΔE in tal caso è contrastato dalla riduzione che col campo ha subito il coefficiente α. E poichè per avere lo stesso $\Delta\lambda$, bisognerà operare una variazione di frequenza ΔN tale che sia $\Delta N/N = \Delta E/2E$, risulta $\Delta E/E$, comunemente inteso come effetto ΔE, dell'ordine di 10^{-3}, che è un valore abbastanza plausibile per il ferro e l'acciaio. Così Engler [8] riporta un valore massimo di $\Delta E/E$ per il ferro uguale a 0,003; Auwers [9] dice che per il ferro dolce alla saturazione il ΔE è molto al disotto dell'1 %, mentre per l'acciaio duro la sua esistenza non è dimostrabile con sicurezza; dell'ordine di 0,1–0,2 % sono pure le variazioni del modulo di Young del ferro Armco date da Cooke [10]. Per frequenze superiori a una frequenza di risonanza si sommeranno gli effetti di E e di α.

Concludendo si è qui dimostrata l'esistenza di una azione del campo magnetico sull'assorbimento di vibrazioni elastiche longitudinali in una sbarra di ferro, la quale azione deve pensarsi legata alla riduzione del decremento logaritmico per effetto della magnetizzazione. Si rileva inoltre che le apparenze del fenomeno sono complicate dalla variazione che il modulo di Young della sostanza subisce nel campo.

Da ultimo è mio gradito dovere ringraziare il Prof. G. Valle per le utili e proficue discussioni avute in questa ricerca.

(8) O. ENGLER, «Ann. d. Phys.», *31*, 145 (1938).
(9) O. v. AUWERS, «Ann. d. Phys.», *17*, 83 (1933).
(10) W. T. COOKE, «Phys. Rev.», *50*, 1158 (1936).

Fisica-tecnica (Acustica). — *Su alcune questioni analitiche concernenti il calcolo del coefficiente di assorbimento acustico di cilindri rivestiti di feltro di vetro*(*). Nota di MARIA JOSEPHA DE SCHWARZ, presentata(**) dal Socio M. PICONE.

L'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo in Roma fu incaricato dall'Istituto di Fisica Tecnica della Facoltà d'Ingegneria dell'Università di Roma di calcolare i valori del coefficiente di assorbimento acustico di cilindri rivestiti di feltro di vetro aventi i diametri

$$2a = 25, 40, 50 \text{ cm}$$

in corrispondenza alle frequenze seguenti

$$f = 129, 259, 517, 1035, 2069, 4138 \text{ Hz}.$$

Espongo in questa Nota come ho risolto la parte analitica e numerica di questo problema.

Cook e Chrzanowski(1) dànno per il coefficiente di assorbimento la formula

$$(1) \qquad \alpha_r = \frac{4}{\pi} \frac{|Z| \cos\delta}{\rho c} \left(\frac{1}{ka}\right)^2 \times \left\{ \frac{1}{|-(Z/\rho c)(J'_0 - iY'_0) + i(J_0 - iY_0)|^2} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{2}{|-(Z/\rho c)(J'_\mu - iY'_\mu) + i(J_\mu - Y_\mu)|^2} \right\}$$

ove

$$\frac{Z}{\rho c} = 2 - \frac{36}{13}\frac{i}{ka} \quad ; \quad \frac{|Z| \cos\delta}{\rho c} = \frac{Re(Z)}{\rho c} = 2 ;$$

$J_0, Y_0, J_\mu, Y_\mu (\mu = 1, 2, \cdots)$ sono le funzioni di Bessel, risp. di Neumann, dell'argomento ka, il quale è a sua volta definito per mezzo della

$$ka = \frac{2\pi fa}{c} = \frac{2\pi}{34\,100} \times f \times a .$$

Dopo una semplice trasformazione della formula (1) mediante applicazione delle note formule

$$J'_0 = -J_1, \; Y'_0 = -Y_1, \; 2J'_\mu = J_{\mu-1} - J_{\mu+1}, \; 2Y'_\mu = Y_{\mu-1} - Y_{\mu+1},$$

il problema si presenta nella forma seguente.

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, in Roma.

(**) Nella seduta del 13 gennaio 1951.

(1) *Absorption and Scattering by Sound Absorbent Cylinders.* « J. A. S. A. », vol. 4, aprile 1946, p. 318.

È da calcolare

$$(2)\quad \alpha_r = \frac{8}{\pi}\left(\frac{1}{ka}\right)^2 \times \left\{ \frac{1}{(2\,J_1 - (36/13)\,(1/ka)\,Y_1 + Y_0)^2 + (-2\,Y_1 - (36/13)\,(1/ka)\,J_1 + J_0)^2} + \sum_{\mu=1}^{8} \frac{2}{[-J_{\mu-1} + J_{\mu+1} + \frac{18}{13}\frac{1}{ka}(Y_{\mu-1} - Y_{\mu+1}) + Y_\mu]^2 + [Y_{\mu-1} - Y_{\mu+1} + \frac{18}{13}\frac{1}{ka}(J_{\mu-1} - J_{\mu+1}) + J_\mu]^2} \right\},$$

per i valori ka della Tabella I, corrispondenti nel modo indicato ai valori prescritti di $2a$ e di f.

TABELLA I.

Valori di ka.

$2a$ \ f	129	259	517	1035	2069	4138
25	0,297115435	0,596534090	1,190764960	2,383833140	4,765363059	9,530726119
40	0,475384696	0,954454544	1,905223936	3,814133024	7,624580895	15,249161790
50	0,594230870	1,193068180	2,381529919	4,767666280	9,530726119	19,061452237

La serie che figura in (2) converge, ciò che deriva dal fatto che le funzioni di Neumann per un valore assegnato dell'argomento tendono a $-\infty$ col crescere dell'ordine. Nell'appendice daremo una maggiorazione del resto della serie.

Per i piccoli valori di ka la convergenza è molto rapida. Per il valore più basso di ka corrispondente a $2a = 25$, $f = 129$ basta prendere $\mu = 1$. Invece per il valore più alto di ka è necessario considerare trenta termini della serie.

I valori delle funzioni di Bessel J_μ sono stati presi dalle tavole « The Annals of the Computation Laboratory of Harvard University », vol. III–X, interpolando in modo di avere dappertutto una esattezza di 1×10^{-7} circa. I valori delle funzioni di Neumann sono stati calcolati applicando la nota formula di ricorrenza

$$(3)\qquad Y_\mu(ka) = \frac{2(\mu-1)}{ka}\,Y_{\mu-1}(ka) - Y_{\mu-2}(ka).$$

I valori di partenza $Y_0(ka)$, $Y_1(ka)$ sono stati presi dalle Tavole « British Association Mathematical Tables VI » interpolando in modo da avere un'errore $< 0{,}5 \times 10^{-8}$. L'applicazione ripetuta della formula (3) diminuisce l'esattezza, però la perdita delle cifre non è tanto grande, dato che le funzioni di Neumann vanno crescendo (in valore assoluto) col crescere dell'ordine. Rimangono sempre almeno cinque cifre significative esatte. In ciascun caso i valori delle funzioni di Bessel e di Neumann sono stati controllati per mezzo della formula

$$Y_{\mu-1}(ka)\,J_\mu(ka) - Y_\mu(ka)\,J_{\mu-1}(ka) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{ka} \qquad (\mu = 1, 2, \cdots)$$

In questo modo abbiamo trovato la seguente Tabella II dei coefficienti di assorbimento:

TABELLA II.

Valori del coefficiente d'assorbimento α_r.

$2a$ \ f	129	259	517	1035	2069	4138
25	0,0599	0,1742	0,4491	0,9138	1,0126	1,0100
40	0,1309	0,2994	0,8080	0,9998	1,0146	0,9964
50	0,1734	0,4508	0,9135	1,0126	1,0100	0,9893

APPENDICE. – *Maggiorazione del resto della serie.*

$$(4)\qquad \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{2}{[-J_{\mu-1}+J_{\mu+1}+\frac{18}{13}\frac{1}{ka}(Y_{\mu-1}-Y_{\mu+1})+Y_{\mu}]^2+[Y_{\mu-1}-Y_{\mu+1}+\frac{18}{13}\frac{1}{ka}(J_{\mu-1}-J_{\mu+1})+J_{\mu}]^2}$$

ove le funzioni di Bessel e di Neumann si intendono funzioni dell'argomento ka.

Consideriamo una somma parziale di ordine m così grande da aversi

$$(5)\qquad m > ka$$

$$(6)\qquad Y_{m+\nu}(ka) < 0 \qquad (\nu \geq 0)$$

$$(7)\qquad -Y_{m+1}(ka) + Y_{m-1}(ka) = B > 0$$

(B essendo un numero positivo qualsiasi)

$$(8)\qquad J_{m+\nu}(ka) > 0$$

$$(9)\qquad \frac{\partial}{\partial \nu} J_{m+\nu}(ka) < 0 \qquad (\nu \geq 0).$$

Dimostriamo che dalle (5), (6), (7) segue

$$(10)\qquad -Y_{m+\nu+1} + Y_{m+\nu-1} > \left(\frac{m}{ka}\right)^{\nu}(-Y_{m+1} + Y_{m-1}) \qquad (\nu \geq 0).$$

Infatti, per la formula di ricorrenza, abbiamo

$$Y_{m+1} = \frac{2m}{ka} Y_m - Y_{m-1}$$

e per la (7)

$$Y_{m+1} = \frac{m}{ka} Y_m - \frac{B}{2}.$$

Sostituendo quest'espressione nella

$$Y_{m+2} = \frac{2(m+1)}{ka} Y_{m+1} - Y_m ,$$

troviamo

$$-Y_{m+2} + Y_m = 2\left(1 - \frac{m(m+1)}{(ka)^2}\right) Y_m + \frac{m+1}{ka} B .$$

Dalla (5) e dalla (6) segue

$$-Y_{m+2} + Y_m > \frac{m+1}{k} B > \frac{m}{ka} (-Y_{m+1} + Y_{m-1}) .$$

Ripetendo questo ragionamento ν volte troviamo la (10).
Evidentemente abbiamo per il resto m–esimo della serie (4)

$$= \sum_{\mu=m+1}^{\infty} \frac{2}{[-J_{\mu-1}+J_{\mu+1}+\frac{18}{13}\frac{1}{ka}(Y_{\mu-1}-Y_{\mu+1})+Y_\mu]^2+[Y_{\mu-1}-Y_{\mu+1}+\frac{18}{13}\frac{1}{ka}(J_{\mu-1}-J_{\mu+1})+J_\mu]^2} <$$

$$< \sum_{\mu=m+1}^{\infty} \frac{2}{[Y_{\mu-1} - Y_{\mu+1} + (18/13)(1/ka)(J_{\mu-1} - J_{\mu+1}) + J_\mu]^2}$$

e per mezzo della (8) e (9)

$$(11) \quad R_m < \sum_{\mu=m+1}^{\infty} \frac{2}{(Y_{\mu-1} - Y_{\mu+1})^2} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{(Y_{m+\nu-1} - Y_{m+\nu+1})^2} <$$

$$< \frac{2}{(Y_{m-1} - Y_{m+1})^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{ka}{m}\right)^\nu = \frac{2}{(Y_{m-1} - Y_{m+1})^2} \frac{ka}{m - ka} .$$

Sia per esempio m così grande che valgano le condizioni (5)···(9), avendosi inoltre

$$-Y_{m+1} + Y_{m-1} > \sqrt{2} \times 100 \quad ; \quad m > 1{,}5 \times ka .$$

Un tale valore di m è stato effettivamente considerato per ciascuno dei valori di ka della Tabella I.

Allora segue dalla (11) che l'errore commesso trascurando il resto della serie è inferiore a 2×10^{-4}. È anzi assai più piccolo, la maggioranza precedente essendo un po' grossolana.

Così i valori della Tabella II sono assicurati con le cifre indicate.

Geologia. — *Un giacimento sedimentogeno di magnetite nei Monti Peloritani* (*). Nota di CARLO EDOARDO BURCKHARDT, presentata(**) dal Socio R. FABIANI.

Durante le sistematiche ricerche geominerarie nei Monti Peloritani, svolte in questi anni dalla Società Anonima Forze Endogene Siciliane (S.A.F.E.S.), Palermo, sotto la direzione del prof. R. Fabiani, ho incontrato diversi giacimenti metalliferi che mi sembrano meritare una breve descrizione per la loro importanza in riferimento alla storia geologica della regione.

Come già detto in una precedente Nota (1), quasi tutte le mineralizzazioni della regione formano filoni od anche giacimenti metasomatici e portano minerali della fase idrotermale. Credo perciò di interesse poter segnalare la presenza di giacimenti di un tipo fondamentalmente diverso, come per esempio l'affioramento di magnetite di Buonavita.

Fig. 1. – Schizzo topografico della Sicilia N-E.

Questo giacimento si trova a pochi passi ad ovest dal gruppo di case sud della frazione di Buonavita, a circa 1 km 1/2 a WNW/W di Montagnareale ed a circa 3 km 1/4 ad ovest di Patti (fig. 1), in provincia di Messina (2).

Nelle vicinanze del giacimento affiorano le tipiche rocce del complesso autoctono delle filladi (3); filladi quarzitiche con sericite, localmente con albite ed oligoclasio, fino a filladi sericitiche o cloritiche con quarzo; più di rado anche quarziti sericitiche e cloritiche. Il rapporto tra le componenti principali – quarzo, sericite, clorite, albite ed oligoclasio – oscilla molto da uno strato all'altro e con esso variano anche colore, struttura e tessitura delle rocce, di modo che si trovano tutti i passaggi tra quarziti grigio chiare, quasi massicce, a tessitura granoblastica fino a filladi sericitiche grigio scure a nerastre, a scistosità marcatissima ed a tessitura lepidoblastica. Come componenti minori s'incontrano calcite (come minerale primario e specialmente come infiltrazioni secondarie), biotite

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Geologia Applicata dell'Università di Napoli.

(**) Nella seduta del 13 gennaio 1951.

(1) C. E. BURCKHARDT, *Risultati preliminari di nuove ricerche nei Monti Peloritani in Sicilia*. « Contributi di Scienze Geologiche », supplemento a « La Ricerca Scientifica », *20*, 57–59 (1950).

(2) A latitudine 38° 08′ 07″ nord e longitudine 2° 28′ 34″ est M. Mario secondo la carta dell'Istituto Geografico Militare alla scala 1 : 25.000, F° 252 II NE « S. Angelo di Brolo », stampa 1946.

(3) Cfr. C. E. BURCKHARDT, op. cit.

(spesso cloritizzata), minerali opachi (magnetite, pirite, sostanze limonitiche, sostanze carboniose), zoisite e tormalina. L'andamento di queste filladi è piuttosto irregolare ma, visto in grande, predominano in questo complesso pendenze tra i 10° ed i 35° verso nord fino NW. Nelle immediate vicinanze del giacimento di magnetite gli strati pendono con 30° fino 70° verso nord ± 20°.

La mineralizzazione – messa a nudo da qualche trincea – forma due banchi concordanti nelle filladi sericitiche che pendono in questo punto con 10° a 30° verso NNW. La potenza di ognuno dei due banchi arriva a 65 fino a 70 cm. Essi sono divisi da una sottile intercalazione di fillade sericitica dello spessore

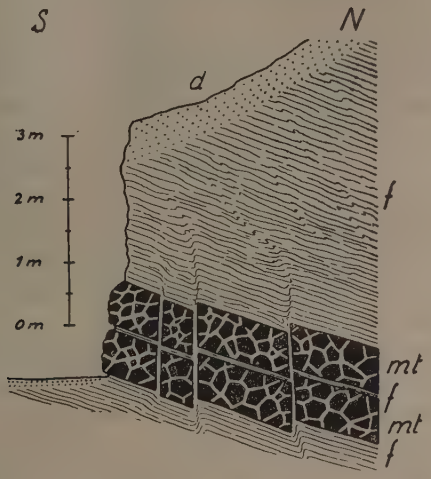


Fig. 2. – Sezione leggermente schematizzata attraverso il giacimento di magnetite di Buonavita.

d: detrito di falda. *f*: filladi sericitiche. *mt*: magnetite (con clorite e quarzo), attraversata da numerose fratture irregolari, rinsaldate da quarzo e calcite, e da qualche frattura beante.

di meno di 10 cm. La roccia mineralizzata, macroscopicamente nera, finemente granulosa e compatta, è attraversata da numerose piccole fratture appartenenti a due sistemi di faglie, l'uno con andamento N–S fino a NNE–SSW, l'altro perpendicolare al primo. Lungo queste fratture i singoli blocchi dei banchi mineralizzati si sono spostati di qualche cm o anche di qualche mm soltanto. Inoltre si vedono numerosissime fratture rinsaldate da quarzo e da calcite, che attraversano la roccia in tutte le direzioni. Queste fratture son dovute in parte alle sollecitazioni subite durante l'orogenesi alpina, parzialmente (e specialmente quelle beanti non saldate) anche a movimenti recenti di assestamento e di lento scivolamento di tutto il pendio verso valle. La figura 2 dà una sezione leggermente schematizzata attraverso la mineralizzazione.

Una ganga vera e propria non esiste. In sezione sottile si osserva come i granelli di magnetite, di forma angolosa e irregolare e della grandezza di 1/20 mm

fino a 1/4 mm, formano la maggior parte della roccia, la quale viene inoltre composta da scaglie di una clorite del tipo turingite-dafnite e da granelli di quarzo. Gli stessi fenomeni – granelli angolosi fino ad irregolari, talvolta anche peciloblastici, di magnetite, scagliette di clorite e granelli di quarzo – si vedono anche in sezione lucida, nella quale, in qualche raro campione, si incontrano inoltre piccolissimi granelli di calcopirite. Si tratta dunque di una roccia filladica, a tessitura granoblastica, nella quale la magnetite diventa il minerale predominante. Il contenuto in magnetite oscilla irregolarmente nei vari livelli dei due banchi da 25% a oltre 65% (di volume), ma rimane quasi costante in un medesimo livello.

Come già detto, il tipo di giacimento rappresentato da questo affioramento è fondamentalmente diverso da quello che si incontra normalmente nei Monti Peloritani. Difatti, in quasi tutti i posti, si osservano filoni o, più di rado, anche giacimenti metasomatici di un'associazione di minerali caratteristici per la fase idrotermale: pirite e pirrotina, calcopirite, galena e blenda, arsenopirite, antimonite, bournonite, jamesonite, tetraedrite ed altri sulfosali, in ganga di quarzo, fluorite, baritina, siderite ecc.

La magnetite di Buonavita certamente non appartiene a questa famiglia di giacimenti. Il minerale stesso si forma normalmente a temperature più elevate che i minerali sopra citati. Più indicativo però mi sembra il suo modo di presentarsi: banchi concordanti nelle filladi, mancanza di una ganga vera e propria, contenuto in magnetite quasi costante nello stesso strato, ma fortemente oscillante da un livello all'altro.

Date queste sue proprietà, mi sembra escluso che esso faccia parte dell'assieme di mineralizzazioni filoniano-idrotermali dei Peloritani, e che appartenga al medesimo ciclo minerogenetico. Ritengo invece che si tratti di un giacimento di origine sedimentaria, cioè di un'intercalazione nelle rocce pelitiche e psammitiche originariamente ricca in sostanze limonitiche o di altri minerali di ferro, e che la trasformazione del minerale di ferro in magnetite sia dovuta all'orogenesi alpina, durante la quale avveniva il grande carreggiamento della falda cristallina sulle filladi autoctone. A quanto mi consta sarebbe questo il primo esempio di un giacimento di origine sedimentaria segnalato nella catena metallifera dei Peloritani.

Nel chiudere questa breve Nota desidero ringraziare il prof. R. Fabiani dei suoi preziosi consigli e del suo interesse per i miei lavori, nonchè il prof. G. Ippolito, Presidente della S.A.F.E.S., che mi ha gentilmente permesso di pubblicare qualche risultato delle ricerche che questa Società sta svolgendo nella regione.

Biologia. — *Ciclo vitale e citomorfosi delle cellule nervose dei Vertebrati* (*). Nota di ALBERTO STEFANELLI, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

Dalle ricerche da me compiute, sulla determinazione istogenetica e sul differenziamento del neurone di Mauthner degli Ittiopsidi (1), sul destino dei centri della linea laterale degli Anfibi anuri (2) e sulla rigenerazione delle cellule nervose del midollo spinale caudale degli Anfibi urodeli (3), sono sorti alcuni fatti che, uniti ad alcuni risultati di altri autori che riferirò, rendono necessaria una messa a punto delle nostre attuali conoscenze sul ciclo biologico dei neuroni, dalla loro determinazione alla loro morte e sulle trasformazioni morfologiche che essi subiscono, ovvero, usando un termine espressivo di Minot (4), sulla loro citomorfosi.

Dopo le classiche ricerche di Bizozzero (5) e i contributi di molti altri autori che lo seguirono, la cellula nervosa viene considerata come il più tipico « elemento perenne »: i neuroblasti, determinati assai precocemente nell'embrione, subiscono un graduale differenziamento e un graduale accrescimento dimensionale che si accompagna con l'aumento di mole somatica dell'animale (come è stato ampiamente indagato dal Levi e dai suoi discepoli (6)), con un ciclo di vita che coincide con quello dell'individuo; inoltre, con la determinazione precoce cessa anche la moltiplicazione cellulare degli elementi del neuroepitelio embrionale e non è più possibile, nella quasi generalità dei casi, una determinazione di nuovi elementi più tardiva e tanto meno nell'adulto. La cellula nervosa subisce un processo di

(*) Dal Laboratorio di Istologia ed Embriologia della Facoltà di Scienze della Università di Roma.

(**) Nella seduta del 13 gennaio 1951.

(1) Rimando alla mia Memoria: *I fenomeni della determinazione, della regolazione e del differenziamento del sistema nervoso.* (« Mem. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. I, 27–114 (1947)), alla mia conferenza *Sviluppo, differenziamento e involuzione dell'elemento nervoso.* (« La Ricerca Scient. », *20*, 609–623 (1950)) e alla mia rivista monografica in corso di stampa nel « The Quarterly Review of Biology » marzo 1951. Vedi anche *Ricerche Morfo- e Fisio-ecologiche sull'apparato Mauthneriano.* (« Riv. di Biol. », *41*, 249–269 (1949)).

(2) ALBERTO STEFANELLI, *Considerazioni morfo-ecologiche e funzionali sulle cellule di Mauthner degli Anfibi Anuri.* (« Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. VII, 146–150 (1949)); ALBERTO STEFANELLI e ZACCHEI A., *Sull'origine dei centri cocleari studiata nella metamorfosi degli Anfibi anuri e con particolare riguardo nello « Xenopus laevis ».* (« Rend. Acc. Lincei », vol. VII, 358–361 (1950)).

(3) ALBERTO STEFANELLI, 1943. *Osservazioni sull'istogenesi del midollo spinale della coda rigenerata dei tritoni.* (« Boll. Soc. It. Biol. Sperim. », *19*, f. 10, 11, 12 (1944)); ALBERTO STEFANELLI e A. CAPRIATA, *La rigenerazione del midollo spinale nella coda rigenerata dei tritoni.* (« Ric. di Morfol. », *20–21*, 1–29 (1943)); ALBERTO STEFANELLI, G. THERMES e M. PODDIE, *La rigenerazione del midollo spinale delle larve di Anfibi anuri e sue relazioni con la corda dorsale.* (« Riv. Biol. », *42*, 239–264 (1950)).

(4) C. S. MINOT, *The problem of age, growth and death* (1908). – *Moderne probleme der Biologie.* (Fischer 1913).

(5) G. BIZOZZERO, *Accrescimento e rigenerazione nell'organismo.* (« Arc. Sci. Med. », *18* (1893)).

(6) Vedi trattato di Istologia del Levi (U.T.E.T., III Ed. 1946) a p. 680 e sg. e 795 e sg.

senescenza parallela a quello dell'organismo che si manifesta, morfologicamente, con fenestrature, corrosioni, produzione di parafiti, deposizione di pigmenti (lipocromi), modificazioni della tigroide ecc.

Non tutti i neuroni dei Vertebrati presentano però un simile ciclo vitale poichè ve ne sono di quelli il cui ciclo si esaurisce, fisiologicamente, assai prima di quello dell'insieme. Se la citomorfosi dei neuroni « perenni » è stata ampiamente seguita, sia nelle condizioni normali, come nei casi abnormi morbosi o sperimentali (amputazione del cilindrasse, azione di sostanze, iperattività funzionale, isolamento in cultura *in vitro* o *in vivo*, ecc.), poco nota è quella dei neuroni che fisiologicamente regrediscono, degenerano o si atrofizzano nel corso dello sviluppo embrionale o larvale per le scarse e poco accertate conoscenze in proposito. Le osservazioni, ormai non più recenti, sulla degenerazione di cellule nervose dei gangli spinali di embrioni di mammiferi e di pollo in condizioni normali (Collin, 1906; Ernst, 1926; Glücksam, 1930)[7] non erano assolutamente prive di critica per la difficoltà di una sicura dimostrazione di tali distruzioni (Chang, 1906)[8].

Alcuni casi di distruzioni di cellule nervose durante lo sviluppo sono tuttavia incontestabili, come quello di degenerazione di tutto il midollo spinale caudale, unitamente alla coda, nella metamorfosi degli Anfibi anuri; ma in questo caso si poteva pensare ad una condizione del tutto eccezionale collegata con la perdita dell'organo della natazione della larva, dipendente dalla particolarissima ecologia di questi animali in cui avviene il passaggio dalla condizione di vita acquatica a quella terragnola. Ma altri casi, già noti nella letteratura ed altri da me documentati, ci mostrano la distruzione di elementi nervosi differenziati nella compagine del sistema nervoso che si va sviluppando e differenziando.

Con questa Nota desidero appunto mettere nel giusto risalto questi fatti che, unitamente ai casi di determinazione assai tardiva, nell'adulto (come nella rigenerazione del midollo spinale codale degli Anfibi urodeli), modificano alquanto, o limitano, il concetto generale di « perennità » del neurone.

Uno degli esempi noti da più tempo di neuroni « transitori » è quello delle cellule dorsali del midollo spinale delle larve dei Selaci, Teleostei e Anfibi descritte dal Rhohn (1884) e da Beard (1892) e già da questi autori considerate esclusive dello stato larvale, sparendo poi nell'adulto. Tuttavia in seguito furono descritti degli elementi in alcuni Teleostei adulti (Fritsch, 1886; Kappers, Huber e Crosby, 1936) e nei Petromizonti (Freud, 1877; Beccari, 1909) che sono stati considerati come probabili derivati da quelle cellule embrionali. Negli Anfibi anuri adulti questi elementi, come io stesso ho potuto constatare, non sono più ritrovabili, ma la loro distruzione non è stata ancora documentata.

(7) R. Collin, *Recherches cytologiques sur le développement de la cellule nerveuse.* (« Le Nevraxe », *8*, 181-307 (1906)); M. Ernst, *Ueber Untergang von Zellen während der normalen Entwicklung bei Wierbeltiere.* (« Z. Anat. Entw. », *79*, 228-262 (1926)); A. Glucksmann, *Ueber die Bedeutung von Zellvorgangen für die Formbildungen epitelialer Organ.* (« Z. Anat. Entw. », *93*, 35-93 (1930)).

(8) Chang Tso-Kan, *Cellular Inclusions and Phagocutosys in normal development of mouse embryos.* (« Peking Nat. Hist. », *14*, 159-170 (1940)).

Gli Anfibi anuri ci offrono altri tipici esempi. Uno dei più notevoli è quello della atrofia dei centri della linea laterale che con la metamorfosi regrediscono parallelamente alla atrofia dei bottoni periferici della linea laterale. Era stata supposta da Larsell (1934)[9] una trasformazione di questi centri, con la metamorfosi, nei centri cocleari che si differenziano col passaggio alla vita terrestre, ma il caso da me illustrato, in collaborazione con la Zacchei[10], della coesistenza negli adulti di *Xenopus laevis*, sia dei centri della linea laterale che di quelli cocleari (in relazione all'adattamento dell'adulto di questa specie all'esclusivo ambiente acquatico, per cui anzichè atrofia, si ha un ulteriore sviluppo della linea laterale), dimostrano l'indipendenza di origine dei due centri e come quindi sia assai più attendibile che i centri laterali che spariscono negli altri anuri si distruggano anzichè trasformarsi.

Ma il caso più importante, perchè abbiamo potuto seguire, io e i miei collaboratori, tutta la citomorfosi sino alla distruzione, e anche per l'elevato grado di differenziamento raggiunto, è quello dei neuroni di Mauthner degli Anfibi anuri. La distruzione di questi neuroni giganti, adibiti, come ho posto in risalto e dimostrato con una estesa analisi comparativa, alla principale connessione tra i centri della linea laterale e i centri motori della natazione del tronco e della coda[11], è stata da me constatata in tutte le specie nostrane esaminate (*Rana esculenta, R. agilis, Hyla arborea, Discoglossus pictus*; nei bufonidi sono atrofici già nella larva[11]) e nello *Xenopus* dove, pur conservandosi e sviluppandosi la linea laterale, si distrugge tuttavia, con la coda, l'altro centro con cui i neuroni mauthneriani principalmente si collegavano. Baffoni e Catte[12], nel mio laboratorio, hanno esteso il reparto con lo studio della atrofia della cellula di Mauthner accelerando la metamorfosi con la somministrazione di tiroide.

Appare evidente come tutti questi casi di distruzione di elementi nervosi differenziati degli Anfibi anuri siano da mettersi in relazione con il cambiamento di ambiente e di comportamento e alla conseguente cessazione delle funzioni a cui questi neuroni erano adibiti in seguito alla distruzione di organi larvali con la metamorfosi.

In un recente lavoro di Hamburger e Levi Montalcini (1949)[13] è portata una convincente documentazione della degenerazione fisiologica di neuroni, che già hanno iniziato il differenziamento, nei gangli cervicali e toracici di embrioni di pollo già nel 5° e 6° giorno di incubazione, dando conferma e ampliando le osservazioni degli autori che ho già citati, e mettendo in luce una attività diffe-

(9) O. LARSELL, *The differentiation of peripheral and central acoustic apparatus in the frog.* (« J. Comp. Neur. », *60*, 473 (1934)).

(10) ALBERTO STEFANELLI, *Sui problemi del differenziamento e della involuzione indagati su un determinato elemento nervoso.* (« Rend. Acc. Naz. Lincei », vol. VIII, 59-64 (1950)).

(11) Vedi mio lavoro della Nota precedente e quello della A. ZACCHEI, *I centri tegmentali rombencefalici delle larve dei Bufonidi in relazione all'assenza dell'apparato mauthneriano.* (« Rend. Acc. Naz. Linc. », vol. VIII, 150-153 (1949)).

(12) Nota in corso di stampa in questi « Rendiconti ».

(13) HAMBURGER e R. LEVI-MONTALCINI, *Proliferation, differentiation and degeneration in the spinal ganglia of the chick embryo under normal and experimental conditions.* (« J. Exper. Zool. », *111*, 457-502 (1949)).

renziale del fenomeno degenerativo nei vari gangli e nelle diverse parti di uno stesso ganglio. Con tecniche adeguate è stato possibile distinguere questi elementi in degenerazione dai macrofagi (Chang).

Le condizioni di degenerazioni fisiologiche nella larva e queste nell'embrione ci fanno pensare come nella morfogenesi nervosa possano iniziare il differenziamento più neuroni di quelli che poi si conservano nell'adulto, con valore funzionale collegato a particolari condizioni transitorie dell'embrione e della larva. Negli animali con metamorfosi tipica, quali gli anuri, le distruzioni di neuroni differenziati appaiono più imponenti e più facilmente spiegabili da un punto di vista funzionale.

Il caso delle degenerazioni di cellule nervose gangliari di embrioni di pollo, di quei gangli che sono in rapporto con l'innervazione dei muscoli del volo, può essere messo in relazione con le modeste capacità di volo di questa specie adattata alla vita domestica. Sarebbe pertanto utile un confronto con le condizioni di uccelli sistematicamente affini, ma buoni volatori. Ricerche in corso nel mio Laboratorio mirano, su vario materiale, a valutare la portata del fenomeno.

Tenendo conto dei dati sin ora accertati sulla degenerazione fisiologica più o meno precoce di neuroni e di quelli sulla determinazione tardiva nell'adulto, ho cercato di tracciare, con lo schema che qui riporto (fig. 1), un quadro generale dei possibili fenomeni di citomorfosi dei neuroni dei Vertebrati in relazione al ciclo di vita dell'animale, sia nelle condizioni normali che in quelle abnormi, accidentali.

Nelle condizioni normali si possono distinguere tre gruppi di neuroni: I, *neuroni a ciclo embrionale*; II, *neuroni a ciclo larvale*; III, *neuroni perenni* (distinguibili a loro volta in quelli *con differenziamento precoce* e in quelli *con differenziamento tardivo*); un IV gruppo, quello dei *neuroni a determinazione tardiva* (nell'adulto), è caratteristico dei casi accidentali di rigenerazione (Urodeli).

Il caso per ora accertato di neuroni a ciclo embrionale è quello degli elementi gangliari di pollo, riferito da Hamburger e Levi-Montalcini. Esempi di neuroni a ciclo larvale sono quelli di Rohon-Beard del midollo spinale delle larve dei Pesci e Anfibi, quelli dei centri della linea laterale e le cellule di Mauthner delle larve degli Anuri.

La citomorfosi dei neuroni «perenni», di quelli cioè che rispondono completamente alla definizione di Bizozzero e che di norma degenerano solo con la morte dell'individuo, appare diversa nei Vertebrati con accrescimento indefinito del soma, quali sono alcuni Pesci e alcuni Rettili, in cui si osservano i più notevoli fenomeni di fenestratura (vedi, ad esempio, il caso descritto dal Levi nell'*Orthagoriscus mola*), e nei Vertebrati ad accrescimento definito dove i neuroni sono soggetti a quei tipici fenomeni di senescenza, parallelamente alla senescenza dell'individuo, caratterizzati dalla formazione di corrosioni, di parafiti, dalla deposizione di lipocromi, dalla modificazione della tigroide, ecc. Nei neuroni a differenziamento tardivo tali fenomeni non si osservano.

Nello schema ho anche indicato la modificazione morfologica della cellula e della tigroide (acido ribonucleico su un supporto proteico; vedi i lavori di Hyden, 1947, e Caspersson, 1947), durante l'attività funzionale di ordine fisiologico (cromatolisi), e in particolari condizioni accidentali o patologiche (vedi al riguardo i lavori di Marinesco, De Castro, Lugaro, ecc.), quali le alterazioni

Schema delle cromomorfosi delle cellule nervose dei Vertebrati

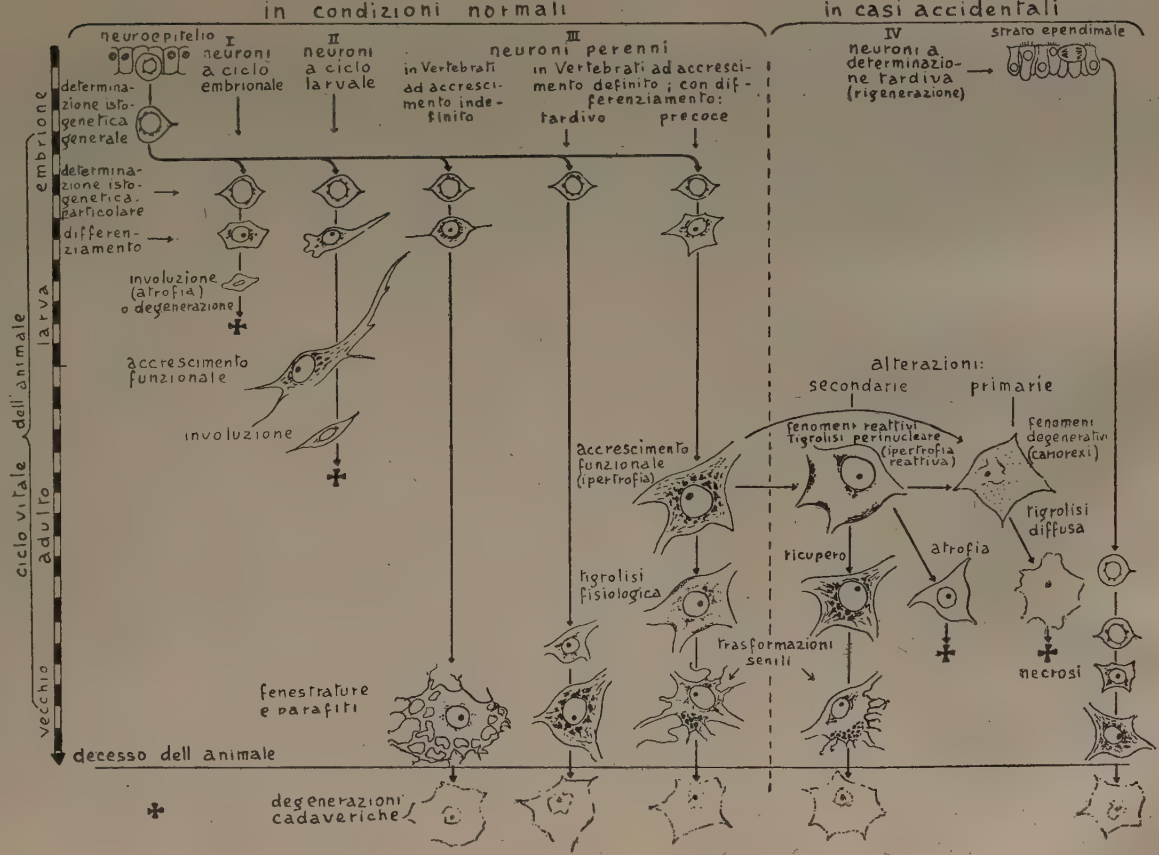


Fig. 1.

primarie che portano alla citolisi, previa cromatolisi diffusa e cariorexi, e quelle secondarie (provocate da eccesso di lavoro, dalla amputazione del cilindrasse e dalla sua rigenerazione, ecc.) che si manifestano con la cromatolisi perinucleare e la ipertrofia del corpo cellulare. Questa condizione può essere transitoria e essere seguìta da un ricupero che riporta il neurone alla normalità, o essere seguìta da atrofia e concludersi con la distruzione (come nei casi di mancata rigenerazione del cilindrasse amputato e mancato ripristino della funzione; vedi ad esempio i casi di impedita rigenerazione della coda dei Rettili: Baffoni 1950 [14]).

I neuroni del IV gruppo, a determinazione ritardata, sono rappresentati da quelli che si differenziano in fenomeni di rigenerazione nell'adulto per attività di elementi a carattere embrionale che si conservano nello strato ependimale: è questo il noto caso del midollo spinale caudale degli urodeli adulti che si rigenera, con la coda, in seguito ad amputazione della coda primitiva.

Con la illustrazione di questo schema ho voluto riunire in un quadro unitario le varie condizioni di citomorfosi dei neuroni dei Vertebrati, mettendo in giusta luce le condizioni di quei neuroni con ciclo vitale più breve di quello dell'intero organismo e che limitano il concetto di perennità abitualmente generalizzato alle cellule nervose nel loro complesso.

Biologia. — *Osservazioni sull'acido ribonucleico dell'oocite in crescita di «Myotis capaccini», Bonaparte* [*]. Nota di Salvatore Russo, presentata [**] dal Socio G. Cotronei.

Partendo dal lavoro di Cotronei (1910, 1911) [1, 2] sulla morfologia e sul significato fisico-chimico della fascia vitellogena dell'oocite in crescita dell'echinoderma *Antedon rosacea* numerose osservazioni sono state recentemente compiute nel nostro Istituto sulla natura dei nuclei vitellini delle varie specie animali. Le tecniche citochimiche adoperate secondo un metodo morfologico comparativo hanno permesso l'acquisizione di dati obbiettivi sulla costituzione chimica di queste formazioni cellulari e sulle analogie e differenze che esistono tra i vari tipi di nuclei vitellini delle specie studiate.

Le ricerche di Urbani su *Antedon rosacea* (1949) [3] *Pholcus phalangioides*, (1949) [4], *Tegenaria tridentina* (1949) [5], *Cavia cobaya* (1949) [5], quelle di Rognone su *Schizophyllum rutilans mediterraneum* (1949) [6] e di Glässer su

(14) G. Baffoni, *Fenomeni reattivi e degenerativi delle cellule nervose nei processi di cicatrizzazione del moncone caudale di Sauri.* («Rend. Acc. Naz. Lincei», vol. VIII, 389-393 (1950)).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata «G. B. Grassi» della Università di Roma.

(**) Nella seduta del 13 gennaio 1951.

(1) G. Cotronei, «Boll. Soc. Nat. Napoli», *24*, 155 (1910).

(2) G. Cotronei, «Mon. Zool.», *76*, 543 (1911).

(3) E. Urbani, «Rend. Acc. Naz. Lincei», *6*, 131 (1949).

(4) E. Urbani, «Rend. Acc. Naz. Lincei», *6*, 526 (1949).

(5) E. Urbani, «Rivista di Biologia», *41*, 331 (1949).

(6) L. Rognone, «Rend. Acc. Naz. Lincei», *7*, 164 (1949).

Amaurobius Erberi (1950) [7] condotte sugli oociti in crescita di queste specie hanno mostrato che le tipiche fasce vitellogene (*Antedon*, *Pholcus*), le zone vitellogene (*Schizophyllum*), le zone palliali (*Tegenaria*, *Amaurobius*), le « couches vitellogènes » (*Cavia*) sono tutte formazioni che si disgregano con l'accrescimento dell'oocite, quando si inizia la vitellogenesi e sono caratterizzate dalla presenza di ribonucleoprotidi; la presenza di acido ribonucleico avvalora l'ipotesi dei rapporti fra queste formazioni e la sintesi di vitello proteico. In alcuni nuclei vitellini dalla morfologia piuttosto complessa come ad esempio nella *Tegenaria tridentina*, la parte lamellare concentrica non presenta acido ribonucleico che alla sua periferia e non partecipa in modo evidente alla vitellogenesi perchè non si disgrega e può ritrovarsi nell'uovo deposto e anche, secondo alcuni Autori, per un certo tempo nell'embrione come una massa inerte. La parte lamellare che all'esame in luce U. V. su 2750 Å e con il reattivo di Millon rivela una costituzione proteica, probabilmente lipoproteica, ha quindi diverso destino e diversa costituzione chimica dalla zona palliale che la circonda e la sua funzione nell'oocite in crescita rimane enigmatica. Anche nell'oocite in crescita di cavia, come di altri Mammiferi è stato trovato un nucleo vitellino, ma l'acido ribonucleico si trova solamente nella « couche vitellogène » che scompare con l'accrescimento dell'oocite mentre il corpo centrale o corpo di Balbiani è totalmente o quasi sprovvisto di acido ribonucleico e all'esame citochimico rivela una costituzione proteica.

Da questa serie di ricerche alle quali ho brevemente accennato sono state tratte numerose considerazioni e conclusioni per le quali rinvio ai lavori citati e dalla indagine comparativa è emerso chiaro il fatto che tutti i nuclei vitellini esaminati presentano acido ribonucleico, però con topografia e quindi morfologia variabile.

Contributi ai rapporti tra acido ribonucleico e nuclei vitellini sono stati apportati anche da altri Autori, così Bradfield (1949) [8] ha visto che il nucleo vitellino di *Tegenaria* presenta acido ribonucleico ma non ha fatto distinzione tra zona palliale, parte lamellare e nucleo centrale che, come risulta dalle predette ricerche, hanno diverso valore e costituzione.

Recentissimamente Faurè–Fremiet, Courtines e Mugard (1950) [9] hanno studiato il comportamento dei corpi vitellini o « corpi acidofili » dell'oocite in crescita di *Glomeris marginata* e concludono per la presenza di ribonucleoprotidi e proteine basiche in queste formazioni. Questo lavoro conferma i risultati già in precedenza ottenuti nel nostro Istituto e gli Autori si riferiscono per l'origine di queste formazioni ribonucleiche alla teoria di Caspersson come già Urbani aveva prospettato (Urbani, « Rivista di Biol. », vol. 41, p. 356, 1949).

Fautrez (1950) [10] ha studiato il nucleo vitellino di *Pholcus phalangioides* ed ha visto la presenza di acido ribonucleico in questa formazione, confermando così le ricerche di Urbani, già pubblicate, su questo stesso materiale.

(7) A. GLÄSSER, « Rend. Acc. Naz. Lincei », *8*, 263 (1950).

(8) Comunicato al VI Int. Congr. Exp. Cytology nel 1947 e pubblicato nel 1949, su « Exp. Cell. Res. », Suppl. 1, p. 338.

(9) E. FAURÈ–FREMIET, H. COURTINES e H. MUGARD, « Exp. Cell. Res. », *1*, 253 (1950).

(10) J. FAUTREZ, « C. R. S. B. », *144*, 1129 (1950).

Dato l'interesse del problema dei rapporti tra acido ribonucleico e nuclei vitellini delle varie specie animali mi è stato affidato il compito di studiare la distribuzione di questo composto nell'oocite in crescita del pipistrello *Myotis capaccini*. Delle presenti osservazioni è stato già fatto cenno nel lavoro di Urbani (1949) [11, 12].

Sono note le classiche ricerche di Van Der Stricht (1905) [13] sugli oociti di *Vesperugo noctula* in cui esiste un nucleo vitellino dalla morfologia di un corpicciolo sferico paranucleare. Le osservazioni di questo Autore sono molto estese e sono costretto per ragioni di spazio a riportare solo le conclusioni fondamentali alle quali Van Der Stricht è giunto. Con la crescita dell'oocite anche il corpo vitellino si accresce e secondo questo Autore corrisponde alla sfera attrattiva di Van Beneden. A volte il corpo vitellino si sdoppia in due formazioni simili che rimangono circondate da una « couche corticale ». Nell'oocite ancora più accresciuto il corpo vitellino scompare senza che si possa dire con certezza quale sia il suo destino. Intorno al corpo vitellino esiste una « couche vitellogène » che, secondo Van Der Stricht, ingloba formazioni mitocondriali e che con l'accrescimento dell'oocite si disgrega e scompare come nella *Tegenaria* e nella *Cavia*. Dalla disgregazione di questa zona prendono origine quelle formazioni chiamate « pseudocromosomi » particolarmente evidenti in *V. noctula*. Gli pseudocromosomi infine si trasformano in « boyaux vitellogenes » voluminose e multiple. Queste « boyaux » si spostano dal centro dell'oocite verso la periferia e quivi si disgregano intervenendo con probabilità, secondo Van Der Stricht, nella genesi del deutoplasma. A misura che l'oocite si accresce e le « boyaux » scompaiono il citoplasma assume un aspetto alveolare.

Le mie osservazioni sono state compiute su ovai [14] di *Myotis capaccini* fissati in Bouin, Zenker, Helly, inclusi in paraffina sezionati a 7-10 *micron* e quindi trattati con la tecnica di Brachet (Zenker, Helly) per la rivelazione dell'acido ribonucleico. Alcune sezioni di ciascun ovaio sono state montate su quarzo e, senza essere state colorate, fotografate in luce ultravioletta su 2750 Å secondo la tecnica illustrata da Urbani nei suoi lavori. È stato anche di grande aiuto l'uso del microscopio in contrasto di fase per lo studio del corpo vitellino. Se le sezioni di ovaio vengono colorate con bleu di toluidina o con verde di metile-pironina si vede subito che la basofilia ooplasmatica è ridottissima a differenza delle cellule follicolari che si colorano vivacemente. Nei piccoli oociti è visibile per una delicata basofilia la « couche vitellogène » di Van der Stricht, più o meno addossata al nucleo. La vescicola germinativa presenta un reticolo cromatinico basofilo con uno o più nucleoli.

Il trattamento con ribonucleasi cristallizzata fa scomparire ogni affinità per la pironina delle formazioni indicate e rimangono colorati in verde solo i nuclei delle cellule follicolari. Con queste tecniche non è possibile, a questo stadio, scorgere altro; ma se lo stesso preparato viene osservato al microscopio in con-

(11) E. Urbani, « Boll. di Zool. », *16*, 151 (1949).

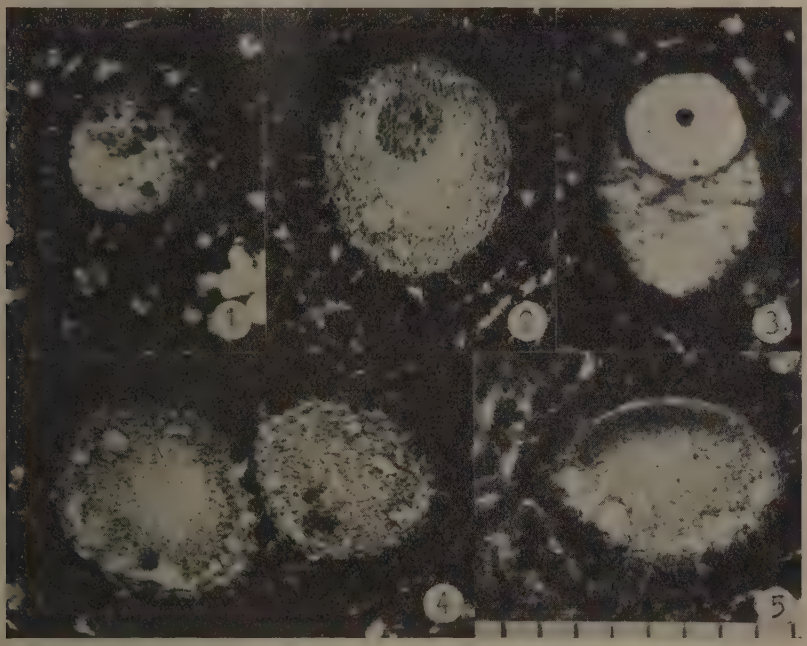
(12) Ringrazio il dott. E. Urbani che mi ha guidato nel presente lavoro.

(13) O. Van Der Stricht, « Arch. de Biol. », *21*, 1 (1905).

(14) Ringrazio il dott. G. M. Baffoni dell'Istituto di Zoologia della Università di Cagliari che ha raccolto e fissato il materiale.

trasto di fase si vede comparire, qualunque sia il fissativo usato, il corpo vitellino di aspetto sferico o ovale, qualche volta sdoppiato.

Nei piccoli oociti la fotografia in U. V. rivela il corpo vitellino che dà un discreto assorbimento (fig. 1 freccia) ma che solo in qualche caso si è debolmente colorato con la pironina e con il bleu di toluidina. Ciò dimostra che questa formazione non contiene quantità bene apprezzabili di acido ribonucleico e che quasi certamente ha una costituzione nella quale entrano proteine opache alla luce U. V. sulla lunghezza d'onda adoperata. L'acido ribonucleico invece si trova nella



Figg. 1–5. – Oociti di *Myotis capaccini*. Fotografie in U. V. su 2750 Å. Ogni unità della scala = 10 micron.

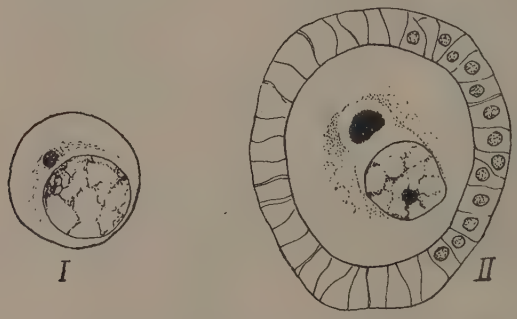
(Spiegazione nel testo)

« couche vitellogène » che è sicuramente identificabile solo nei piccoli oociti. Ciò conferma per questa specie di pipistrello quanto è stato visto da Urbani negli oociti di cavia. In uno stadio ulteriore di sviluppo si vedono o addossati alla vescicola germinativa o sparpagliati nell'ooplasma dei sottili filamenti basofili e opachi alla luce U. V. (fig. 3). La basofilia scompare a seguito di trattamento con la ribonucleasi mentre la opacità in luce U. V. diminuisce. Queste formazioni sono meno cospicue e più sottili di quelle descritte da Van Der Stricht come pseudocromosomi: le mie osservazioni mostrano che nella loro composizione è rilevabile acido ribonucleico. Negli oociti di pari dimensioni e in quelli più accresciuti fanno la loro comparsa delle sfere e degli ammassi che le tecniche da me usate mostrano carichi di acido ribonucleico e che sono identificabili con le « boyaux vitellogenes » di Van Der Stricht (fig. 4).

Con la frammentazione e la scomparsa delle « boyaux » l'ooplasma assume un aspetto vacuolare (fig. 2) ed in certi oociti è visibile una disposizione simmetrica dei vacuoli che si trovano prevalentemente a un emisfero dell'oocite e di granuli e sottilissimi filamenti contenenti acido ribonucleico che si trovano nell'emisfero opposto (fig. 5). Questo reperto coincide con quello di Dalcq e Seaton-Jones (1949)[15] nell'oocite di ratto dove questi Autori vedono una simmetria bilaterale nella disposizione dei granuli ribonucleoprotidici e dei vacuoli.

Lo scarso contenuto in acido ribonucleico degli oociti di pipistrello come degli oociti di cavia, in confronto alle altre specie che sono state studiate, non deve destare meraviglia se si tiene presente che negli oociti dei Mammiferi, ad esclusione dei marsupiali e dei monotremi, la vitellogenesi è estremamente ridotta.

In conclusione le mie osservazioni hanno mostrato che negli oociti di *Myotis capaccini* è presente un nucleo vitellino che presenta le stesse caratteristiche morfologiche di quello descritto da Van Der Stricht in *V. noctula*. Questo cor-



picciolo è sprovvisto di acido ribonucleico sicuramente e costantemente rivelabile con le tecniche usate; probabilmente come nel corpo vitellino della cavia questo composto se è presente lo è solo in minima quantità. Acido ribonucleico si trova nella « couche vitellogène » e in maniera evidente nelle « boyaux vitellogenes » e queste formazioni possono considerarsi simili (sotto certi aspetti: composizione, comportamento) alle fasce vitellogene di *Antedon* e *Pholcus* e alle zone vitellogene e palliali di *Schizophyllum*, *Tegenaria*, *Amaurobius*; la « couche vitellogène » di pipistrello è meno evidente di quella di cavia ma presenta le stesse caratteristiche. I disegni schematici I e II (il II ricavato da fotografia eseguita al microscopio a contrasto di fase) mostrano la disposizione, in due oociti di pipistrello, della « couche vitellogène » e del nucleo vitellino. La ricchezza in acido ribonucleico delle « boyaux » avvalora l'ipotesi dei rapporti tra queste e la sintesi del vitello. I sottili filamenti simili agli pseudocromosomi descritti da Van Der Stricht presentano acido ribonucleico ma non posso dire quali siano i rapporti di dipendenza tra questi e la « couche vitellogène » da una parte e le « boyaux » dall'altra perchè, per ora, nessun dato obbiettivo è risultato dalle mie osservazioni per poter confermare o infirmare i reperti di Van Der Stricht in proposito.

(15) A. Dalcq e A. Seaton-Jones, « Acad. Roy. Belgique », *35*, 500 (1949).

Fisiologia. — *Ricerche elettroforetiche sulle proteine dei muscoli lisci di Mammiferi*(*). Nota di PAOLO CREPAX, presentata(**) dal Corrisp. G. C. PUPILLI.

Mentre lo studio delle proteine dei muscoli striati ha conosciuto in questi anni grandi progressi [Szent-Györgyi (1), Bailey (2), Dubuisson (3)], assai scarsi sono i contributi relativi alla costituzione proteica dei muscoli lisci di Vertebrati: la conoscenza di questa riveste certamente singolare interesse per il fisiologo, date le peculiari proprietà funzionali di tali muscoli.

Le osservazioni più antiche riassunte da von Fürth (4) e da Lovatt Evans (5), non si prestano a confronti proficui a causa delle difficoltà che s'incontrano nello stabilire corrispondenze precise tra frazioni proteiche isolate in condizioni tecniche diverse da quelle attualmente in uso, fissate nelle loro linee generali in seguito ai lavori fondamentali di Howe (6), Weber (7) ed Edsall (8). Queste limitazioni valgono anche per frazioni proteiche, come la miosina, che hanno mantenuto attraverso gli anni e il generale rinnovamento dei procedimenti preparatorî, una stessa denominazione.

Una proteina dell'intestino di bue è stata isolata più recentemente da Mehl (9), che dapprima ne ha rilevato le analogie con la miosina; una tale identificazione poi è stata esclusa dallo stesso A. [Mehl (10); cfr. anche Bailey (2)]. Delle ricerche di Csapò (11, 12, 13) sulle globuline muscolari dell'utero di specie diverse, i cui risultati per la natura dei tessuti e per le condizioni tecniche nelle quali le ricerche stesse furono eseguite meglio si prestano ad essere confrontati con quelli da me ottenuti, sarà detto in sede di discussione. Tali ricerche sono le sole a me note che applichino alla muscolatura liscia dei Vertebrati i nuovi concetti [Szent-Györgyi (1)] relativi alla complessità della frazione «miosina» estraibile dai muscoli scheletrici, quale era definita in base alle condizioni formulate da Weber ed Edsall: la miosina di Weber-Edsall, ottenibile con un'estrazione di breve durata (da 20 minuti a 2 h: miosina A di Szent-Györgyi) consta di miosina propriamente detta

(*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Biologia generale dell'Università di Liegi.
(**) Nella seduta del 13 gennaio 1951.
(1) A. SZENT-GYÖRGYI, *Muscular contraction*. New York, Acad. Press. Inc. (1947).
(2) K. BAILEY, «Adv. Prot. Chem.», I, 289 (1944).
(3) M. DUBUISSON, *Exposés annuels de Biochimie médicale*. IX sér. Paris, Masson et C.ie (1948).
(4) O. VON FÜRTH, «Erg. Physiol.», XVII, 363 (1919).
(5) C. LOVATT EVANS, «Physiol. Rev.», VI, 358 (1926).
(6) P. E. HOWE, «J. biol. Chem.», LXI, 493 (1924).
(7) H H. WEBER, «Biochem. Z.», CLVIII, 443 e 473 (1925).
(8) J. T. EDSALL, «J. biol. Chem.», LXXXIX, 289 (1930).
(9) J. W. MEHL, «Proc. amer. Soc. biol. Chem.», LXXXIII, 32 (1938).
(10) J. W. MEHL, «Biol. Bull.», LXXIX, 488 (1940).
(11) A. CSAPÒ, «Nature», CLXII, 218 (1948).
(12) A. CSAPÒ, «Nature», CLXIV, 702 (1949).
(13) A. CSAPÒ, «Amer. J. Physiol.», CLX, 46 (1950).

(che corrisponde alla miosina β, individuata mediante analisi elettroforetica da Dubuisson) e actomiosina (miosina α di Dubuisson), quest'ultima risultante dalla combinazione della miosina propriamente detta con una proteina dello stroma, l'actina. Prolungando la durata dell'estrazione, la quantità di actomiosina aumenta continuamente mentre diminuisce quella di miosina: l'elevata viscosità, l'intensa torbidezza e la persistente birefrangenza da flusso proprie degli estratti di lunga durata (miosina B di Szent-Györgyi) sono tutte proprietà da ricondurre al loro elevato tenore in actomiosina, che in massimo grado le possiede. Per contro, la

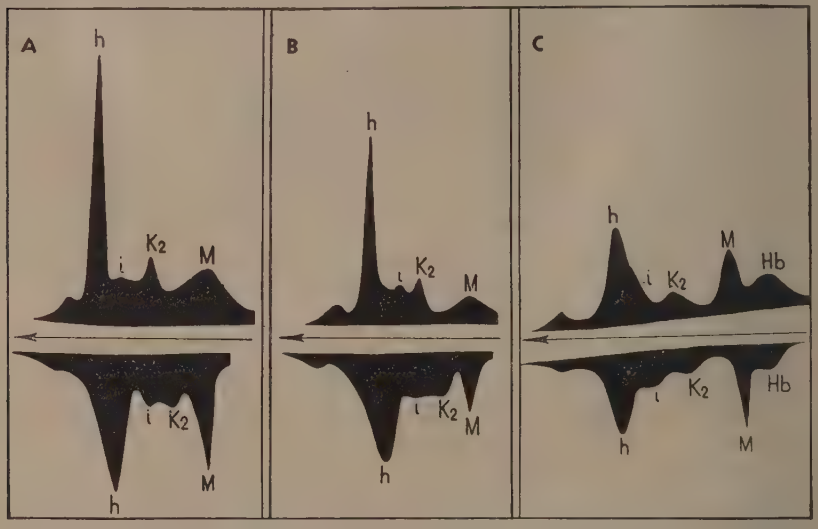


Fig. 1. – Proteinogrammi elettroforetici di estratti di uteri di Coniglia ottenuti a deboli forze ioniche, rispettivamente (A) da un utero vergine, (B) da un utero in gravidanza poco avanzata, (C) da un utero in gravidanza assai avanzata. A) Esp. 145: 165 minuti di elettroforesi a 3,9 V/cm; pH 7,56; μ 0,10. B) Esp. 155: 159 minuti di elettroforesi a 3,5 V/cm; pH 7,6; μ 0,10. C) Esp. 106: 316 minuti di elettroforesi a 2,6 V/cm; pH 7,2; μ 0,10.

miosina propriamente detta, quando si riesca a ottenerla veramente pura, non è torbida e viscosa, nè presenta birefrangenza da flusso.

Sono state studiate le proteine dei seguenti organi: utero di Coniglia, non gravido ed in fasi diverse di gravidanza, utero e vescica di Vitella. Le parti non muscolari di detti organi erano accuratamente dissecate e rimosse.

1. Costituenti solubili a deboli forze ioniche ($\leq \mu$ 0,10). – Nella fig. 1 A è riprodotto il tracciato elettroforetico di un estratto totale di utero di Coniglia, non gravido, ottenuto e dializzato alla forza ionica di 0,10. Le proprietà elettrocinetiche del gradiente M permettono d'identificarlo col gradiente comune in cui si raccolgono nelle fasi iniziali della separazione elettroforetica, i miogeni ($n + m + l$) presenti nei tracciati di muscoli scheletrici: esso può dividersi in due costituenti, dei quali il più lento ha una velocità che corrisponde a quella di $m + n$ e il più rapido la velocità di l. Lo sviluppo del gradiente M è abbastanza variabile,

indipendentemente dalle condizioni d'estrazione e dalle condizioni anatomofisiologiche dell'organo. Le proprietà elettrocinetiche dei gradienti indicati nella figura con le lettere k_2 ed i non sono identiche a quelle dei gradienti di egual nome reperibili in estratti di muscoli scheletrici e di miocardio (leggermente più forte quella di k_2, leggermente più debole quella di i); inoltre il gradiente i è presente anche negli estratti dializzati a valori di pH inferiori a 7,0 e questo non succede, per esempio, nel caso del gradiente i reperibile negli estratti di miocardio [Crepax [14]].

Le proprietà elettrocinetiche del gradiente h (mioalbumina) corrispondono a quelle del costituente dello stesso nome descritto nei tracciati di muscoli scheletrici e di miocardio [Crepax [14]]: lo sviluppo di tale gradiente dipende dalle condizioni anatomofisiologiche dell'organo, come appare dal confronto tra la fig. 1 A con le figure 1 B ed 1 C, che riproducono rispettivamente i tracciati elettroforetici di estratti ricavati da utero non gravido (A), in gravidanza iniziale (B) e in gravidanza assai avanzata (C). La quantità di mioalbumina decresce nell'ordine. I diagrammi elettroforetici presentano pure costantemente un gradiente di piccola superficie, più rapido di h ($-9{,}0\times10^{-5}$ V/cm a pH 7,6; $-8{,}0\times10^{-5}$ V/cm a pH 6,8), che non corrisponde ad alcun gradiente reperibile negli estratti di muscoli scheletrici e di miocardio.

I tracciati elettroforetici di estratti ottenuti a deboli forze ioniche da utero e vescica di Vitella presentano caratteristiche analoghe a quelle descritte.

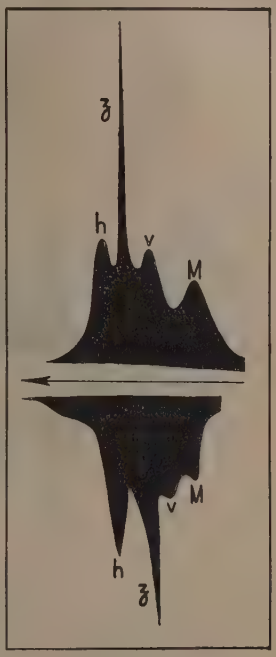


Fig. 2. – Proteinogramma elettroforetico di un estratto di utero di Coniglia in gravidanza di media età ottenuto ad elevata forza ionica. Esp. 180: estrazione di 20 minuti con 1,5 ml di soluzione 0,5 M di KCl e con l'aggiunta di 4,0 mg di ATP per g di muscolo; 401 min di elettroforesi a 1,9 V/cm; pH 7,1; μ 0,35.

2. COSTITUENTI SOLUBILI A FORZE IONICHE ELEVATE ($\geqq \mu$ 0,35). – Estraendo utero gravido di Coniglia con soluzioni di più elevata forza ionica, si osserva la comparsa di due nuovi gradienti (fig. 2), indicati con le lettere v e ζ, le cui velocità di migrazione anodica (a pH 7,1; μ 0,35) sono le seguenti: $-2{,}5\times10^{-5}$ V/cm per il più lento (v) e $-3{,}5\times$ $\times10^{-5}$ V/cm per il più rapido (ζ). Il passaggio in soluzione delle proteine che si raccolgono in tali gradienti comincia a prodursi, quando la forza ionica della soluzione d'estrazione raggiunge un valore di 0,35; esso è grandemente influenzato dalle condizioni anatomofisiologiche dell'organo: così, mentre una soluzione di forza ionica 0,35 è sufficiente a estrarne una quantità considerevole da un utero in gravidanza avanzata (fig. 3 B), soluzioni di forza ionica più elevata (μ 0,6–1,0) ovvero costituite da ioni particolarmente attivi, come soluzioni di KI [Dubuis-

(14) P. CREPAX, «Boll. Soc. it. Biol. sper.», XXVI, in corso di stampa (1950).

son [15]] non estraggono che quantità modeste dei costituenti medesimi, quando l'utero non è gravido o la gravidanza è iniziale (fig. 3 A); questo si verifica anche in presenza di quantità addizionali di ATP (3,0 mg per g di tessuto). Sicchè il comportamento di tali proteine è inverso di quello della mioalbumina. Quanto alle proprietà delle medesime che meglio possono servire alla loro identificazione, faccio presente come anche gli estratti che le contengono in maggior quantità non siano nè viscosi nè torbidi e non presentino birefrangenza da flusso. La durata

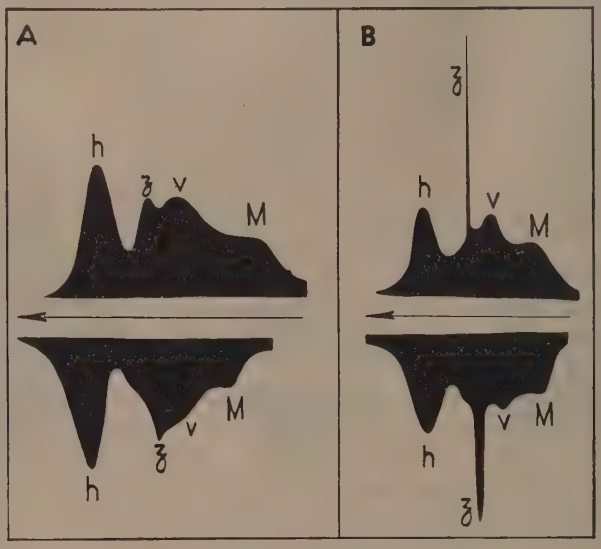


Fig. 3. – Proteinogrammi elettroforetici di estratti di utero di Coniglia in gravidanza iniziale (A) ed avanzata (B). A (Esp. 156): estrazione di 1 h con 2 ml di soluzione di Weber–Edsall (μ 0,67) per g di muscolo; 593 minuti di elettroforesi a 1,8 V/cm; pH 7,1; μ 0,35; B (Esp. 54): estrazione di 1 h con 2 ml di soluzione salina (NaCl+fosfati) della forza ionica di 0,35; 442 minuti d'elettroforesi a 1,5 V/cm; pH 7,1; μ 0,35.

dell'estrazione (tra 1 e 24 h) non muta le proporzioni relative dei due gradienti, nè i caratteri macroscopici dei prodotti ottenibili.

Gradienti di proprietà elettrocinetiche identiche caratterizzano, del pari, gli estratti di utero e vescica di Vitella, ottenuti a forze ioniche elevate. Negli estratti di utero di Vitella la loro quantità complessiva è sempre assai piccola (dell'ordine di quella presente nel tracciato della fig. 3 A), per quanto si aumenti il potere solvente delle soluzioni impiegate, mentre dalla vescica una soluzione della forza ionica di 0,35 estrae già la quantità massima possibile dei costituenti medesimi (fig. 4). I quali per ogni altro carattere (comportamento in relazione con la durata dell'estrazione, viscosità, torbidezza, birefrangenza da flusso) sono identici a quelli

(15) M. Dubuisson, « Biochim. biophys. Acta », V, 489 (1950).

presenti negli estratti di utero di Coniglia e di Vitella. Ho cercato d'isolare tali costituenti, adottando le condizioni che si seguono per la preparazione della miosina nel muscolo scheletrico, secondo Edsall [8]. Come in quest'ultimo caso, l'abbassamento della forza ionica del mezzo (addizione di 5–10 volumi di acqua distillata ghiacciata) provoca la formazione di un precipitato, che aumenta come nel caso della miosina abbassando il pH fino a valori compresi tra 6,5 e 6,0. Il precipitato che si forma, resiste ad ogni tentativo di ridissoluzione.

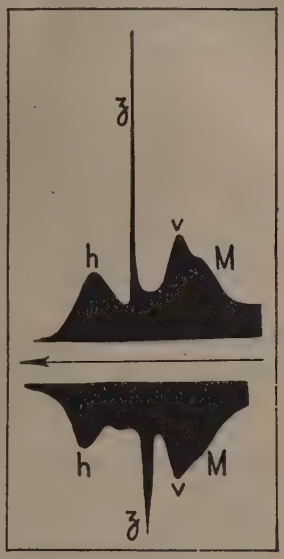


Fig. 4. – Proteinogramma di un estratto di muscolatura vescicale di Vitella ottenuto e dializzato alla forza ionica di 0,35. Esp. 77: 799 minuti di elettroforesi a 1,1 V/cm; pH 7,1.

Nessuna delle proprietà di tali costituenti, a parte il loro passaggio in soluzione soltanto a forze ioniche elevate, depone per la loro identificazione con le miosine del muscolo scheletrico. Una tal conclusione va messa a raffronto soprattutto coi risultati di Csapò [13], che dall'utero di specie diverse (Coniglio, Ratto, Bue e Uomo) estrae actomiosina per mezzo di una soluzione 0,5 M di KCl in presenza di 2,5 mg di ATP per g di muscoli. In base alle mie osservazioni, l'aggiunta di ATP non modifica i risultati qualitativi dell'estrazione, migliorandone semplicemente il rendimento. Comunque sia, gli estratti totali da me studiati dovrebbero tutti contenere actomiosina: per esempio, l'estratto il cui tracciato è riprodotto nella fig. 2, è stato ottenuto in condizioni identiche a quelle suggerite da Csapò e l'actomiosina dovrebbe dunque figurare tra i gradienti che vi appaiono. In tal caso è necessario ammettere che le proprietà di tale proteina (velocità di migrazione elettroforetica, viscosità, torbidezza, birefrangenza da flusso) siano diverse da quelle della proteina omonima estraibile dal muscolo scheletrico.

La costituzione proteica dei muscoli lisci, messa a raffronto con quella di muscoli dotati di diverse proprietà funzionali [Crepax [14]], dimostra come l'evoluzione delle proprietà medesime si compia parallelamente a modificazioni caratteristiche dei costituenti solubili alle deboli forze ioniche. Passando dai muscoli bianchi ai rossi, da questi al miocardio ed infine dal miocardio ai muscoli lisci la velocità di contrazione e decontrazione decresce nell'ordine: parallelamente si osserva una diminuzione progressiva dei miogeni ed un aumento della mioalbumina.

Scienza dell'alimentazione. — *Sui rapporti fra sistema nervoso autonomo e ricambio dei lipidi. Azione della dibenamina e dell'atropina sulla steatosi epatica da epatectomia parziale.* Nota di CESARE ARDY e TULLIO MONTINI, presentata (*) dal Socio U. LOMBROSO.

L'esistenza di stretti rapporti fra sistema nervoso autonomo (S. N. A.) e ricambio lipidico scaturisce necessaria dalla semplice considerazione che, essendo questo apparato nervoso legato funzionalmente con le varie secrezioni interne, interviene, per questo fatto, nei processi del ricambio materiale e quindi anche del metabolismo lipidico. Ma oltre a questa considerazione di carattere generale, esistono precisi dati di fatto che dimostrano direttamente l'esistenza di tali rapporti: si tratta di esperienze nelle quali la stimolazione o l'abolizione della funzione di qualche tratto del S. N. A. è stato seguìto da modificazioni del ricambio o del trasporto dei grassi.

La partecipazione del diencefalo alla regolazione del metabolismo lipidico fu indicata già in osservazioni cliniche di Erdheim (1) dalle quali risultava che si possono avere distrofie adipose per lesione o compressione di segmenti diencefalici; e Raab (2) dimostrò che la pituitrina è inefficace sulle iperlipemie che accompagnano le steatosi epatiche, quando è distrutto il *tuber cinereum* o è sezionato il midollo cervicale, oppure i nervi splancnici. Molto interessanti su questo argomento risultano le classiche esperienze sulle obesità sperimentali di Brobech e collaboratori (3), di Brooks (4), di Teppermann e collaboratori (5), di Weatley (6), di Hetherington (7), nelle quali lesioni diencefaliche non interessanti l'ipofisi, vennero seguìte da aumento dei grassi di deposito e talvolta anche da iperlipemie (Teppermann e collaboratori). In molte delle ricerche sopradette risulta tuttavia difficile sceverare se la lesione sperimentale, o quella clinica spontanea, abbiano costituito nel diencefalo uno stimolo oppure un'inibizione o distruzione di centri regolatori del ricambio lipidico, centri la cui esistenza viene resa, da quelle esperienze, fortemente probabile.

Altrettanto dimostrativo è quel gruppo di ricerche nelle quali la sezione del midollo dorsale, o quella di un nervo è seguìta da variazioni dei depositi di grassi nei territori dipendenti in varie condizioni sperimentali.

(*) Nella seduta del 13 gennaio 1951.

(1) ERDHEIM, cit. da D. GÖRING, «Zeit. Ges. Anat.», 2ª Abt., 8, 312 (1922).

(2) W. RAAB, «Zeit. Exper. Med.», *90*, 729 (1933) e «Klin. Woch.», *13*, 281 (1934).

(3) I. R. BROBECH e collaboratori, «Physiol. Rev.», *26*, 541 (1946).

(4) M. C. BROOKS e collaboratori, «Fed. Proc.», *1*, 11 (1942) e ibidem, *4*, 9 (1945).

(5) I. TEPPERMANN e collaboratori, «Am. J. of Phys.», *133*, 468 (1941)

(6) M. D. WEATLEY, «Arch. Neur. Psych.», Chicago, 296, *52*, 1944.

(7) W. HETHERINGTON, «Endocrin.», *26*, 264 (1940) ed «Am. J. of Physiol.», *89*, 140 (1943).

Rosenfeld [8] aveva ad esempio osservato che i cani operati di sezione del midollo all'altezza della 3ª dorsale non presentano né la steatosi epatica, né l'iperlipemia, né l'acetonuria da florizina pur mantenendo la glicosuria. L'enervazione del fegato, in esperienze dello stesso A., portò ad una limitazione della steatosi da florizina. Successivamente Mansfeld e Muller [9] videro che il taglio dello sciatico in cavie digiunanti porta ad un accumulo di grassi nell'arto corrispondente. (Esperienze confermate da Lortat e Vitry [10]). Wertheimer [11]), avendo ripetuto trent'anni dopo le citate ricerche di Rosenfeld, ottenne gli stessi risultati ossia un impedimento alla steatosi epatica da florizina nei cani a midollo spinale sezionato ed una limitazione alla stessa steatosi in quelli con fegato denervato; osservò inoltre che in quest'ultima condizione il glicogeno epatico aumenta e concluse per una trasformazione di lipidi in glucidi per effetto della denervazione. Altre esperienze di Wertheimer poi, dimostrano, per quanto riguarda il grasso periferico, il fenomeno inverso, cioè che i lipidi di deposito del cavo popliteo di un cane con lo sciatico omolaterale sezionato, non si modifica durante il digiuno successivo all'intervento, mentre dal lato sano il grasso omologo viene rapidamente mobilizzato; effetti opposti dunque, in esperienze dello stesso A., sui grassi del fegato e su quelli della periferia, a seguito di uno stesso intervento: la denervazione.

Il dato della mancata mobilizzazione alla periferia venne confermato quasi contemporaneamente da Hausberger [12] con metodo istologico e da Cedrangolo [13] con metodo chimico; ambedue questi Autori osservarono infatti che in ratti e conigli a dieta normale la sezione dei nervi che vanno alla bolla interscapolare provoca un cospicuo e duraturo aumento del grasso di deposito; secondo il Cedrangolo, in questa condizione aumenta pure il glicogeno.

L'esistenza di stretti rapporti fra S. N. A. e ricambio lipidico è poi confermata dallo Schaeffer [14] che dimostrò, in collaborazione con Pollak, un abbassamento della lipemia e formazione, sia pure temporanea, di fegato grasso nel coniglio trattato con adrenalina. Clement e Schaeffer [15] hanno poi recentemente notato che l'adrenalina, mentre è efficiente a mobilizzare il grasso della bolla perirenale nel ratto, è inefficace se la regione perirenale è denervata.

Risulta dunque dalla letteratura sopra esposta un chiaro intervento del sistema nervoso nei processi che regolano il trasporto dei lipidi nell'organismo: più precisamente sembra che, mentre da un lato la denervazione del fegato inibisce l'accumulo di grassi nell'organo (Rosenfeld, Wertheimer), accumulo favorito invece dall'iniezione di adrenalina (Pollak), d'altro canto alla periferia denervazione ed

(8) C. ROSENFELD, «Zeit. f. Klin. Med.», *28*, 256 (1895).

(9) L. MANSFELD e R. MULLER, *Lebensnerven und Lebenstriebe*, J. Springer, Berlin, p. 766 (1931).

(10) LORTAT e VITRY, *Lebensnerven und Lebenstriebe*, J. Springer, Berlin, p. 766 (1931).

(11) E. WERTHEIMER, «Pflüger's Arch.», *213*, 262 (1926).

(12) F. X. HAUSBERGER, «Klin. Woch.», *14*, 77 (1935).

(13) F. CEDRANGOLO, «Arch. Sc. Biol.», *21*, 570 (1935).

(14) G. SCHAEFFER e A. POLLAK «C. R. S. B», *127*, 1295 (1938) e *128*, 76 e *130*, 149.

(15) G. CLEMENT e G. SCHAEFFER, «C. R. S. B.», *141*, 317 e 320 (1947).

iniezione di adrenalina producono effetti opposti sui depositi di grasso (Mansfeld e Muller, Lortat e Vitry, Béznack [16], Cedrangolo, Clément e Schaeffer).

Su queste premesse abbiamo inteso studiare gli effetti del blocco farmacologico dell'ortosimpatico e del parasimpatico, su quell'interessante processo di mobilizzazione lipidica, con esito in steatosi epatica, che si osserva nel ratto a seguito della subtotale epatectomia.

In uno studio sistematico a largo respiro che si sta svolgendo nel nostro Istituto in rapporto alla genesi delle steatosi epatiche ed ai fattori che possono favorirle od inibirle, abbiamo infatti, fra le altre tecniche adoperate, rivolto la nostra attenzione sulla steatosi da epatectomia parziale; questa ha il vantaggio sulle altre di essere immediata ed uniforme: non presenta cioè quelle variazioni così imbarazzanti che si ottengono spesso con altri interventi epatosteatogeni. La causa di questa deposizione adiposa del fegato appare dovuta ad una mobilizzazione del grasso di deposito dalla periferia ai visceri. (Pontremoli ed Arrigo [17]).

Tabella

Dieta	Trattamento	2ª giornata		4ª giornata		6ª giornata		10ª giornata	
		Ripristino	Ac. grassi %	Ripristino	Ac. grassi %	Ripristino	Ac. grassi %	Ripristino	Ac. grassi %
Mista ordinaria	Nessuno . . .	67.2	9.6	76.3	8.2	79.4	6.5	95.1	4.1
Mista ordinaria	Dibenamina .	65.1	5.1	77.8	4.2	80.2	4.1	94.0	3.3
Mista ordinaria	Atropina . . .	64.2	12.5	75.1	10.6	81.3	7.4	98.7	4.5
Iperproteica . .	Nessuno . . .	90.8	7.4	113.4	6.4	130.6	5.5	151.9	2.7
Iperproteica . .	Dibenamina .	79.4	4.2	92.3	3.5	96.6	3.4	110.0	2.8
Iperproteica . .	Atropina . . .	88.9	8.1	106.1	8.9	128.5	6.2	132.8	4.3

(Ciascun numero è il valore medio dei dati relativi a 5 animali; per «ripristino» si intende il percento del fegato trovato all'uccisione dell'animale, rispetto al peso del fegato presunto prima dell'intervento).

Abbiamo operato di parziale epatectomia, con la tecnica di Crandall e Drabkin [18], ratti maschi adulti, di peso variante fra 180 e 220 gm., alimentati con una dieta mista ordinaria. Un lotto di essi non venne trattato con alcun farmaco; altro lotto venne iniettato a giorni alterni, a partire da quello precedente l'intervento, con 10 mg. pro kilo di dibenamina, ed un terzo fu sottoposto quotidia-

(16) K. A. Beznack e collaboratori, «Ber. Ges. Physiol.», *88*, 336 (1935) e «Magy. orv. Arch.», *38*, 125 (1937).

(17) S. Pontremoli e L. Arrigo, «Boll. Soc. It. Biol. Sper.», *26*, fasc. 3 (1950).

(18) M. W. Crandall e D. L. Drabkin, «J. Biol. Chem.», *165*, 653 (1946).

namente, dalla vigilia dell'operazione, ad iniezione di 20 mg. pro kilo di solfato d'atropina. 5 animali per ciascun lotto vennero uccisi in 2ª giornata, ed altrettanti in 4ª, 6ª, 10ª giornata. Sul fegato di ciascun ratto vennero dosati gli acidi grassi col Kumagawa–Suto, e rilevati i dati relativi all'accrescimento dell'organo.

Questa esperimentazione venne ripetuta poi, in modo identico, su ratti nutriti con una dieta iperproteica: ciò perchè in precedenti lavori di Lombroso C. jr. e Ardy [19] era stata dimostrata un'azione d'inversione degli effetti, sul ricambio gassoso, dell'ingestione di proteine a seguito del blocco farmacologico dell'orto-

Acidi grassi del fegato «rigenerante» nel periodo di più intensa steatosi (2ª giornata), in ratti normali trattati con atropina o con dibenamina.

simpatico: ci sembrò interessante osservare se questo fenomeno influenzasse o meno i processi della rigenerazione epatica dopo epatectomia subtotale.

Riportiamo nella tabella e grafica i risultati.

Il risultato più interessante che scaturisce da queste ricerche, è quello di un netto e presso che completo impedimento alla steatosi operato dal blocco dell'ortosimpatico; e viceversa un potenziamento della steatosi stessa indotto dal blocco del parasimpatico. Il fenomeno è ugualmente evidente nei ratti nutriti con dieta mista ordinaria, ed in quelli alimentati con dieta iperproteica, anche se, in questi ultimi, i valori del tasso lipidico del fegato risultano alquanto inferiori a quelli dei ratti a dieta ordinaria.

Per quanto riguarda la velocità dell'accrescimento del fegato rimasto *in sito* dopo l'epatectomia, nelle varie condizioni da noi sperimentate, si è osservato un

(19) C. LOMBROSO jr. e C. ARDY, «Minerva Ped.», 1, fasc. 2 (1950).

potenziamento della « rigenerazione » in tutti i lotti nutriti con dieta iperproteica nei confronti dei corrispondenti nutriti con normale alimentazione, senza che il trattamento con dibenamina o atropina abbiano dimostrato un chiaro intervento sulla velocità del ripristino dell'organo.

Ma l'aver noi evidenziato le descritte variazioni di questo tipo di steatosi epatica, in senso così schematicamente opposto a seconda dell'intervento su questa o quella sezione del S. N. A., ci fornisce una prova ulteriore della diretta partecipazione di questo sistema del metabolismo lipidico.

Infatti il blocco della steatosi da epatectomia parziale che abbiamo ottenuto utilizzando un simpaticolitico, è un dato di fatto che, acquisito con una tecnica del tutto diversa, si aggiunge, ed è in accordo, a quelli più sopra citati di Rosenfeld e di Wertheimer (inibizione della steatosi da florizina mediante denervazione del fegato) ed a quelli di Pollak (aumento, sia pure temporaneo, dei grassi epatici a seguito di iniezione di adrenalina).

Quale sia il meccanismo dell'azione inibitrice della steatosi nelle nostre esperienze è difficile dire: si tratta di un aumento delle combustioni dei grassi del fegato o di una deficienza di quella mobilizzazione lipidica dalla periferia verso i visceri che è costante dopo parziale epatectomia, o ancora di una mancata lipopessi epatica? Non abbiamo sicuri elementi di giudizio; però due argomenti ci indirizzano piuttosto verso l'ipotesi di un disturbo della mobilizzazione lipidica, che non verso altre possibilità. Anzitutto in esperienze di controllo che abbiamo già effettuato sui ratti epatectomizzati e trattati con dibenamina, abbiamo osservato, nei 2 giorni successivi all'intervento, un elevato quoziente respiratorio, aggirantesi su valori di 0,99–1,07: il che si verifica anche nei ratti non trattati col simpaticolitico [20]. Ciò starebbe a significare che negli animali dibenaminizzati non si manifesterebbe una combustione lipidica maggiore che nei controlli. Inoltre i dati raccolti nella letteratura e già citati i quali ci dimostrano da una parte che l'enervazione o il blocco dell'innervazione del fegato si oppongono ad alcuni tipi di steatosi, e d'altra parte la denervazione alla periferia favorisce l'accumulo di grassi nel territorio denervato, questi dati dunque orienterebbero appunto anch'essi a pensare che a seguito del blocco ortosimpatico si instauri un disturbo nella mobilizzazione dei grassi.

Effetti opposti a quelli della dibenamina ha provocato il trattamento con atropina; il dato si accorda con quello di Cedrangolo [21] che aveva dimostrato una inibizione dell'azione lipotropa della colina negli animali atropinizzati.

In conclusione i nostri risultati: blocco della steatosi da epatectomia parziale, e potenziamento di questa steatosi ad opera rispettivamente di un simpaticolitico e di un vagolitico, lascerebbero intravedere un nuovo aspetto degli antagonismi funzionali fra orto e parasimpatico.

(20) C. Ardy e S. Capponnetto, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », *26*, fasc. 2 (1950).
(21) F. Cedrangolo e R. Conte Marotta, « Arch. Sc. Biol. », *22*, 570 (1936).

PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente comunica che il dott. Antonino Pais, con sua lettera in data 17 c. m. ha richiesto l'apertura di un plico suggellato da lui depositato presso l'Accademia in data 18 agosto 1921.

Si procede all'apertura di detto plico che risulta contenere una comunicazione, in data 14 agosto 1921, in merito ad un metodo per la diserbazione delle rive dei canali, dei laghi e delle piscine al fine di distruggere i focolai anofelici.

Il Presidente propone e la Classe approva che la sopra citata comunicazione del dott. Pais sia esaminata dai Soci De Blasi, Cotronei e Vernoni che riferiranno al riguardo in una prossima seduta.

I predetti Soci dichiarano di accettare.

Il Presidente presenta quindi un plico suggellato depositato dal signor Alberto Buscaglione e la Classe, constatata l'integrità dei sigilli, delibera che il plico stesso sia conservato nell'archivio accademico a disposizione dell'interessato.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Sen. Castelnuovo comunica poi che le bozze del fascicolo n. 1 dei Rendiconti (gennaio 1951) sono già impaginate e osserva al riguardo che è suo vivo desiderio poter presentare in ciascuna seduta il fascicolo relativo alla adunanza precedente. In attesa di conseguire tale risultato, si augura che almeno non trascorra troppo tempo, come è avvenuto nel mese di dicembre, tra la presentazione delle bozze impaginate e l'uscita del fascicolo.

Il Presidente informa poi i Colleghi che il Socio Miolati con gesto veramente nobile, ha voluto fare omaggio alla Biblioteca accademica di numerose memorie rare che egli possedeva nella sua biblioteca personale. Si tratta di una serie di lavori di William Ramsay e di Sydney Young e di altre pubblicazioni di P. T. Cleve, S. G. Hedin, S. M. Jorgensen, P. Groth e L. F. Nilson.

Il Presidente, a nome dell'intera Accademia, porge al Collega Miolati l'espressione del più vivo ringraziamento per il prezioso e graditissimo dono che egli si è compiaciuto fare all'Accademia.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Chiarugi, a nome dell'Istituto Botanico dell'Università di Firenze che egli dirige, offre in omaggio i volumi VI e VII del periodico « Webbia » (raccolta di iscritti botanici editi dal citato Istituto) ricordando che il periodico stesso, fondato nel 1905 per la generosa iniziativa di Ugolino Martelli di onorare in Firenze il cinquantenario della morte dell'illustre botanico inglese Filippo Barker Webb e continuato da lui fino al V volume, fu ripreso nel 1948, dopo 25 anni di sospensione, per opera del Collega Negri, predecessore del prof. Chiarugi nella direzione dell'Istituto Botanico fiorentino. Al VI volume, edito appunto nel 1948, segue ora il VII uscito nel 1950.

Il Presidente ringrazia il Socio Chiarugi per il cortese omaggio.

L'Accademico Segretario presenta le pubblicazioni inviate in omaggio mettendo in particolare evidenza l'opera: « Enciclopedia medica italiana », presieduta dallo stesso prof. De Blasi e alla quale hanno dato la loro preziosa collaborazione altri valorosi Soci, il volume « The centennial of the Sheffield scientific school », due studi del Socio Cecchini, il volume I dei « Nuovi Annali » dell'Istituto Chimico Agrario Sperimentale di Gorizia, il fascicolo dell'inaugurazione dell'anno accademico 1950–51 del Politecnico di Milano e il volume « I 50 anni della Fiat » (1899–1949), con prefazione del Presidente della Repubblica, Luigi Einaudi, dedicato alla memoria di Giovanni Agnelli.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci Scarpa (a mezzo del Collega Lombardi), Meneghetti, Pavari, Bargellini, Segre, Picone, Persico, Bonino e Armellini.

Il Segretario Accademico legge l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

Pavari A. – Risultati sperimentali e indagini sulle provenienze e razze dell'abete bianco (Abies alba).

Scarpa O. – Sulle corrosioni del ferro e dell'acciaio prodotte dai calcestruzzi contenenti Cloruro di Sodio.

Terracini A. – Sistemi proiettivamente deformabili di tipo speciale.

Accordi B. – Rilevamento geologico nella zona del Pizzo Badile (Adamello sud–occidentale) (pres. dal Corrisp. G. B. Dal Piaz).

Capraro V., Pennella P. e Tiengo M. – L'influenza del pH sul passaggio dell'acqua attraverso la cute di Rana esculenta (pres. dal Corrisp. R. Margaria).

Chigi E. e Chiorboli P. – Nuovi spettri Raman dell'α–acetilpirrolo e dell'N–acetilpirrolo (pres. dal Socio G. B. Bonino).

Danusso F. – Velocità ultrasonora e compressibilità adiabatiche di miscele liquide atermiche o ideali (pres. dal Corrisp. G. Natta).

Del Pianto E. e Pantano E. – Azione tossica delle cumarine su embrioni di anfibi (pres. dal Socio G. Bargellini).

Nadeau G. – Correction zonale de l'aberration spherique dans les lentilles magnetiques (pres. dal Corrisp. E. Persico).

Pilati C. – Ulteriori ricerche sulla natura degli spermatidi degenerativi in « Cottus gobio » (pres. dal Corrisp. U. D'Ancona).

Santi R. e Serembe M. – Circolazione dell'aureomicina nell'organismo con particolare riguardo ai suoi rapporti con la linfa (pres. dal Socio E. Meneghetti).

Vanni E. – Sulle modificazioni volumetriche dei nucleoli negli ovociti in accrescimento. Osservazioni preliminari su « Antedon rosacea » (pres. dal Corrisp. U. D'Ancona).

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 10 febbraio 1951

ANTONGIOVANNI Enrico. — *L'o, o-dietil-o-p-nitrofeniltiofosfato (E 605, parathion, xanthion) e le sue applicazioni.* Milano, Soc. Gen. Montecatini, 1951. Pp. 56, in-8°. (Collana di lavori agrari sperimentali, Quaderno n. 5).

BAILEY Dana K. — Vedi: MENZEL Donald H. and BAILEY Dana K.

BOOKER H. G. and GORDON W. E. – *A Theory of Radio Scattering in the Troposphere.* Estr. da « Proceedings of the I.R.E. », vol. XXXVIII, 1950, n. 4.

CECCHINI Gino. — *Le variazioni di latitudine e il movimento del polo di rotazione terrestre in base alle osservazioni fatte nelle stazioni internazionali di latitudine dal gennaio 1949 all'aprile 1950.* Estr. da « Bulletin Géodésique », 1950, n. 17.

— *Variazioni delle latitudini terrestri e fenomeni geofisici.* Estr. da « Geofisica Pura e Applicata », vol. XVIII, 1950.

The Centennial of the Sheffield Scientific School. Edited by George A. Baitsell. New Haven, Yale University Press, 1950. Pp. XIV-206, in-8°, con figg.

I cinquant'anni della Fiat. 1899-1949, Verona, Mondadori, 1950. Pp. 299, in-8°, con tavv.

CLEVE P. T. — *On ammoniacal platinum bases.* Estr. de « K. Svenska Vetenskaps Handlingar », vol. X, n. 9.

COMEL Alvise. — *L'Istituto Chimico-Agrario Sperimentale di Gorizia.* Ottanta anni di sperimentazione agraria. Gorizia, Paternolli, 1950. Pp. 250, in-8° (« Nuovi Annali dell'Istituto », vol. I).

— *Pubblicazioni scientifiche del prof. Alvise Comel libero docente di geologia applicata all'Università di Bologna.* Primo elenco. S.n.t. Pp. 7, in-8°.

DE SANTIS Dario e RIVOSECCHI Vittorio. — *Il cancro dal punto di vista medico-sociale.* Roma, Istituto di Medicina Sociale, 1950. Pp. 79, in-8°. (Collana di studi sui problemi medico-sociali, 7).

Enciclopedia medica italiana. Vol. I Lett. A-AZ. Firenze, Sansoni Edizioni Scientifiche, 1950.

GATTI Giuseppe. — *Supremazia immutabile della lana. Valori e pregi delle lane d'Italia.* Roma - Biella, E.L.S.A., 1950, Pp. 32, in-16.

GORDON W. E. — Vedi: BOOKER H. G. and GORDON W. E.

GROTH P. und NILSON L. F. — *Ueber Platojodonitrite.* Krystallographische und chemische Untersuchung. Upsala, Druck der Akademischen Buchdruckerei, 1879. Pp. 48, in-8°.

HASELMANN Helmut. – *Bemerkungen zu der Arbeit: « Die Stellung des Thymus im Organismus » nach Else Petri.* Estr. da « Virchows Archiv », Band CCCXIII, 1944, Heft 1.

HEDIN S. G. — *Om Pyridinens Platinabaser.* Akademisk Afhandling. Lunds Universitet, 1886.

HUMPHREYS W. J. — *The Atmosphere: origin and composition.* Estr. da « The Scientific Monthly, vol. XXIV, 1927.

— *The effect of surface drag on surface winds.* Estratto da pubblicazione non indicata.

— *Nacreous and noctilucent clouds.* Estr. da « Monthly Weather Review », vol. LXI, 1933.

JÖRGENSEN S. M. — *Om Zeise's Platosemiaethylen-og Cossa's Platosemiamminsalte.* Estr. da « Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark, Sect. des Sciences, ser. 6ª, t. IX, n. 4.

LOOFS Gudrun. – *Klinisch-statistische Untersuchungen über epileptische Wesensveränderungen, Dämmerzustände und Verstimmungen.* Estr. da « Der Nervenarzt », Jahr. XVII, 1944, Heft 3-6.

MENZEL Donald H. and BAILEY Danak. — *The G. layer of the ionosphere.* Estr. da « Colloques de Lyon », 1947.

NILSON L. F. — *Untersuchungen über Chlorosalze und Doppelnitrite des Platins*. Upsala, Druck der Akademischen Buchdruckerei, 1877. Pp. 90, in–8°.

NILSON L. F. — Vedi: GROTH P. und NILSON L. F.

PELLEGRINI Giovanni. — *Prove di lotta con erbicidi ormonici selettivi contro erbe infestanti il frumento*. Milano, Soc. Gen. Montecatini, 1951. Pp. 44, in–8°. (Collana di lavori agrari sperimentali. Quaderno n. 6).

POLITECNICO DI MILANO. — *Inaugurazione dell'anno accademico 1950–51*. Milano, Tamburini, 1950. Pp. 44, in–8°.

RAMSAY William and SHIELDS John. — *The variation of molecular surface–energy with temperature*. Estr. da « Philosophical Transactions of the Royal Society of London », vol. CLXXXIV, 1893.

RAMSAY William and YOUNG Sydney. — *Influence of change of condition from the liquid to the solid state on vapour pressure*. Estr. da « Philosophical Transactions of the Royal Society », 1884, p. II.

— *The influence of pressure on the temperature of volatilization of solids*. Estr. da « Philosophical Transactions of the Royal Society », 1884, p. I.

— *On evaporation and dissociation*. P. I, II, III, V. Estr. da « Philosophical Transactions of the Royal Society », 1886, p. I; 1887.

— *On some of the properties of water and of steam*. Estr. da « Philosophical Transactions of the Royal Society of London », vol CLXXXIII, 1892.

RIVOSECCHI Vittorio. — Vedi: DE SANTIS Dario e RIVOSECCHI Vittorio.

SEMIZZI Renato. — *L'alcoolismo*. (Cause–Danni–Difesa). Roma, Istituto di Medicina Sociale, 1950. Pp. 89, in–8°. (Collana di studi sui problemi medico–sociali, 10).

SHIELDS John. — Vedi: RAMSAY William and SHIELDS John.

SPANDOS B. N. — *Ondes et Corpuscules*. (Elucidation et Conséquences). Thessaloniki, 1950, Pp. 2, in–4.

SPIRITO Francesco. — *Dettagli di tecnica di un metodo personale di pietrificazione reversibile dei pezzi anatomici*. Estr. da « Atti dell'Accademia dei Fisiocritici in Siena e Studi Facoltà medica Senese », s. 12ª, vol. XIX, 1951, fasc. I.

TEPPER Morris. — *A proposed mechanism of squall lines: the pressure jump lines*. Estr. da « Journal of Meteorology », vol. VII, 1950, n. I.

Webbia. — Raccolta di scritti botanici edita dall'Istituto Botanico dell'Università di Firenze – Voll. VI e VII, 1948, 1950.

WEIGHTMAN R. Hanson. — *Average Monthly tracks by types of lows in the United States*. Washington, U. S. Department of Commerce, 1945. Pp. 2, in–4°, con tavv.

WRIGHT William Hammond. — *On a Proposal to Use the Extragalactic Nebulae in Measuring the Proper Motions of Stars in Evaluating the Processional Constant*. Estr. da « Proceedings of the American Philosophical Society », vol. XCIV, 1950, n. I.

YOUNG Sydney. — Vedi: RAMSAY William and YOUNG Sydney.

D. DE BLASI.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 10 marzo 1951

Presidenza del Socio G. Castelnuovo

NOTE DI SOCI

Relazioni. — *La creazione di un «Istituto del deserto» in Egitto.* Relazione (*) del Corrisp. Ardito Desio.

In occasione delle feste giubilari per il 75° anniversario della fondazione della Société Royale de Géographie d'Egypte e del 25° anniversario della fondazione della Università del Cairo, è stato inaugurato nell'ameno sobborgo di Heliopolis, presso il Cairo, l'*Institut Fouad 1^er^ du Desert*. È un avvenimento di notevole interesse scientifico che merita di essere messo in particolare evidenza e segnalato a tutti gli studiosi italiani che si sono occupati e che ancora s'interessano ai problemi delle regioni aride.

Poichè ho avuto la ventura di assistere, come ospite del Governo Egiziano all'inaugurazione del nuovo Istituto visitando la bella sede di Heliopolis, come pure di partecipare in qualità di Socio Corrispondente, alla prima adunanza scientifica, credo utile fornire qualche dettaglio sull'organizzazione dell'Istituto, sul programma che si propone di svolgere e sui mezzi di cui dispone.

La fondazione dell'Istituto del Deserto era già nei programmi di sviluppo scientifico dell'Egitto impostati da Re Fuad fin dal 1927, in considerazione dell'importanza scientifica e pratica che presenta per l'economia del paese la soluzione di vari problemi riguardanti le regioni aride. Il progetto di Re Fuad fu realizzato dal suo successore Re Faruk che il giorno 30 dicembre 1950 presenziò alla cerimonia inaugurale dell'Istituto.

L'Istituto si propone di realizzare i seguenti obbiettivi:

a) lo studio scientifico dei deserti esplorando tutte le loro parti per conoscerne le condizioni geologiche, geofisiche, idrauliche, climatiche, botaniche, zoologiche, geografiche, storiche, antropologiche ecc.;

(*) Pervenuta all'Accademia il 18 febbraio 1951.

b) lo studio dei mezzi capaci di utilizzare le risorse agricole, animali e minerali dei deserti e di adattare territori desertici allo sviluppo agricolo e industriale;

c) lo studio dei mezzi convenienti per impedire l'espansione del deserto alle zone agricole.

Questo programma dovrà essere attuato nel modo seguente:

a) incoraggiare le ricerche e gli studi sui deserti inviando missioni scientifiche ed aiutando i gruppi di studiosi ed i singoli che si dedicano a queste ricerche;

b) raccogliere dati sui deserti di ogni parte del mondo per metterli a disposizione degli studiosi e dei ricercatori a scopo di studio;

c) creare un museo scientifico che illustri gli aspetti della vita naturale ed umana dei deserti;

d) creare una biblioteca che raccolga tutte le opere e gli studi sui deserti compilando un indice completo dei riferimenti bibliografici;

e) organizzare conferenze, discussioni e congressi su argomenti che interessano i deserti;

f) tenersi in relazione con istituzioni, uffici ed associazioni scientifiche che si occupano dello studio dei deserti tanto in Egitto, quanto all'estero; collaborare con queste organizzazioni e scambiare gli studi e le pubblicazioni;

g) pubblicare una rivista periodica contenente studi relativi ai diversi aspetti dell'attività scientifica relativa ai deserti.

L'Istituto è formato da 50 fra membri attivi, membri corrispondenti e membri onorari, scelti fra coloro che si dedicano particolarmente agli studi ed alle ricerche sui deserti. Una serie di commissioni scientifiche composte dai membri dell'Istituto, ai quali potranno essere aggiunti altri studiosi, provvedono all'organizzazione di studi e indagini di loro competenza. Le commissioni finora formate sono le seguenti: geofisica e geologia, idraulica, botanica, zoologia, economia, sociologia, archeologia e storia.

Sopra queste commissioni v'è un Comitato superiore di studi ed un Consiglio d'amministrazione, il primo con compiti coordinatori ed organizzativi, il secondo con compiti amministrativi.

I mezzi finanziari dell'Istituto sono stati assicurati dalla generosità di Re Fuad e di Re Faruk. L'Istituto possiede infatti un bellissimo edificio costruito appositamente alla periferia del subborgo di Heliopolis proprio sul margine del deserto. Esso copre una superficie di 4200 m^2 ed è composto da un museo naturalistico e tecnologico, da una biblioteca, da una cartoteca, da una grande sala di studio. Intorno all'edificio si stende un vasto giardino (complessivamente 33000 m^2 di terreno) adibito ad orto botanico per le piante del deserto. Le entrate dell'Istituto provengono dai redditi di una grande proprietà agricola di alto valore situata in vicinanza del Cairo assegnata in dote all'Istituto e dalla rendita di alcuni grandi immobili situati in uno dei migliori quartieri del Cairo.

Ho accennato sopra alla composizione della sede dell'Istituto; è forse utile aggiungere qualche ulteriore notizia sul contenuto delle sale. La biblioteca, ch'è ancora in via di sviluppo, si propone di raccogliere tutte le opere che riguardano i deserti sotto i diversi punti di vista. La cartoteca contiene per ora tutte le carte delle zone desertiche d'Egitto e numerose altre delle aree desertiche dell'Africa

settentrionale, del Vicino Oriente, dell'Arabia. Il programma è di riunire una abbondante cartografia di tutti i territori desertici del mondo. L'Archivio fotografico contiene una bella collezione di vedute dei deserti d'Egitto.

Il Museo è organizzato su 5 sezioni e cioè: 1° Geologia e risorse minerarie; 2° Botanica e risorse agricole; 3° Zoologia e risorse animali; 4° Archeologia; 5° Etnografia. Il materiale già esposto si riferisce essenzialmente all'Egitto ed è gia notevole ed in continuo e rapido incremento.

L'Istituto è dotato pure di un periodico, il *Bulletin de l'Institut Fouad 1er du Desert* di cui è stato pubblicato il primo numero in occasione della cerimonia inaugurale. Il Bollettino si presenta in bella veste tipografica e questo primo numero contiene vari lavori interessanti dedicati alla pioggia artificiale in Egitto (El-Fandy), ad alcune piante xerofile con particolare riguardo allo sviluppo delle radici ed all'ecologia (Montasir, Abd El-Rahman, Schafey, Haines), alle ricerche petrolifere nella regione del Golfo di Suez (Chata), alla geologia e morfologia del bacino del Nilo (Attia), allo sviluppo economico delle oasi egiziane (Mitwally) e finalmente ad argomenti di carattere archeologico riguardanti gli scavi di Helwan (Saad) ed alcuni singolari utensili di terracotta raccolti in varie parti dell'Egitto (Murray).

Come ho fatto cenno da principio, l'Istituto del Deserto è stato inaugurato con una fastosa cerimonia la mattina del 30 dicembre 1950 alla presenza di S. M. Re Faruk I, di principi, ministri ed alte personalità del mondo politico e scientifico egiziano oltre che di parecchi studiosi stranieri invitati per l'occasione al Cairo dal Governo egiziano tramite il Ministro dell'Istruzione Pubblica S. E. Taha Hussein Pascià. Sotto un'immensa tenda variopinta di stile orientale, eretta nel giardino dell'Istituto, ha avuto luogo la cerimonia inaugurale in occasione della quale, dopo la lettura del Corano, hanno parlato il Ministro della Pubblica Istruzione e il dott. J. T. Bodet, Direttore Generale dell'U.N.E.S.C.O. mettendo fra l'altro in evidenza i nobili scopi dell'Istituto ed i programmi di lavoro.

Ai discorsi ha fatto seguito la visita alle varie sale ed al giardino dell'edificio. Due giorni dopo, il 1° gennaio 1951 è stata tenuta la prima riunione scientifica nella grande sala delle conferenze dell'Istituto. Sono state svolte varie relazioni fra cui ricordo una di R. A. Bagnold su alcuni problemi relativi alle condizioni fisiche del deserto, un'altra di S. A. Huzayyin sulla morfologia desertica del Fayum settentrionale durante il Pleistocene e l'epoca Recente, una terza di Th. Monod sui biotipi dell'ovest sahariano ed una di R. Capot-Rey sull'organizzazione idraulica del Sahara Francese. Altre relazioni hanno poi svolto Mustafa Amer Bey sulla nuova posizione preistorica di Heliopolis, Hassan Awad sopra una carta morfologica del Sinai al 500 000, A. Fakhry sulle più recenti scoperte archeologiche nel Deserto Egiziano e finalmente una P. A. Clayton su vetri silicei del Deserto Libico.

Altre comunicazioni annunziate non sono state esposte.

Con la seduta del 1° gennaio 1951 ha avuto dunque inizio anche formalmente l'attività scientifica dell'Istituto del Deserto che promette di portare – anche grazie alla larghezza di mezzi di cui è dotato – un grande impulso agli studi scientifici e tecnici sui deserti.

Geometria. — *Sistemi* (G) *proiettivamente deformabili di tipo speciale.* Nota (*) del Corrisp. ALESSANDRO TERRACINI.

1. In una Nota precedente (1) ho dato una descrizione in termini geometrici dei sistemi (G_0), o sistemi (G) proiettivamente deformabili in ∞^1 modi – nonchè della relazione che ne emerge tra essi ed i sistemi (G_0) deformati –, nell'ipotesi che si trattasse di sistemi non speciali. Nella presente Nota mi occupo brevemente delle questioni analoghe per i tipi *semplicemente speciale* e *doppiamente speciale.*

Questi tipi devono essere considerati a parte perchè alcuni dei concetti posti a base delle considerazioni svolte nel caso non speciale subiscono ora una modificazione profonda, e possono anche perdere significato.

Invero, anzitutto, in quelle considerazioni, in presenza di un sistema $\infty^1 \Sigma$ di linee

$$T(x, y) = \text{cost.},$$

cioè della corrispondenza dualistica di tipo nullo nella quale ad ogni punto A del piano si associa la retta a in esso tangente alla linea di Σ passante per il punto stesso, aveva una parte essenziale una certa proiettività $\mathbf{P}_0$, che attualmente degenera: vengono pertanto a mancare le coniche principali di cui in (L), almeno in quanto coniche irriducibili. Anche la considerazione della terna di rette inflessionali relativa a quella corrispondenza, considerazione che aveva in (L) una parte importante, si modifica in modo essenziale, in quanto, se Σ è costituito da rette, cosicchè

$$\Delta \equiv T_2^2 T_{11} - 2 T_1 T_2 T_{12} + T_1^2 T_{22} = 0, \tag{1}$$

la corrispondenza dualistica è degenere, e la terna di rette inflessionali uscenti da A si riduce alla a contata tre volte, se Σ è semplicemente speciale; laddove, se lo è doppiamente, e soltanto allora, diventa indeterminata. Tutto ciò si controlla facilmente sull'equazione (4) di (L), tenendo presente che – come pure si verifica senza difficoltà – un sistema Σ doppiamente speciale è caratterizzato dall'insieme di condizioni costituito dalla (1) insieme con le

$$\begin{cases} 2 T_{11} (T_2 T_{11} - T_1 T_{12}) - T_1 (T_2 T_{111} - T_1 T_{112}) = 0, \\ 2 T_{22} (T_2 T_{12} - T_1 T_{22}) - T_2 (T_2 T_{122} - T_1 T_{222}) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Perciò, in entrambi i casi, le caratterizzazioni dei sistemi (G_0) comunque speciali sono da ricercare altrimenti.

Quanto alle relazioni tra un sistema (G_0) ed i suoi deformati, che valevano nel caso generale, qualche cosa se ne può ancora trarre unicamente nel caso semplicemente speciale; mentre nel caso doppiamente speciale conviene far intervenire la nozione dell'associazione proiettiva di due corrispondenze entro una stessa forma di prima specie (ved. il n. 4).

(*) Presentata nella seduta del 10 febbraio 1951.

(1) A. TERRACINI, *Trasformazioni dualistiche di tipo nullo nel piano e sistemi* (G) *proiettivamente deformabili.* Questi «Rendiconti», vol. X, fasc. 2, pp. 89-94 (1951). Tale Nota, alla quale rinvio anche per le notazioni, sarà nel seguito richiamata con la sigla (L).

2. In un sistema (G_0) comunque speciale continua ovviamente a sussistere la circostanza che gli E_1 Aa_1 con A fisso ed a_1 variabile, hanno una medesima retta satellite, che attualmente coincide con la retta a del sistema Σ passante per A. Si presenta invece il fatto nuovo che la linea satellite del punto A (luogo dei punti satelliti del predetto E_1 al variare di a_1) è ora una retta, in quanto dalla conica satellite del caso non speciale si stacca la componente a, restando come componente residua, che è ora da considerare come la linea satellite propriamente detta, la retta in questione, che designeremo con a_2. Ad evitare confusioni, questa, con una denominazione che richiama la sua origine, si dirà *la retta luogo satellite* del punto A.

Se il sistema (G_0) è definito dalle (6) di (L), l'equazione della a_2 è

$$S_2 S_{11} \xi + S_1 S_{22} \eta - 2 S_1 S_2 = 0. \tag{3}$$

Perciò, se l'equazione della retta variabile a si scrive nella forma

$$p(S) X + q(S) Y + r(S) = 0, \tag{4}$$

la retta luogo satellite di un punto $A \equiv (x, y)$ della a diventa

$$2(p'x+q'y+r')(p'X+q'Y+r') - (p''x+q''y+r'')(pX+qY+r) = 0 \tag{5}$$

($p' = dp/dS$, ecc.). Perciò la retta luogo satellite di ogni punto della a passa costantemente per il punto A_0, caratteristico della a entro il sistema Σ.

Inoltre, tenuto conto che $px + qy + r = 0$, la (5) mostra che la punteggiata di sostegno a descritta dal punto A ed il fascio di centro A_0 descritto dalla sua retta luogo satellite si corrispondono in una proiettività η, nella quale sono omologhi il punto A_0 della punteggiata ed il raggio a del fascio.

La proiettività η è non degenere, oppure degenere, secondochè il sistema (G_0) è semplicemente, oppure doppiamente, speciale. Conviene ora distinguere i due casi.

3. Limitiamoci per il momento al caso semplicemente speciale, cosicchè vi è luogo a considerare la curva γ inviluppata dalle rette a del sistema Σ. La proiettività η di cui sopra tra la punteggiata a ed il fascio A_0 è legata a γ in modo più intimo di quello sopra rilevato. Invero, posto $(p'r) = p'r - pr'$, ecc., e chiamando M il determinante $(p''q'r)$, l'E_2 della linea γ uscente dal punto A_0 e l'E_2 delle coniche (contenenti l'E_1 A_0a) che subordinano tra la punteggiata a ed il fascio A_0 la proiettività η sono entrambi della forma

$$Y - \frac{(p'r)}{(pq')} = -\frac{p}{q}\left(X - \frac{(r'q)}{(pq')}\right) + h\frac{(p'q)^3}{Mq^3}\left(X - \frac{(r'q)}{(pq')}\right)^2,$$

dove h vale rispettivamente 1/2 ed 1, cosicchè il loro invariante di Mehmke–Segre è 1/2.

Viceversa, il calcolo effettivo prova quanto segue: *partiamo da una curva* γ *inviluppata da una retta* a *e per ogni suo punto* A_0 (punto di contatto della a) *consideriamo una proiettività* η *tra la punteggiata di sostegno* a *ed il fascio di raggi di centro* A_0, *in modo che il punto* A_0 *della* a *ed il raggio* a *del fascio* A_0 *siano omologhi in* η, *e che gli* E_2 *di origine* A_0 *appartenenti rispettivamente a* γ *ed alle coniche subordinanti la proiettività* η *tra la punteggiata* a *ed il fascio* A_0 *abbiano*

eguale ad 1/2 l'invariante di Mehmke–Segre. Allora il sistema (G) *semplicemente speciale che si ottiene adottando per ogni punto* A *della a la stessa a come retta satellite fissa, e la sua omologa in* η *come retta luogo satellite è un sistema* (G_0).

Si hanno dunque così tutti i sistemi (G_0) semplicemente speciali.

Sussiste poi il seguente risultato, analogo a quello esposto nel n. 4 di (L) per il caso non speciale: *dato un sistema* (G_0) *semplicemente speciale, come nel precedente enunciato, si ottengono tutti i sistemi* (G_0) *proiettivamente applicabili lasciando invariata la curva* γ, *e prendendo delle nuove rette luogo satelliti, in modo che per ogni punto* A, *quando lo si sottoponga ad uno spostamento infinitesimo arbitrario, la retta che da esso proietta il punto caratteristico della sua retta luogo satellite sia la medesima, per il sistema dato e per quello deformato.*

4. Sia ora il sistema (G_0) doppiamente speciale: il sistema Σ è dunque costituito dalle rette di un fascio O. Quanto si è detto sulla proiettività η, attualmente degenere, oppure il calcolo diretto, mostrano che i vari punti A di una retta a del fascio O hanno attualmente una stessa retta luogo satellite a_2, appartenente al medesimo fascio O. Nasce così una corrispondenza C nel fascio O tra le rette a e le rette luogo satelliti dei loro punti.

Assunta l'origine nel punto O (supposto proprio, caso al quale ci si può sempre ridurre), se il sistema Σ si rappresenta con

$$p(S)\,X + Y = 0,$$

la retta luogo satellite dei punti della retta a corrispondente al valore S del parametro è

$$(pp'' - 2p'^2)\,X + p''\,Y = 0.$$

Il risultato si inverte, cosicchè *si ottiene nel modo più generale un sistema* (G_0) *doppiamente speciale, prefissando arbitrariamente una corrispondenza* $C(a \to a_2)$ *entro un fascio di raggi, e prendendo il sistema* (G) *per il quale ogni punto* A *di una retta a ha come retta satellite fissa la a e come retta luogo satellite la* a_2.

Se si assumono due sistemi (G_0) doppiamente speciali proiettivamente applicabili, e se le rette luogo satelliti corrispondenti alla $pX + Y = 0$ si indicano rispettivamente con

$$\omega(p)\,X + Y = 0 \quad ; \quad \omega_1(p)\,X + Y = 0,$$

risulta

$$\frac{1}{(\omega - p)^2}\,\frac{d\omega}{dp} = \frac{1}{(\omega_1 - p)^2}\,\frac{d\omega_1}{dp}. \tag{6}$$

Per caratterizzare geometricamente la relazione che intercede fra i due sistemi conviene introdurre, per due corrispondenze C, C_1 entro una stessa forma di prima specie, la nozione della *associazione proiettiva*. Chiamiamo proiettivamente associate le C, C_1, quando per ogni elemento a della forma esiste una trasformazione proiettiva della forma in sè tale che in a e nel suo intorno del primo ordine essa coincida con la C, e la sua inversa coincida con la C_1. La nozione è simmetrica rispetto alle due corrispondenze C, C_1. Assunta nella forma una coordinata proiettiva, se le C, C_1 fanno corrispondere all'elemento di coordinata proiettiva p rispettivamente gli elementi di coordinata $\omega(p)$, $\omega_1(p)$, la condizione

dell'associazione proiettiva delle due corrispondenze C, C_1 si traduce appunto nella (6).

Due sistemi (G_0) *doppiamente speciali sono proiettivamente applicabili quando, riferendoci all'enunciato precedente, essi sono definiti da due corrispondenze* C, C_1 *in uno stesso fascio di raggi, con la condizione che tali corrispondenze siano proiettivamente associate* (2).

Elettrochimica. — *Sulle corrosioni del ferro e dell'acciaio prodotte dai calcestruzzi contenenti Cloruro di Sodio.* Nota (*) del Socio OSCAR SCARPA.

1. Per impedire le deleterie azioni del gelo allorquando le costruzioni di cemento armato vengono effettuate nei mesi invernali, e per accelerare la presa, alcuni costruttori impiegano, per l'impasto, acqua con aggiunta di sale marino. Altri adoperano soluzioni di cloruro di calcio o di magnesio. Oggi, sotto il nome di anticongelanti, sono in vendita diversi preparati di cui non risulta sia stato studiato il comportamento ai fini delle corrosioni che possono provocare nei ferri inclusi nel calcestruzzo. Alcuni contengono composti del Cloro.

Le norme più apprezzate nonchè alcuni trattati sconsigliano l'impiego, nei calcestruzzi, di cloruri, come anticongelanti, ciò non pertanto vengono sovente adoperati. Alcuni pratici affermano infatti che l'impiego dei cloruri non produce danni ai ferri inclusi nel calcestruzzo, mentre altri ritengono che causa ossidazioni, e quindi corrosioni.

Tale sconcordanza delle opinioni, non suffragate da ricerche scientifiche, o da fatti rigorosamente accertati, mi spinse a dubitare che dei fattori occasionali potessero contribuire alle corrosioni nel caso della presenza di cloruri.

Ben differente è infatti il caso delle corrosioni del ferro immerso nei calcestruzzi, da quello nelle soluzioni saline oppure nei terreni salmastri più o meno impregnati di liquido (il cosidetto liquido circolante nel terreno umido).

Fra le cause occasionali mi sembrò, principalissima, la eventuale esistenza nei calcestruzzi di piccole fenditure (potrebbero essere microscopiche) attraverso alle quali può infiltrarsi l'aria atmosferica e l'umidità ambiente, raggiungendo la superficie dei ferri. Se tali infiltrazioni avvengono nei calestruzzi possedenti purezza chimica normale, non può infatti risultarne ossidazioni dei ferri (salvo in casi eccezionali, come ad esempio quando correnti elettriche eventualmente disperse da impianti elettrici investono le membrature in cemento armato) poichè

(2) Le proprietà qua assegnate per i sistemi (G_0) doppiamente speciali e per la loro applicabilità proiettiva, in relazione con le linee satelliti dei vari punti del piano, appartengono all'ordine di idee adottato, in (L) e nella presente Nota, per i rimanenti sistemi (G_0). Invece, con riferimento alle linee integrali, è da osservare che ogni sistema (G_0) doppiamente speciale rientra sia nel tipo dinamico, sia in quello sezionale, potendosi – da quest'ultimo punto di vista – le sue linee considerare come le proiezioni sul piano xy, da un centro fisso, delle sezioni piane di un cono. Per un'interpretazione dell'applicabilità proiettiva di due sistemi (G_0) doppiamente speciali secondo tale veduta, cfr. il n. 27 di (T).

(*) Presentata nella seduta del 10 febbraio 1951.

la grande alcalinità del mezzo genera alla superficie dei ferri (se originariamente non ossidata) quelli stati passivi che li preservano da corrosioni. Ma se le sopraccennate fenditure esistono nei calcestruzzi contenenti cloruri, può avvenire che per effetto della umidità residua e di quella filtrata e dell'ossigeno atmosferico, si generino corrosioni locali più o meno notevoli, poichè i cloruri ostacolano l'acquisizione della passività.

Ho perciò istituito le seguenti prove sperimentali [1].

I calcestruzzi vennero preparati adoperando del cemento di ottima qualità contenente soltanto tracce di cloruri, e della granella silicea ben lavata.

Ne furono sperimentate due qualità e cioè, una impastata con acqua di fonte (la indicherò come calcestruzzo puro) e l'altra, che chiamerò calcestruzzo clorurato, per il cui impasto venne adoperata una soluzione di cloruro di sodio di tenore tale da far raggiungere 50 grammi di NaCl per litro di calcestruzzo. Di tali impasti venne anzitutto determinata (con un ponte a corrente alternata e elettrodi di ferro) la resistività operando con blocchetti aventi la sezione 10×10 cm. e 2 cm. di spessore. Dopo alcuni giorni dalla presa risultò dell'ordine di 12.000 Ohm/cm/cm^2 per il calcestruzzo puro e di 10.000 per quello clorurato con l'1 % di NaCl, operando alla temperatura ambiente (circa 18°); mentre alla temperatura di 50° la resistività diminuì fino a circa 3.000 Ohm/cm/cm^2 nel clorurato.

Per le esperienze di corrosione alla temperatura ambiente operai in modo da escludere l'accesso dell'aria alla superficie laterale e al fondo dei blocchi di calcestruzzo, versandolo subito dopo l'impasto in cassette parallelepipede di ebanite e inserendo prima della presa delle lastre di ferro (lunghe 20 cm. larghe 2 cm.) disposte verticalmente in modo da emergere superiormente nell'aria ambiente per 5 cm.

Di tempo in tempo, durante le prove di corrosione, venne rispettivamente misurata nei due sistemi la resistenza elettrica fra le due lastre affacciate operando alla temperatura ambiente [2].

Dopo 130 giorni dalla presa, le cassette e i blocchi in esse contenuti vennero rotti, prendendo cura di liberare le lastre senza danneggiarle e senza danneggiare le superficie del calcestruzzo aderenti al metallo.

Le lastre già immerse nel calcestruzzo puro mostrarono le loro superficie perfettamente prive di ossido e tali si conservarono anche lasciandole per circa un mese esposte all'aria, piuttosto umida, dell'ambiente. Il che mostra che per il loro contatto con il calcestruzzo avevano acquistato lo stato passivo.

In corrispondenza, la superficie del calcestruzzo, già in contatto con tali lastre, si mostrò priva dell'ossido di ferro che, se si fosse formato, sarebbe rimasto almeno in parte ad essa aderente (fig. 1).

Ossidazioni non gravi, ma notevoli, osservai invece nella porzione di queste lastre rimasta per 130 giorni emersa dal calcestruzzo; ossidazioni evidentemente causate dall'aria umida agente sulla porzione di superficie non passivata.

(1) Ringrazio la direzione tecnica della Società Tudor che mi concesse di eseguirle nel laboratorio di ricerche dello stabilimento, nonchè il chimico Sig. Compagnone che mi coadiuvò. Le determinazioni dei pH vennero ivi eseguite dall'ing. G. Colombo.

(2) Dei risultati di queste misure, e di altre tutt'ora in corso, darò relazione particolare.

Ben differenti apparvero le lastre già immerse nel calcestruzzo clorurato (fig. 2).

In queste si produssero infatti, a partire dal livello del calcestruzzo e per circa 3 cm. di profondità, una forte ossidazione; mentre, appena separate dal calcestruzzo, apparvero più in basso perfettamente sane (salvo una lieve ossidazione laterale interessante circa 2 mm. di un lato sulla parte più vicina al fondo, probabilmente causata da aria e umidità rimasta ivi inclusa).

In corrispondenza la superficie del calcestruzzo già aderente alla porzione delle lastre non ossidata risultò priva di ossido di ferro (rimastovi eventualmente

Fig. 1.

aderente) mentre alla porzione già aderente al metallo ossidato rimase attaccata una notevole quantità di ossido di ferro (vedi in fig. 2).

Ma, fatto molto importante, avendo lasciato esposte all'aria ambiente, per circa un mese le lastre estratte dal calcestruzzo clorurato esse rapidamente si ossidarono ricoprendosi (a differenza di quelle estratte dal calcestruzzo puro) con abbondante ruggine. Il che mostra che non avevano assunto lo stato passivo, benchè il pH di acqua mantenuta per alcuni giorni in contatto con le due qualità di calcestruzzo fosse molto elevato e circa dello stesso ordine (12 a 13 unità).

È anche notevole che le lastre estratte dai blocchi di calcestruzzo clorurato presentarono, in corrispondenza del livello superiore del calcestruzzo, una forte corrosione traversale.

2. Queste osservazioni mostrano, concordemente, che per avere notevoli corrosioni dei ferri inclusi nei calcestruzzi clorurati è necessario il concorso dell'azione chimica dell'ossigeno atmosferico e dell'umidità, azioni che possono aver efficacia se attraverso fenditure dei calcestruzzi, o per loro particolare porosità, l'aria si insinua nella massa raggiungendo la superficie dei ferri inclusi [3]. Le

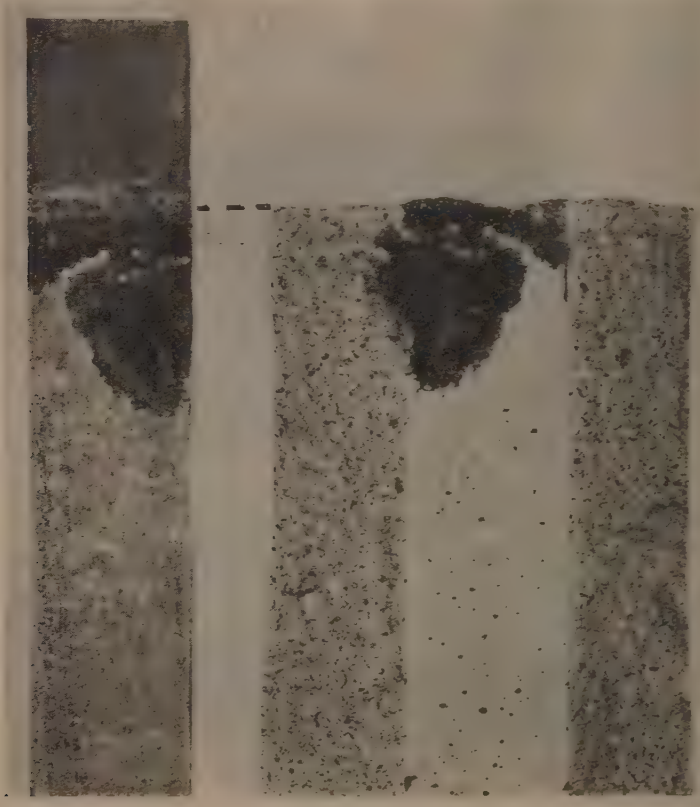


Fig. 2.

ossidazioni così prodotte hanno conseguentemente carattere locale; ma potranno estendersi e riuscire dannose poichè è noto che alle corrosioni metalliche localizzate seguono quasi sempre più ampie e più profonde corrosioni se il mezzo contiene sostanze agressive. Tali, di loro natura, sono i cloruri.

Aggiungo che il fatto per cui le corrosioni osservate nelle sopradescritte esperienze, avvennero nella regione del ferro in contatto con l'ossigeno atmosferico, indica che esse non si possono ascrivere a fenomeni derivanti da aereazione differenziale delle superficie metalliche, poichè se ciò fosse avvenuto esse avrebbero specialmente interessato le parti protette dal diretto contatto con il gas.

(3) Nelle esperienze qui descritte tale infiltrazione avvenne dall'alto nella parte superiore delle lastre attraverso al loro contatto con il calcestruzzo.

Botanica. — *Risultati sperimentali e indagini sulle provenienze e razze dell'abete bianco* (*Abies alba*). Nota (*) del Corrisp. ALDO PAVARI.

Il problema dell'esistenza di razze climatiche o biologiche nell'ambito delle grandi specie linneane fu posto per la prima volta su basi sperimentali da Vilmorin, per quanto riguarda le specie forestali, sin dal 1821 con le sue classiche esperienze sul pino silvestre a Les Barres (Francia).

Da allora la sperimentazione e le indagini si estesero grandemente, soprattutto in Europa e in America. Per le specie forestali europee esiste ormai una ricca letteratura la quale dimostra in modo sicuro tale differenziazione, dalla quale si sono sviluppate vaste applicazioni pratiche nella moderna selvicoltura.

Una specie molto importante era stata però trascurata, cioè l'abete bianco (*Abies alba Mill.*) sul quale soltanto Engler eseguì qualche prova in Svizzera nel 1905.

Nel 1924 tale lacuna fu rilevata in uno scambio di vedute dello scrivente col prof. Guinier, allora Direttore della Scuola Nazionale delle Acque e Foreste di Nancy (Francia) e fu convenuto di iniziare una serie di esperienze in collaborazione tra la Stazione di Ricerche forestali della suddetta Scuola e la Stazione Sperimentale di Selvicoltura allora appena fondata.

Fu deciso di sperimentare il maggior numero possibile di provenienze entro l'areale dell'*Abies alba* iniziando le colture in vivaio e costituendo poi una serie di parcelle di prova in foresta, sia in Italia che in Francia.

Dopo oltre venti anni dall'impianto di dette parcelle è stato possibile raccogliere ed elaborare i risultati del primo periodo della sperimentazione in Italia. Essi saranno oggetto di un'ampia pubblicazione negli Annali della Sperimentazione Agraria, ma intanto si è creduto opportuno esporli brevemente in questa sede anche perchè in questi ultimi anni molti Autori francesi e, fra gli italiani specialmente il Giacobbe, hanno emesso e sostenuto l'ipotesi che nel settore meridionale della sua area di vegetazione, particolarmente dai Pirenei alle Alpi marittime e all'Appennino, l'abete bianco presenti una razza a temperamento xerofilo e lucivago, in contrasto con quello sciafilo e mesofilo ben noto nel settore nord dell'areale stesso.

Anzi, su tale argomento, riferì lo stesso Giacobbe nella Nota presentata a questa Accademia: *L'ecologia dell'abete bianco appenninico. I. Morfologia e biologia*, pubblicata negli « Atti » del 1949 (1) sostenendo non soltanto tale differenziazione biologica ma anche una corrispondente differenziazione morfologica.

I risultati delle nostre esperienze portano un interessante contributo alla controversa questione, dimostrando ancora una volta che soltanto una lunga ed accurata sperimentazione è in grado di poter chiarire problemi studiati soltanto

(*) Presentata nella seduta del 10 febbraio 1951.

(1) « Rendiconti della classe di Scienze fisiche, chimiche e naturali », vol. VI, fasc. 3, p. 339 (1949).

con osservazioni eseguite da diversi Autori in casi molteplici e non esattamente confrontabili.

Le provenienze dei semi, oggetto delle esperienze, furono inizialmente 20 e cioè 11 delle Alpi italiane, 3 dell'Appennino e 6 di località straniere: Alpi tirolesi, Hohewand (Austria inf.), Monte Rosalia (Burgenland), Mérial (Pirenei francesi), Écouves (Normandia) ed Elieux (Bassi Vosgi).

Le colture in vivaio furono iniziate nel 1925 e nella primavera 1929 le piantine ottenute furono collocate a dimora in due serie di parcelle sperimentali; una nella foresta di Vallombrosa (Firenze) ed una nella foresta dell'Alta Val Parma a 1470 m. s. m.

La scelta delle due diverse località fu motivata dal proposito di confrontare il diverso comportamento delle varie provenienze in una stazione a clima montano mediterraneo, come quella di Vallombrosa, con inverno relativamente mite ed accentuato carattere di siccità estiva ed in una stazione dell'Appennino emiliano, notevolmente più fredda e ad estate più piovosa.

Mentre la serie di parcelle di Vallombrosa ha potuto essere conservata sino ad oggi, purtroppo quella dell'Alta Val Parma fu praticamente soppressa nel 1943 a causa di danneggiamenti ma tuttavia essa potè dare risultati molto importanti dimostrando un netto contrasto fra tutte le provenienze meridionali che non poterono sopportare sin dai primi anni quelle condizioni climatiche e le provenienze alpine e settentrionali che, pur soffrendo in complesso, poterono parzialmente sopravvivere.

Le indagini sperimentali hanno riguardato la percentuale di sopravvivenza, il vigore vegetativo, l'accrescimento in altezza e in diametro e sono state completate con l'esame dei caratteri morfologici.

La lunghezza del periodo delle esperienze, cioè un ventennio, ha permesso di constatare, in modo particolare, il comportamento delle diverse provenienze in una fase climatica molto siccitosa come quella che si verificò a Vallombrosa a partire dal 1942.

Qui la provenienza locale e quella molto più meridionale di Serra S. Bruno (Calabria) dimostrarono un'assoluta superiorità sotto i vari aspetti dell'attecchimento, della resistenza alla siccità e dell'accrescimento, in confronto a tutte le altre provenienze mentre nell'Alta Val Parma, come si è detto, le piantine furono completamente distrutte già nei primi anni dell'impianto.

In Francia erano state inviate provenienze di Pieve di Cadore (Belluno), Boscolungo (Pistoia), Vallombrosa e Serra S. Bruno e le esperienze di confronto vennero istituite nell'arboreto della Joux nel Giura a 725 m. a clima molto piovoso, umido, freddo e prettamente continentale sia per le escursioni di temperatura sia per la brevità del periodo di vegetazione, estremamente ridotto dalle gelate che si verificano durante 7 mesi dell'anno.

I risultati delle prove constatati nel gennaio 1935 e che il prof. Guinier cortesemente ci comunicò furono i seguenti: provenienze di Serra S. Bruno e Vallombrosa: perdita totale; provenienza di Boscolungo: perdite 80%, mentre per la provenienza del Cadore le sopravvivenze furono del 100%.

Quanto sopra si è esposto circa i risultati conseguiti nella triplice esperienza di Vallombrosa, dell'Alta Val Parma e del Giura dimostrano chiaramente che

dal punto di vista della resistenza al gelo e, in senso più lato, ad una maggiore continentalità del clima, le provenienze appenniniche si comportano in modo nettamente diverso da quelle alpine e centro-europee, il che conferma l'esistenza di razze biologiche distinte.

Fatta questa fondamentale premessa, esponiamo i seguenti risultati riassuntivi concernenti l'accrescimento in altezza ed in diametro nelle parcelle di Vallom-

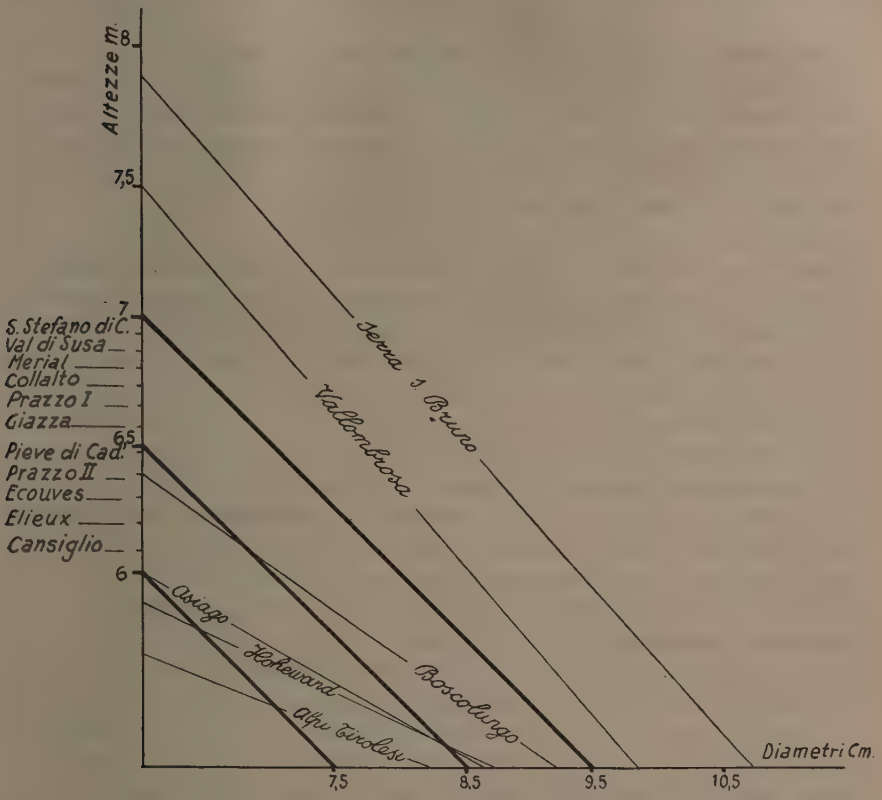


Fig. 1. – Correlazione tra diametri medi ed altezze medie delle singole provenienze, a 21 anni (1950).

brosa (17 provenienze). Un primo gruppo, cioè Serra S. Bruno e Vallombrosa nel 1949 a venti anni di dimora presentava le massime altezze, da m. 7,50 a m. 7,90. Segue un gruppo con altezze intermedie da 6,50 a 7 m., con ampio predominio delle provenienze alpine meridionali cui è da associare la sola provenienza francese di Mérial (Pirenei). Il penultimo gruppo, con altezze da m. 6–6,50 comprende le provenienze dei Vosgi e di Normandia, Cansiglio, Pieve di Cadore, Prazzo II (Cuneo) e Boscolungo. L'ultimo gruppo, con altezza minore m. 6, comprende solo Asiago e Alpi tirolesi.

Quanto all'accrescimento diametrico, si conferma la supremazia delle provenienze appenniniche di Serra S. Bruno e Vallombrosa, cui segue quella di Bosco-

lungo che, invece aveva avuto un accrescimento in altezza alquanto lento. Negli altri gruppi le varie provenienze si collocano in modo analogo a quello constatato per l'accrescimento in altezza, però con qualche eccezione. Viene quindi confermato su base sperimentale che la provenienza del seme ha una notevole influenza sull'accrescimento dell'abete bianco in differenti stazioni, almeno nel primo ventennio (vedi diagramma).

Ma il problema principale che doveva essere chiarito è quello, se veramente le provenienze o razze meridionali abbiano un temperamento particolarmente xerofilo e lucivago. Ora è da ricordare che tutta la pratica della selvicoltura nell'Europa centrale ed anche nella regione alpina dimostra come l'abete bianco nei primi anni del suo sviluppo richieda la protezione di un soprassuolo adulto, per cui i metodi di rinnovazione naturale si basano principalmente su tale necessità, mentre è escluso di poter coltivare l'abete bianco allo scoperto poichè in tali condizioni il fallimento è sicuro.

Sebbene molti Autori (fra cui specialmente Rubner) avessero già dimostrato che tra le varie condizioni ecologiche sfavorevoli all'abete bianco una delle più importanti è quella delle gelate tardive alle quali esso è estremamente sensibile, si era avuta sin qui la tendenza ad attribuire la suaccennata necessità di protezione al fatto che l'abete ama l'ombra e non a quello che la protezione stessa ed, in senso più lato, il microclima dell'interno del bosco, rendono meno sensibili gli effetti delle gelate.

Quando i selvicoltori nordici osservarono il comportamento dell'abete bianco nelle nostre foreste appenniniche come Vallombrosa, Camaldoli, ecc. dove esso viene trattato a taglio raso e perciò impiantato su aree completamente scoperte senza soffrire, rimasero molto meravigliati e così venne affacciata l'ipotesi che l'abete presentasse razze meridionali a temperamento lucivago.

Tale ipotesi sembrò essere poi avvalorata da numerose osservazioni fatte sulla rinnovazione naturale dell'abete bianco, sugli Appennini e nei Pirenei: osservazioni non sempre approfondite oppure influenzate dall'ipotesi che si voleva sostenere.

Ora, i risultati delle nostre esperienze dimostrano all'evidenza che il bisogno di protezione si riferisce alla difesa dal gelo e non all'esigenza di ombreggiamento, poichè le due sperimentazioni di Vallombrosa e dell'Alta Val Parma furono eseguite impiantando gli abeti su aree completamente scoperte.

Ma, mentre a Vallombrosa tutte indistintamente le provenienze, comprese quelle nordiche ed alpine, si svilupparono normalmente manifestando apprezzabili differenze non di comportamento vegetativo, ma solo di accrescimento, nell'Alta Val Parma, come si disse, perirono tutte le provenienze meridionali e furono anche gravemente danneggiate quelle alpine e centroeuropee. Con ciò viene dimostrato all'evidenza l'equivoco in cui si era caduti.

Di fronte a questi risultati si è creduto necessario approfondire ed estendere le indagini sul comportamento biologico dell'abete bianco in tutto il suo areale e particolarmente nelle località delle provenienze sperimentate.

Questo studio ha riguardato principalmente la vegetazione dell'abete bianco in boschi puri o misti, la sua diffusione in rapporto alle condizioni ecologiche ed il suo comportamento rispetto alla luce, al calore ed all'umidità.

Da tale indagine è risultato quanto segue:

1° L'abete bianco tende piuttosto ad associarsi ad altre specie che a formare boschi puri. La sua rinnovazione in boschi puri è fenomeno assai raro e limitato a ristrette zone, situate nell'*optimum* delle condizioni ambientali.

2° Nei settori più continentali del suo areale e in quello alpino l'abete bianco tende a salire dal suo tipico piano di vegetazione (*Fagetum*) verso il piano soprastante del *Picetum* giungendo sulle Alpi, talvolta, sino al limite della vegetazione forestale.

3° Nel settore meridionale l'abete bianco tende invece a discendere verso il piano basale consociandosi alle latifoglie decidue (*Castanetum, Quercetum*) e talvolta giungendo persino al piano mediterraneo delle latifoglie sempreverdi.

4° Questo fenomeno però non è da attribuire, per le razze meridionali dell'abete bianco, ad un temperamento biologicamente molto diverso da quello delle razze settentrionali. Infatti anche nel settore continentale si notano numerosi casi di discesa dell'abete nei querceti del piano sottostante, ma tale discesa trova un limite insormontabile nell'azione dei geli tardivi che caratterizzano le pianure continentali del centro e dell'est europeo.

Analogamente, anche in Italia, la discesa dell'abete bianco dalle Alpi verso la pianura padana è ostacolata dall'accentuata continentalità del clima mentre dalla catena appenninica verso la costa tale discesa trova un limite soltanto nelle esigenze di umidità dell'abete stesso.

5° La rinnovazione naturale dell'abete bianco nel settore meridionale della sua area di vegetazione non dipende tanto dalle condizioni di luce quanto da quelle del suolo. Infatti, affinchè tale rinnovazione avvenga in modo sicuro e continuato così da determinare il perpetuarsi della specie, è necessario, nella maggioranza dei casi, che alla formazione dell'humus forestale concorrano altre specie, generalmente latifoglie (faggio, castagno, querce, ecc.) e talvolta conifere.

6° Nel settore meridionale (Appennino centro–meridionale, versante mediterraneo dei Pirenei, ecc.) l'abete bianco dimostra di avere un certo adattamento xerofilo, ma in misura assai limitata, tanto è vero che la sua discesa nel piano sub–montano avviene esclusivamente nelle stazioni umide e fresche mentre non si verifica affatto in quelle secche e soleggiate.

Inoltre i periodi di eccezionale, prolungata siccità sono gravemente dannosi all'abete bianco, come dimostra il grave deperimento delle abetine nelle foreste dell'Appennino toscano, avvenuto in questi ultimi anni.

Date le esigenze dell'abete bianco nei riguardi dell'umidità del suolo e di quella atmosferica, è logico che esso, lungi dal manifestare un temperamento lucivago nel settore meridionale della sua area, debba ricercare per il suo insediamento e successiva vegetazione l'ombra anzichè la luce perchè l'ombra determina una maggiore frescura.

Questo fatto è confermato dall'osservazione obiettiva ed anche dalla sperimentazione, cioè da ricerche fotometriche che sono state eseguite nella foresta di Vallombrosa ed i cui risultati non si possono qui esporre per brevità.

In proposito è da osservare, circa le supposte affinità biologiche dell'abete bianco appenninico con l'abete di Grecia (*Abies cephalonica*), che la rinnovazione naturale di questo avviene esclusivamente all'ombra.

Il fatto che si può osservare in molte foreste appenniniche, comprese quelle calabresi, dove l'abete bianco rimane per decenni ed anche per oltre un secolo sotto l'ombra di alberi annosi e che, liberato da questo aduggiamento, riprende vigorosamente a svilupparsi, non dimostra nell'abete un temperamento lucivago ma il contrario, poichè è noto che le specie spiccatamente lucivaghe non possono sopportare per tanto tempo l'aduggiamento.

D'altra parte, anche dove non si discute neppure il temperamento ombrivago dell'abete bianco, come ad esempio nell'Europa centrale, i metodi di selvicoltura basati sulla rinnovazione naturale consistono appunto nel creare con un'ombra moderata le condizioni favorevoli alla rinnovazione, dando poi gradatamente la luce per permettere l'ulteriore sviluppo del novellame.

Il fatto, constatato più volte, dell'esistenza di gruppi di novellame di abete sull'orlo del bosco e sulle chiarie non è sufficiente a dimostrare un temperamento lucivago, anche perchè quasi sempre non si conoscono le condizioni in cui avvenne la disseminazione; del resto esso si verifica anche nel settore settentrionale e alpino. Ma, sopratutto, nel fenomeno della rinnovazione stessa hanno un'influenza decisiva, come si è detto, le caratteristiche del suolo, nella loro complessità non soltanto fisico–chimica ma anche biologica.

Concludendo, nè la sperimentazione nè l'attenta osservazione dei fatti nè i fondamenti dell'ecologia ci permettono di confermare l'ipotesi che l'abete bianco presenti razze meridionali a temperamento lucivago. Si deve invece ammettere un limitato adattamento xerofitico di tali razze, le quali inoltre presentano indubbiamente una maggiore sensibilità di quelle alpine e centro–europee rispetto ai geli e, più generalmente, all'accentuarsi della continentalità del clima.

Le nostre indagini si sono portate anche sui caratteri morfologici delle provenienze sperimentate, soprattuto allo scopo di confermare o meno quei caratteri differenziali dell'abete appenninico che erano stati rilevati da vari Autori.

Particolare interesse presentava la provenienza di Serra S. Bruno poichè si era asserito che questo rappresentasse un termine di passaggio tra *Abies alba* e *A. Nebrodensis*, specie endemica della Sicilia e oggi quasi scomparsa.

I supposti caratteri differenziali consisterebbero nella presenza o meno di tasche resinifere delle piante giovani, nella lunghezza degli aghi, nella disposizione distica più o meno marcata, nella forma delle estremità degli aghi stessi (acuti, arrotondati, smarginati, ecc.), nel portamento, statura, ramificazione, ecc.

Le nostre osservazioni esaurientemente dimostrano che non si tratta affatto di caratteri costanti e che si tratta invece di variazioni individuali di cui alcune, come ad esempio la forma, le dimensioni, la disposizione degli aghi, si possono presentare anche sullo stesso esemplare.

Quanto al portamento ed alla persistenza dei rami, non si può attribuire esclusivamente a fattori genetici un fenomeno comune a tutte le specie arboree nei climi meridionali, dove l'intensa luminosità e spesso la deficiente umidità determinano ad un tempo una più lunga durata dei rami inferiori ed un minore sviluppo degli assi vegetativi.

Per l'abete di Serra S. Bruno le indagini eseguite sul posto hanno dimostrato effettivamente la presenza di due popolazioni, delle quali una con caratteri morfologici normali tanto da non fare assolutamente distinguere tale forma da quelle alpine o settentrionali, ed una con aghi nettamente più corti, lunghi intorno a 10 mm. Precisamente nelle abetine di Monte Pecoraro prevale il tipo normale mentre nell'adiacente bosco S. Maria, nella proporzione di circa il 10 %, accanto alle piante con aghi normali si trovano quelle ad aghi più corti e disposti a spazzola verso l'estremità del rametto.

La disposizione degli aghi a spazzola, anzichè distica, dipende però, e non solo in questo caso, dalle condizioni di luce. Infatti i rami all'ombra hanno disposizione distica mentre quelli dei rami fortemente illuminati hanno disposizione a spazzola; ora, siccome la disposizione distica è quella adatta a ricevere la massima quantità di luce, tale disposizione prevale nei climi scarsamente luminosi come quelli del nord, mentre cede il posto alla disposizione a più serie, cioè a spazzola, nei climi meridionali dove l'intensità di luce è maggiore. Infattti anche sulle Alpi e nell'Europa centrale i rami terminali (che sono di regola anche quelli fruttiferi) situati verso la vetta, cioè in piena luce, presentano gli aghi con disposizione a spazzola.

È interessante infine notare che l'esame istologico degli aghi dell'abete di Serra S. Bruno non ha dimostrato, in ambedue le forme, alcuna struttura xerofitica, sia per lo spessore della cuticola e dell'epidermide, sia per il numero ed i caratteri degli stomi. Del resto, a Serra S. Bruno non si può assolutamente parlare di adattamento xerofitico, poichè si tratta di una stazione ad altissima piovosità (oltre i 2800 mm. all'anno) e ad elevatissima umidità atmosferica.

Scienza dell'Alimentazione. — *Sul meccanismo di azione della tripsina quale fattore lipotropo. Enzima od ormone?* (*) Nota di Ugo Lombroso, Ludovico Arrigo, Sandro Pontremoli, presentata (**) dal Socio U. Lombroso.

Ricordiamo brevemente come è sorto il problema sopra enunciato e quali sono gli argomenti apportati in favore delle due contrastanti concezioni. È noto che i cani spancreati possono vivere anche anni se al trattamento insulinico si aggiunge poltiglia di pancreas crudo, mentre in mancanza di quest'ultimo muoiono dopo alcuni mesi, presentando una steatosi epatica così elevata da annullare presumibilmente importanti funzioni del fegato. Questo accumulo di grasso è pressochè unanimamente interpretato quale esponente di una diminuita attitudine dell'organismo ad utilizzare i lipidi, dopo l'estirpazione del pancreas (1).

(*) Lavoro eseguito sotto l'auspicio del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 10 marzo 1951.

(1) U. Lombroso, *Conferenze di Endocrinologia*, Settimana Alta Cultura Medica Internazionale, Firenze, aprile 1950.

Per spiegare in quale modo la poltiglia di pancreas, somministrata al cane spancreato, ostacola l'insorgenza della steatosi e il perchè nel cane normale tale steatosi non si manifesta, due concezioni, del tutto opposte, sono state prospettate. Secondo l'una, anche il metabolismo intermedio dei lipidi, dipende dalla funzione esterna del pancreas, nel senso che il secreto pancreatico, in virtù del suo enzima proteolitico, libererebbe dagli alimenti, fattori lipotropi (ad esempio metionina), che intervengono appunto nel ricambio dei grassi. La stessa interpretazione si estenderebbe naturalmente all'azione della poltiglia di pancreas. Secondo l'altra concezione invece, la poltiglia di pancreas agirebbe, in quanto contiene un ormone specifico per il metabolismo intermedio dei grassi e questa sostanza si potrebbe anche estrarre ed iniettare parenteralmente, manifestando la sua attività al di fuori del tubo digerente.

La prima concezione è difesa con particolare ricchezza di dati sperimentali da Chaikoff–Entenman e Collaboratori [2]. Questi Autori, che avevano riconosciuto che gran parte dei dati di fatto da loro raccolti, non portavano una risposta risolutiva per il problema, ritennero recentemente di aver raggiunta tale dimostrazione, in base alla seguente esperienza. Essi spancrearono dodici cani e alimentandoli in egual modo, somministrarono a otto di questi 0.5–1 ctgr. di tripsina pura cristallizzata *per os* e *pro die*; agli altri quattro invece no. Dopo cinque mesi, furono tutti sacrificati: nei cani trattati con tripsina il fegato aveva un contenuto normale in lipidi (circa il 3 %), gli altri invece presentavano una steatosi i cui valori oscillavano tra il 17 ed il 37 %. Gli Autori americani interpretarono tale risultato come dovuto alla liberazione dei fattori lipotropi nell'intestino, per l'azione proteolitica della tripsina.

Questa conclusione è però accettabile?

In ricerche di controllo, eseguite somministrando queste piccole dosi di tripsina a cani spancreati, noi [3] non abbiamo verificato alcun miglioramento nell'assorbimento proteico, fatto che ci rende perplessi ad ammettere, da parte della tripsina, già sostata nella cavità gastrica sotto l'azione dell'acido cloridrico e della pepsina, un'azione proteolitica così efficace. Ma un più diretto controllo ci parve necessario per una valutazione critica delle deduzioni che gli Autori americani avevano tratto ed era quello di indagare se la tripsina, somministrata per via parenterale, al di fuori cioè da ogni possibilità d'azione nel lume enterico, potesse ancora manifestare un'azione antisteatogena, come avviene per via orale.

Noi abbiamo svolto le nostre ricerche su due tipi di steatosi e cioè sull'infiltrazione grassa del fegato che si instaura dopo epatectomia parziale e sulla steatosi che si ottiene dopo 2–3 settimane di trattamento con tetracloruro di carbonio.

Ambedue queste steatosi epatiche sono state largamente utilizzate nello studio dei fattori lipotropi, non però a proposito della tripsina pura. Nelle presenti ricerche, la tripsina è stata somministrata in ragione di mgr. 10–20 *pro die* e *pro capite*, sia per via orale che per iniezione peritoneale.

(2) L. Montgomery, C. Entenman, J. L. Chaikoff, H. Feinberg, « Journ. Biol. Chem. », *185*, 307 (1950).

(3) U. Lombroso, C. Ardy, « Boll. Soc. Ital. Biol. Sper. », in corso di stampa.

I ratti, su cui si era eseguita l'epatectomia parziale (asportazione di circa il 70 % dell'organo) furono sacrificati 48 ore dopo l'operazione, momento che rappresenta il massimo di steatosi raggiungibile (aumento degli acidi grassi epatici di oltre il 250 %). I ratti avvelenati con tetracloruro furono iniettati giornalmente con 70 mgr. per 100 grammi di peso corporeo ed uccisi, a seconda della maggiore o minore resistenza dei controlli, che si dimostravano tutti più profondamente debilitati, rispetto agli animali trattati, dopo 15–20 giorni.

Riassumiamo nella seguente tabella i dati del contenuto in grassi totali e del metabolismo gassoso degli animali trattati (vedi inoltre il grafico, con i dati medi della percentuale in acidi grassi nel fegato).

Tabella (dati medi).

	FEGATO			METABOLISMO GASSOSO		
	Peso animale gr.	gr. tot.	acidi gr.	O_2 Kg. h	CO_2 Kg. h	Q. R.
Ratti normali (30 animali) .	180	5,2	3,6	1,30	1,13	0,86
Ratti parzialmente epatectomizzati (uccisi dopo 2 giorni) 50 animali).	175	12,8	9,8	1,46	1,65	1,09
Id. e trattati con tripsina *per os* (10 animali) . . .	160	6,9	4,8	2,26	2,01	0,82
Id., trattati con tripsina iniettata in peritoneo (12 animali)	170	6,0	4,1	3,00	2,50	0,75
Ratti avvelenati per 15 g. con tetracloruro di carbonio (20 animali)	175	14,5	12,0	2,65	2,95	0,81
Id. e trattati con tripsina *per os* (10 animali) . . .	160	9,1	6,9	3,00	2,33	0,79
Id. e trattati con tripsina iniettata in peritoneo (12 animali).	165	6,8	5,1	3,00	2,15	0,70
Ratti parzialmente epatectomizzati ed iniettati in peritoneo con tripsina inattivata (6 animali) . . .	168	5,8	3,9	2,95	2,12	0,72

I risultati ottenuti sono molto uniformi e concordano tutti nel dimostrare che l'effetto lipotropo della tripsina pura non è mai inferiore e spesso anzi lievemente superiore, quando essa è somministrata per iniezione endoperitoneale, rispetto alla somministrazione *per os*.

Il metabolismo gassoso d'altronde indica come nei ratti parzialmente epatectomizzati e trattati con tripsina sia esaltato il consumo di O_2 ed il Q. R. risulta in seconda giornata dopo l'operazione su 0,8 (nei ratti cui si somministrava la tripsina per bocca) e su 0,7 (nei ratti in cui si iniettava il fattore in peritoneo).

Negli animali operati e non trattati invece il Q. R. è, nello stesso periodo, superiore all'unità.

Tutto ciò indica che non è ad una eventuale azione proteolitica svolta dalla tripsina nel lume intestinale, che si debbono ascrivere i suoi effetti lipotropi,

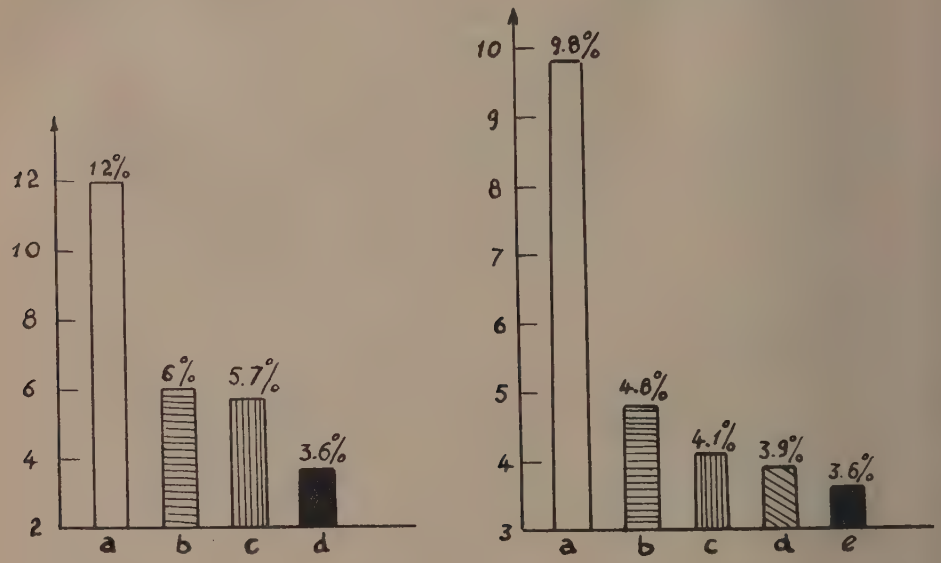


Fig. 1.

Steatosi epatica nel corso dell'avvelenamento con CCl_4.

a) Ratti iniettati con CCl_4 per 15 gg.
b) Id. e trattati con tripsina *per os*
c) Id. e trattati con tripsina per via peritoneale
d) Ratti normali

Infiltrazione grassa del fegato da parziale epatectomia (2° giorno dopo l'intervento).

a) Ratti parzialmente epatectomizzati
b) Id. e trattati con tripsina *per os*
c) Id. e trattati con tripsina per via peritoneale
d) Id. e trattati con tripsina inattivata
e) Ratti normali

bensì ad una azione esercitata direttamente, allorchè essa entra nel circolo generale. Se poi si possa attribuire alla tripsina, in queste condizioni, il suo effetto lipotropo, in quanto essa esplichi nei tessuti una attività proteolitica, è quesito alla cui soluzione abbiamo cercato di rispondere direttamente.

Qualsiasi sia però il meccanismo di azione della tripsina, ciò che si può già escludere, in base ai dati riportati, è che questi rientri nell'interpretazione, avanzata da Chaikoff–Entenman e Collaboratori. Fatto del resto già a priori prevedibile, data la piccola quantità di tripsina, somministrata ai cani da questi Autori e la sua probabile inattivazione nella cavità gastrica, per intervento dell'acido cloridrico e della pepsina.

La concezione di Dragstedt, che cioè la poltiglia di pancreas agisca [4,5], perchè contiene un fattore specifico (il lipocaic), assorbito o dalla mucosa enterica o dalla superfice peritoneale, trova nelle presenti ricerche indubbia conferma.

La questione è stata anche studiata da Baccari e Collaboratori [6,7], i quali avrebbero osservato, in preparazioni personali di « antifatty liver factor » (A. F. L.), la persistenza, dopo qualche mese di una attività triptica e parallelamente la totale scomparsa di ogni efficacia lipotropa. Fatto che il Baccari attribuisce ad una distruzione del A. F. L., per opera dell'attività triptica stessa.

Per risolvere il quesito, noi abbiamo proceduto nel seguente modo: abbiamo trattato tripsina pura cristallizzata con acido cloridrico N/20, in proporzione di 1 a 10. Indi abbiamo riposto il preparato in termostato a 37° C. per 72 ore ed abbiamo successivamente raggiunto la neutralità della soluzione con Na OH N/20.

La tripsina così trattata risultò del tutto priva di attività proteolitica « in vitro », ma, come si osserva nella tabella e nel grafico, esercitò un'azione antisteatogena perfettamente uguale a quella della tripsina attiva. Non è quindi in base alla sua attività enzimatica che la cosidetta tripsina pura cristallizzata, esercita un effetto lipotropo.

L'interrogativo che abbiamo formulato nel titolo della presente Nota, se cioè l'azione lipotropa della tripsina si possa interpretare come dovuta alla sua attività proteolitica, sarebbe quindi risolto in senso completamente negativo.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sull'immersione di un piano grafico in uno spazio grafico a tre dimensioni.* Nota di LUCIO LOMBARDO-RADICE, presentata (*) dal Corrisp. B. SEGRE.

1. Secondo un risultato classico, *ogni piano grafico desarguesiano è un piano lineare* (*od analitico*), tale cioè che si possono rappresentare i suoi punti colle coppie ordinate di elementi di un corpo, non necessariamente commutativo, e le sue rette con equazioni lineari nel corpo stesso; e, viceversa, *ogni piano analitico è desarguesiano.* È quindi sempre possibile immergere un piano siffatto in uno spazio lineare a tre dimensioni, per via analitica (1). D'altra parte, giacchè un S_n irriducibile (2) per $n \geq 3$ è sempre desarguesiano, e tale è ogni piano in esso contenuto, si ha che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè un piano grafico possa essere immerso in uno spazio grafico irriducibile a 3 dimensioni è che esso sia desarguesiano.

(4) L. R. DRAGSTEDT, J. van PROHASKA, H. P. HARMS, « Phys. », *117*, 175 (1936).

(5) J. van PROHASKA, L. R. DRAGSTEDT, H. P. HARMS, « Am. Journ. of Phys. », *117*, 166 (1936).

(6) V. BACCARI, F. FIDANZA, G. CAVINA, « Boll. Soc. Ital. Biol. Sper. », *26*, 588 (1950).

(7) V. BACCARI, F. FIDANZA, G. GIUSTI, « Boll. Soc. Ital. Biol. Sper. », *26*, 590 (1950) e *25*, 1021 (1949).

(*) Nella seduta del 10 marzo 1951.

(1) Per una esposizione esauriente della teoria, vedi B. SEGRE, *Lezioni di geometria moderna*, vol. I, Zanichelli, Bologna, 1948, soprattutto da p. 102 a p. 129.

(2) Cioè tale che in esso valga il postulato di FANO: *ogni retta contiene almeno tre punti*

Qui mostreremo come allo stesso risultato si possa giungere per via geometrica affatto elementare, con procedimento che poi si estende facilmente quando si voglia costruire un S_n ambiente a partire da un S_{n-1}. In sostanza si tratta di una generalizzazione (e, in un secondo tempo, di una inversione) del procedimento della « proiezione centrale », mediante il quale si usano rappresentare gli elementi dello spazio ordinario su di un piano ad esso appartenente.

2. Dato uno spazio grafico S_3 irriducibile (necessariamente desarguesiano), si fissino due piani distinti: S_2, S_2^* ed un punto O fuori di entrambi (il che è sempre possibile, appunto perchè S_3 è irriducibile), e si denoti con u la retta S_2, S_2^*. Un punto P di S_3 distinto da O e non giacente nè su S_2 nè su S_2^* si può rappresentare su S_2 mediante la sua proiezione P' da O su S_2, l'intersezione T_p di una retta p per P con S_2 (« traccia » di p), e la proiezione I'_p da O su S_2 dell'intersezione I_p di p con S_2^* (I'_p = « fuga » di p). Si ha che: 1° la traccia e la fuga risultano allineate con P'; 2° la traccia T_{p^*} e la fuga I'_{p^*} di una qualsiasi altra retta p^* passante per P sono una coppia di punti corrispondenti nell'omologia tra i piani sovrapposti S_2, S'_2 avente per centro P', per asse u, e nella quale a T_p corrisponde I'_p [3]. Tutto ciò si può riassumere dicendo che:

Ogni punto P *di* S_3 (distinto da O e non giacente nè su S_2 nè su S_2^*) *è rappresentato su* S_2 *da un'omologia di asse u tra i piani sovrapposti* S_2, S'_2; in simboli: $P(P'; T_p, I'_p)$, sottintendendo che l'asse è u. Caso particolare: il punto P giace sul piano Ou, caratterizzato da ciò che l'omologia è speciale.

Facciamo ora le seguenti convenzioni.

I–1) Rappresentiamo O mediante l'omologia identica (in quanto, per ogni retta passante per O, traccia e fuga coincidono).

I–2) Rappresentiamo un punto T di S_2 con l'« omologia degenere » D_T nella quale ad un punto generico I' di S'_2 corrisponde il punto fisso T di S_2, fatta eccezione per i punti di u, il cui omologo è indeterminato (T si chiamerà il « centro » dell'omologia).

I–3) Rappresentiamo un punto di I di S_2^* colla « omologia degenere » $D_{I'}$, che ad un punto generico T di S_2 fa corrispondere il punto fisso I' di S'_2, fatta eccezione per i punti di u, il cui omologo è indeterminato.

I–4) Assumiamo $D_{I'}$ e D_T come rappresentazioni di uno stesso punto quando $T = I'$ giace sulla u.

Passiamo ora alla *rappresentazione dei piani* di S_3.

II–1) Se un piano α non contiene u, esso può essere rappresentato su $S_2 = S'_2$ dall'insieme di tutte le omologie di asse u che mutano una data retta t_α di S_2 in una data retta i'_α di S'_2, la quale incontri t_α in un punto di u. Useremo il simbolo: $\alpha(t_\alpha, i'_\alpha)$.

II–2) Se α contiene u, si consideri un punto $P(P'; T_p, I'_p)$ di α. Un altro punto $Q(Q'; T_q, I'_q = I'_p)$ appartiene ad α se e soltanto se T_q è il corrispondente di Q' nell'omologia di centro I'_p ed asse u nella quale a P' corrisponde T_p.

(3) In un piano desarguesiano esiste una (ed una sola) omologia di dato centro, dato asse, e nella quale a un punto A corrisponde un punto A': ved. Segre, op. cit., p. 112.

Il piano α potrà allora essere rappresentato dall'insieme delle omologie di questo tipo. Useremo il simbolo: $\alpha(P'; T_\beta, I'_\beta)$.

II–3); II–4) Il piano S_2 sarà rappresentato dall'insieme $S_2(D_T)$ di tutte le omologie degeneri D_T e il piano S_2^* sarà rappresentato dall'insieme di tutte le omologie degeneri $D'_{I'}$ [simbolo: $S_2^*(D'_{I'})$].

Infine, sarà possibile rappresentare le rette di S_3 nel modo che segue:

III–1) Una retta r non passante per O e non appartenente nè a S_2 nè a S_2^* sarà rappresentata dall'insieme delle omologie $r(r'; t_\alpha, i'_\alpha)$ aventi il centro sulla r', per asse u, e nelle quali a t_α corrisponde i'_α. Casi particolari: *a*) se r', t_α, i'_α concorrono in un medesimo punto della u la retta u e la r sono complanari; *b*) se r' coincide addirittura con u, si tratterà di una retta del piano Ou;

III–2) una retta r passante per O sarà rappresentata dall'insieme di tutte le omologie $r(P')$ aventi il centro nel punto $P' = T_r = I'_r$;

III–3); III–4) una retta di S_2 avrà per immagine l'insieme $r(D_T)$ di tutte le omologie degeneri D_T aventi il centro su r; una retta r di S_2^* sarà rappresentata con l'insieme $r'(D'_{I'})$ di tutte le omologie degeneri $D'_{I'}$ aventi il centro sulla proiezione r' di r da O su S_2.

Con l'avvertenza che, quando si impiega l'espressione: «tutte le omologie», si intende parlare anche delle (eventuali) omologie degeneri, si vede subito che le *relazioni di appartenenza* di punto a retta, di retta a piano, di punto a piano si traducono in *relazioni di inclusione* tra classi di omologie.

3. L'inversione di queste considerazioni è immediata. Infatti, dato un piano desarguesiano S_2, in esso ha un senso ben definito parlare di omologie di dato centro e asse in cui si corrispondano due punti allineati con il centro, o due rette che si incontrino in un punto dell'asse (4). Chiamiamo allora *punti* le omologie I, *piani* e *rette* rispettivamente le classi di omologie II e III prima definite; e definiamo le relazioni di appartenenza come relazioni di inclusione tra classi.

Si vede allora subito che *i «punti», i «piani» e le «rette» così definiti per via astratta* (*senza uscire da* $S_2 = S'_2$) *formano un* S_3 *grafico che contiene l'*S_2 *dal quale si è partiti* (o più esattamente: che contiene un piano S_2^+ isomorfo a S_2; S_2^+ è il «piano» composto dai «punti» D_T e dalle rette $r(D_T)$. Tralasciamo la dimostrazione, che si ridurrebbe a una verifica di carattere elementare; e la verifica è, in sostanza, superflua, poichè siamo già sicuri *a priori* del risultato in base a quanto abbiamo osservato nel n. 1.

4. Si vede anche senza difficoltà che, dato un S_3 grafico, fissato in esso un piano u, se si definiscono come «punti» le omologie solide che hanno u per piano asse, si possono definire «rette», «piani» e «iperpiani» come classi di omologie in modo da costruire, a partire da S_3, un S_4 ambiente. Lo stesso procedimento si può usare per immergere un S_{n-1} grafico in S_n.

(4) Vedi nota (3).

Analisi. — *Sull'estensione delle nozioni di «colle», «nodo» e «fuoco» ai sistemi di due equazioni differenziali periodiche in tre variabili.* Nota I di LUIGI AMERIO, presentata (*) dal Corrisp. B. FINZI.

La classica nozione di *punto singolare*, secondo Poincaré, del sistema:

$$(1) \qquad \begin{cases} x' = X(x, y) \\ y' = Y(x, y), \end{cases}$$

può estendersi nel modo seguente al sistema:

$$(2) \qquad \begin{cases} x' = X(t, x, y) \\ y' = Y(t, x, y), \end{cases}$$

dove X, Y sono funzioni periodiche, di periodo T, della variabile indipendente t.

Per le (1) *punto singolare* è un punto $(\bar{x}, \bar{y})$ che annulli contemporaneamente X e Y: *soluzione singolare* è perciò da considerare la *soluzione costante* $\{x = \bar{x}, y = \bar{y}\}$, il cui grafico, nello spazio (t, x, y) è la retta $\{x = \bar{x}, y = \bar{y}\}$, parallela all'asse t.

È allora spontaneo di assumere come *soluzione singolare* del sistema (2) una soluzione

$$(3) \qquad \begin{cases} x = x^*(t) \\ y = y^*(t), \end{cases}$$

la quale sia periodica, di periodo T (1).

In un intorno di tale soluzione gli integrali delle (2) presentano, come dimostreremo, un comportamento analogo a quello relativo alle (1) nei tre casi del colle, nodo e fuoco.

Ad esempio, se $(\bar{x}, \bar{y})$ è, per il sistema (1), un colle, passano per la retta $\{x = \bar{x}, y = \bar{y}\}$ dello spazio (t, x, y), come è notissimo, *due* superficie cilindriche, formate da linee integrali delle (1). Consideriamo ora il sistema (2): le sue linee integrali sono le *caratteristiche* dell'equazione a derivate parziali

$$(4) \qquad \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial x} X(t, x, y) = Y(t, x, y),$$

ogni superficie integrale della quale è formata da ∞^1 di tali linee.

(*) Nella seduta del 10 marzo 1951.

(1) Più in generale, si possono supporre le X, Y, x^*, y^* funzioni *limitate* di t nell'intervallo $-\infty \ldots +\infty$. Ho esteso a tale caso, sotto convenienti ipotesi (ma non così semplici ad enunciare come nel caso periodico), la nozione di « colle » in una conferenza dal titolo *On the extension of the notion of saddle point to the systems of two differential equations in three variables* tenuta il 6 novembre 1950 presso la New York University.

Le soluzioni periodiche del sistema (2) possono dividersi allora (nel caso generale) in *tre* tipi che chiameremo rispettivamente, estendendo le denominazioni ormai classiche per le (1): *tipo colle, tipo nodo, tipo fuoco.*

Se $\{x^*(t), y^*(t)\}$ è di tipo *colle*, si dimostra che l'*equazione* (4) *ammette* (effettuato eventualmente, mediante una sostituzione lineare, un cambiamento di incognite nelle (2)) *due, e due sole, soluzioni,* $y = y_1(t, x)$, $y = y_2(t, x)$ *funzioni periodiche di* t, *tali che sia* $y_i(t, x^*) = y^*$. Le superficie integrali così ottenute passano perciò per la caratteristica $\{x^*(t), y^*(t)\}$. Nell'intorno di questa gli integrali hanno un comportamento analogo a quello presentato nell'intorno di un colle per le (1).

Considerazioni analoghe valgono se $\{x^*(t), y^*(t)\}$ è di tipo nodo, o fuoco: in questi casi si riscontra un'analogia coi punti nodali, o focali, rispettivamente.

1. Supporremo, in quanto segue, che $X(t, x, y)$, $Y(t, x, y)$ siano funzioni reali e analitiche di (x, y), per $(x, y) \subset H$ (insieme aperto del piano (x, y)) e per $-\infty < t < +\infty$: siano inoltre funzioni periodiche (con periodo T) di t, continue insieme a tutte le loro derivate parziali rispetto alle variabili x, y.

Preso ad arbitrio nel piano (x, y) un dominio limitato $\Omega \subset H$, risulterà perciò, per $(x, y) \subset \Omega$ e per $-\infty < t < +\infty$:

$$(5) \qquad \begin{cases} \left| \frac{\partial^{m+n} X(t, x, y)}{\partial x^m \partial y^n} \right| \leq K_\Omega \, \delta_\Omega^{m+n} \\ \left| \frac{\partial^{m+n} Y(t, x, y)}{\partial x^m \partial y^n} \right| \leq K_\Omega \, \delta_\Omega^{m+n} \end{cases}$$

(disuguaglianza di Cauchy), con K_Ω e δ_Ω costanti positive, dipendenti da Ω.

Ammettiamo ora che il sistema (2) abbia la soluzione periodica (3).

Possiamo supporre che sia

$$(6) \qquad x^*(t) = y^*(t) = 0$$

perchè, in caso contrario, basta assumere come incognite, in luogo di $x(t), y(t)$ le funzioni

$$x_1(t) = x(t) - x^*(t)$$

$$y_1(t) = y(t) - y^*(t).$$

Per le (6) si ha

$$(7) \qquad X(t, 0, 0) = Y(t, 0, 0) = 0.$$

Possiamo inoltre, senza restrizione di generalità, *supporre che sia*

$$(8) \qquad \begin{cases} X_x(t, 0, 0) = A \quad , \quad X_y(t, 0, 0) = B \\ Y_x(t, 0, 0) = C \quad , \quad Y_y(t, 0, 0) = D, \end{cases}$$

con A, B, C, D *costanti reali.*

Infatti, per un classico teorema di Liapounoff [2], il sistema lineare alle variazioni associato al sistema (2), relativamente alla soluzione $\{0, 0\}$:

$$\delta x' = X_x(t, 0, 0)\,\delta x + X_y(t, 0, 0)\,\delta y$$
$$\delta y' = Y_x(t, 0, 0)\,\delta x + Y_y(t, 0, 0)\,\delta y,$$

è *riducibile*, cioè può trasformarsi in un sistema a coefficienti reali e costanti:

$$\delta u' = A\delta u + B\delta v$$
$$\delta v' = C\delta u + D\delta v,$$

mediante una sostituzione lineare

$$\delta u = p_{11}(t)\,\delta x + p_{12}(t)\,\delta y$$
$$\delta v = p_{21}(t)\,\delta x + p_{22}(t)\,\delta y,$$

dove le $p_{ik}(t)$ risultano funzioni reali, continue con le derivate $p'_{ik}(t)$, periodiche e con determinante non nullo.

Se allora operiamo nel sistema (2) la trasformazione

$$(9) \qquad \begin{cases} p_{11}(t)\,x + p_{12}(t)\,y = u \\ p_{21}(t)\,x + p_{22}(t)\,y = v, \end{cases}$$

le nuove incognite $u(t)$, $v(t)$, soddisfano a un sistema del tipo

$$u' = U(t, u, v)$$
$$v' = V(t, u, v),$$

dove è

$$U(t, 0, 0) = V(t, 0, 0) = 0,$$
$$U_u(t, 0, 0) = A \quad , \quad U_v(t, 0, 0) = B$$
$$V_u(t, 0, 0) = C \quad , \quad V_v(t, 0, 0) = D.$$

2. Per le (7), (8), possiamo supporre che il sistema (2) sia della forma

$$(10) \qquad \begin{cases} x' = Ax + By + \varphi(t, x, y) = X(t, x, y) \\ y' = Cx + Dy + \psi(t, x, y) = Y(t, x, y), \end{cases}$$

con A, B, C, D costanti reali, φ e ψ soddisfacenti alle condizioni

$$(11) \qquad \begin{aligned} &\varphi(t, 0, 0) = \varphi_x(t, 0, 0) = \varphi_y(t, 0, 0) = 0 \\ &\psi(t, 0, 0) = \psi_x(t, 0, 0) = \psi_y(t, 0, 0) = 0. \end{aligned}$$

Supporremo inoltre che risulti

$$(12) \qquad \Delta = AD - BC \neq 0.$$

(2) Cfr. ad esempio É. Goursat, *Cours d'Analyse Mathématique*. Gauthier-Villars, Paris, 1933 vol. II, pp. 514-516.

Se vale la (12) la soluzione $\{0, 0\}$ si dirà *regolare*. Diremo inoltre che tale soluzione è di *tipo colle se risulta*

$$\Delta < 0; \tag{13}$$

di *tipo nodo se*, posto

$$\lambda = \frac{A + D}{2}, \tag{14}$$

si ha

$$\lambda^2 \geqq \Delta > 0; \tag{15}$$

di *tipo fuoco se è*

$$\lambda^2 < \Delta. \tag{16}$$

Se le funzioni $\varphi(t, x, y)$, $\psi(t, x, y)$ non dipendono da t le condizioni ora poste indicano, come è ben noto, che il punto $(0, 0)$ è un colle, o un nodo, oppure un fuoco.

Inoltre, qualunque siano $\varphi(t, x, y)$ e $\psi(t, x, y)$ (purchè soddisfacenti alle (11)), le costanti λ e Δ sono *invarianti* rispetto alle sostituzioni lineari non degeneri a coefficienti costanti:

$$x_1 = mx + ny$$
$$y_1 = px + qy.$$

Possiamo perciò supporre

$$B \neq 0. \tag{17}$$

Consideriamo ora l'equazione a derivate parziali del primo ordine

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial x} X(t, x, y) = Y(t, x, y) \qquad (y = y(t, x)) \tag{18}$$

le cui caratteristiche sono le linee integrali del sistema (10). L'asse t è una di tali linee e per esso passano infinite superficie integrali della (18).

Cerchiamo se esiste una di tali soluzioni, $y = y(t, x)$, che risulti analitica come funzione di x e periodica, di periodo T, *come funzione di* t.

Dovrà perciò essere, per $|x| < R$,

$$y(t, x) = \sum_1^\infty{}_n\, y_n(t) \frac{x^n}{n!} \qquad \left(y_n(t) = \frac{\partial^n y(t, 0)}{\partial x^n}\right), \tag{19}$$

con $y_n(t)$ funzione periodica di t, di periodo T.

Supponiamo dapprima che una tale soluzione esista e che le $y_n(t)$ siano continue con le loro derivate $y_n'(t)$; risulti inoltre

$$\frac{\partial y(t, x)}{\partial t} = \sum_1^\infty{}_n\, y_n'(t) \frac{x^n}{n!}. \tag{20}$$

Per ottenere la $y_1(t)$, deriviamo la (18) rispetto a x, ottenendo

$$y_{tx} = -y_{xx} X - y_x (X_x + X_y y_x) + Y_x + Y_y y_x. \tag{21}$$

Posto in questa $x = 0$ e osservato che è, per le (19) e (20),

$$y(t, 0) = 0 \quad , \quad y_{tx}(t, 0) = y_1'(t) \tag{22}$$

si ha, per le (8),

$$y_1'(t) = -By_1^2(t) - (A - D)\, y_1(t) + C. \tag{23}$$

La (23) *è un'equazione di Riccati*, a coefficienti costanti, *nell'incognita* $y_1(t)$. Le *linee di stazionarietà*, nel piano (t, y_1) si ottengono risolvendo l'equazione (di secondo grado per la (17)):

$$By_1^2 + (A - D)\, y_1 - C = 0. \tag{24}$$

Perciò, se è

$$(A - D)^2 + 4BC = 4\{\lambda^2 - \Delta\} < 0,$$

cioè *se* $\{0, 0\}$ *è una soluzione di tipo fuoco del sistema* (10), tutti gli integrali $y_1(t)$ della (23) risultano funzioni decrescenti (per $B > 0$) oppure crescenti (se è $B < 0$); perciò *la* (23) *non ammette nessuna soluzione periodica* $y_1(t)$ *e la cercata superficie integrale della* (18) *non esiste.*

Supponiamo ora che sia

$$\lambda^2 - \Delta \geqq 0$$

cioè che $\{0, 0\}$ sia una soluzione di tipo colle o nodo.

In tal caso la (24) ammette le *due* soluzioni reali (eventualmente coincidenti)

$$\begin{cases} \bar{y}_1(t) = -\dfrac{A - D}{2B} + \dfrac{1}{B}\sqrt{\lambda^2 - \Delta}\,, \\ y_1^*(t) = -\dfrac{A - D}{2B} - \dfrac{1}{B}\sqrt{\lambda^2 - \Delta} \end{cases} \tag{25}$$

le quali costituiscono *due integrali costanti*, e quindi anche *periodici*, della (23). Poichè, supposto ad esempio $B > 0$, si ha

$$y_1'(t) < 0 \quad \text{per} \quad y_1 < y_1^* \quad \text{e per} \quad y_1 > \bar{y}_1,$$

$$y_1'(t) > 0 \quad \text{per} \quad y_1^* < y_1 < \bar{y}_1,$$

la (23) *non ammette altri integrali periodici.*

Indicato con y_1 *uno dei due valori* $y_1^*, \bar{y}_1$, poniamo

$$y(t, x) = x(y_1 + z(t, x)), \tag{26}$$

dove è, per la (19),

$$z(t, x) = \sum_1^\infty{}_n z_n(t)\frac{x^n}{n!} \qquad \left(\frac{z_n(t)}{n!} = \frac{y_{n+1}(t)}{(n+1)!} \quad , \quad z(t, 0) = 0\right). \tag{27}$$

Dalle (10), (11) segue inoltre

$$\varphi(t, x, y) = x^2 f(t, x, z)$$

$$\psi(t, x, y) = x^2 g(t, x, z)$$

con f, g funzioni olomorfe di (x, z) per $|x| \leq a$, $|z| \leq b$.

Si ha allora, per le (18) e (26), l'equazione in $z(t, x)$:

$$xz_t = -(y_1 + z + xz_x)(xA + x(y_1 + z)B + x^2 f) + (xC + x(y_1 + z)D + x^2 g)$$

cioè, per la (24),

$$(28)\quad z_t = -(y_1 + z + xz_x)(A + (y_1 + z)B + xf) + (C + (y_1 + z)D + xg) + \\ + By_1^2 + (A - D)y_1 - C = F(t, x, z, xz_x).$$

Osserviamo ora che, posto

$$(29)\qquad w = xz_x,$$

la $F(t, x, z, w)$ risulta, per la (28), funzione analitica di (x, z, w) per $|x| \leq a, |z| \leq b, |w| < +\infty$ e funzione periodica di t: si ha inoltre

$$(30)\quad \begin{cases} F(t, 0, 0, 0) = 0 \\ F_z(t, 0, 0, 0) = -(A - D) - 2By_1 = -(A + By_1) + D - By_1 \\ F_w(t, 0, 0, 0) = -(A + By_1). \end{cases}$$

Si ha poi

$$(31)\qquad A + By_1 \neq 0,$$

perchè, se fosse

$$y_1 = -\frac{A}{B},$$

seguirebbe dalla (24)

$$\Delta = 0,$$

contro la (12).

La (28) può pertanto essere posta nella forma

$$xz_x = G(t, x, z, z_t) \qquad (G(t, 0, 0, 0) = 0),$$

molto simile alla classica equazione di Briot e Bouquet alla quale, come è noto, si riconduce lo studio del sistema (1) nell'intorno di un punto singolare.

3. Per determinare le funzioni $z_n(t)$ deriviamo la (28) rispetto a x. Otteniamo, per la (29),

$$(32)\qquad z_{tx} = F_x + F_z z_x + F_w(z_x + xz_{x^2}) = (F_z + F_w)z_x + F_x + xF_w z_{x^2}$$

e quindi, posto $x = 0$, ricaviamo, per la (27), l'equazione differenziale lineare del primo ordine in $z_1(t)$:

$$(33)\quad z_1'(t) = (F_z(t, 0, 0, 0) + F_w(t, 0, 0, 0))z_1(t) + F_x(t, 0, 0, 0) \\ = -\{2(A + By_1) - D + By_1\}z_1(t) + Q_1(t),$$

dove $Q_1(t)$ è funzione nota e periodica.

La (33) *ammette manifestamente una e una sola soluzione periodica* $z_1(t)$ *se è*:

$$(34)\qquad 2(A + By_1) - D + By_1 \neq 0.$$

Deriviamo ora la (32) rispetto a x, ottenendo:

$$z_{tx^2} = (F_z + 2F_w)\, z_{x^2} + \{(F_{zx} + F_{wx}) + (F_{z^2} + F_{wz})\, z_x + (F_{zw} + F_{w^2})(z_x + xz_{x^2})\}\, z_x +$$

$$+ \{F_{x^2} + F_{xz}\, z_x + F_{xw}(z_x + xz_{x^2})\} + \{F_{wx} + F_{wz}\, z_x + F_{w^2}(z_x + xz_{x^2})\}\, xz_{x^2} + xF_w\, z_{x^3}.$$

Di qui, per $x = 0$, segue l'equazione in $z_2(t)$:

$$z_2' = (F_z(t, 0, 0, 0) + 2F_w(t, 0, 0, 0))\, z_2 + Q_2(t)$$

con $Q_2(t)$ funzione nota e periodica.

In generale, derivando n volte rispetto a x, otteniamo

$$(35) \quad z_{tx^n} = (F_z + nF_w)\, z_{x^n} + P_n(t, x, z, \cdots, z_{x^n - 1}) + xP_n^*(t, x, z, \cdots, z_{x^n}) + xF_w\, z_{x^{n+1}},$$

dove P_n, P_n^* sono polinomi, a coefficienti interi positivi, nelle derivate di F rispetto a x, z, w (escluse le derivate F_z, F_w) e nelle derivate z_{x^m}.

Posto nella (35) $x = 0$ e supponendo che le funzioni $z_k(t)$ siano periodiche per $k \leq n - 1$, si ottiene, per le (30), l'equazione in $z_n(t)$:

$$(36) \quad z_n' = -\{(n + 1)(A + By_1) - (D - By_1)\}\, z_n + Q_n(t),$$

con $Q_n(t)$ funzione nota, periodica e di periodo T.

Se allora risulta (tenendo presente la (31))

$$(37) \quad \frac{D - By_1}{A + By_1} \neq n + 1 \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

la (36) *ammette uno e un solo integrale periodico,* dato dalla formula

$$(38) \quad z_n(t) = \{1 - e^{-\varrho_n T}\}^{-1} \left\{ \int_0^t e^{-\varrho_n (t-\tau)}\, Q_n(\tau)\, d\tau + \int_t^T e^{-\varrho_n (T-(\tau-t))}\, Q_n(\tau)\, d\tau \right\},$$

con

$$(39) \quad \varrho_n = \{(n + 1)(A + By_1) - (D - By_1)\} \neq 0.$$

Inoltre, detto q_n il massimo modulo di $Q_n(t)$:

$$(40) \quad |Q_n(t)| \leq q_n,$$

si ricava dalle (36), (39) e (40) (annullandosi la derivata $z_n'(t)$ nei punti di massimo modulo per $z_n(t)$):

$$(41) \quad |z_n(t)| \leq \frac{q_n}{|\varrho_n|}.$$

In conclusione: *la* (18) *ammette al più due soluzioni* $\bar{y}(t, x)$, $y^*(t, x)$, *periodiche come funzioni di* t *e analitiche come funzioni di* x.

Resta ora da dimostrare la convergenza della serie (27) (e quindi della (19)), ciò che si farà col classico metodo delle funzioni maggioranti.

Geometria. — *Sul numero dei diametri principali di una curva algebrica piana con punti all'infinito non tutti distinti.* Nota di BELLINO ANTONIO ROSINA, presentata (*) dal Socio E. BOMPIANI.

G. Humbert (1) e B. Segre (2) dimostrano che due curve algebriche complanari si tagliano sotto angoli le cui cotangenti hanno somma dipendente solo dai punti impropri delle due curve.

L. Muracchini (3) in una sua recente Nota ottiene una interessante interpretazione geometrica dell'annullarsi di tale somma in un caso semplice ed ha così modo di dare una proprietà caratteristica dei diametri principali di una curva algebrica piana, diametri già altrimenti introdotti da M. Piazzolla Beloch (4) come diametri perpendicolari alla direzione coniugata.

Dalla teoria diametrale (5) è noto che una curva algebrica piana di ordine n ammette in generale n diametri principali. Nella presente Nota esamino i vari casi che si possono presentare allorquando i punti all'infinito non sono tutti distinti e in ognuno di questi casi preciso il numero dei diametri principali che la curva ammette (in numero $< n$, eccettuato il caso di certe curve circolari in cui il loro numero diventa infinito).

1. Sia data una curva algebrica piana C_n, a coefficienti reali, di equazione:

$$(1)\quad U_n(x,y)+U_{n-1}(x,y)\,t+U_{n-2}(x,y)\,t^2+\cdots+U_1(x,y)\,t^{n-1}+U_0\,t^n=0$$

dove $U_s(x,y)$, $(s=0,1,2,\cdots,n-1,n)$ è il complesso dei termini di grado s in x,y che figurano nell'equazione. Si supponga la C_n priva di punti multipli impropri, di contatti con la retta all'infinito e non passante per i punti ciclici.

È noto (6) che l'equazione del diametro coniugato ad una direzione m generica, è:

$$(2)\quad \left(\frac{\partial U_n}{\partial x}\right)_{1,m}x+\left(\frac{\partial U_n}{\partial y}\right)_{1,m}y+U_{n-1}(1,m)\,t=0.$$

(*) Nella seduta del 10 marzo 1951.

(1) G. HUMBERT, *Applications géométriques d'un théorème de Jacobi.* « Journ. de mathem. », IV, I, pp. 347-456 (1885).

(2) B. SEGRE, *Sui teoremi di Bézout, Jacobi e Reiss.* « Ann. di mat. », IV, 26, pp. 1-26 (1947),

(3) L. MURACCHINI, *Intorno ad un teorema di Humbert.* « Bollettino U. M. I. », serie III. anno IV, n. 2, pp. 130-134.

(4) M. PIAZZOLLA BELOCH, *Sulle proprietà metriche delle curve algebriche piane e in particolare sulla ricerca effettiva degli assi di simmetria.* « Rend. R. Acc. dei Lincei », serie VI, vol. XXI, fasc. 2, pp. 77-81 (1935) e *Teoria diametrale delle curve algebriche piane.* « Annali dell'Università di Ferrara », vol. VII. 1948, ed. S. A. I. G. Ferrara 1949.

(5) Ved. loc. cit. (4₂).

(6) Ved. per esempio SALMON, *Traité de géométrie analytique (courbes planes).* Paris, Gauthier Villars, 1903, chap. IV, n. 127, e per le notazioni adottate ved. loc. cit. (4₂) p. 9.

Se tale diametro è un diametro principale, ossia perpendicolare alla direzione coniugata, sarà soddisfatta la condizione:

$$m\left(\frac{\partial U_n}{\partial x}\right)_{1,m} - \left(\frac{\partial U_n}{\partial y}\right)_{1,m} = 0, \tag{3}$$

equazione di grado n in m che dà n soluzioni fra reali e distinte, reali e coincidenti ed immaginarie e coniugate.

Ad ogni radice semplice della (3) corrisponde uno ed uno solo diametro principale, ad ogni radice multipla della (3) e di molteplicità p, corrisponde un diametro principale contato p volte, quindi il numero dei diametri principali (ognuno contato con la molteplicità della corrispondente radice tratta dalla (3)), risulta eguale al numero dei punti all'infinito della curva (supposti tutti distinti).

2. La C_n non passi per i punti ciclici ed abbia i suoi punti all'infinito non tutti distinti. Sia allora $U_n(x, y)$ prodotto di h fattori lineari in x, y ognuno dei quali contato con opportuna molteplicità,

$$U_n(x, y) = \prod_{i=1}^{h} P_i^{r_i}(x, y)$$

ove:

$$P_i(x, y) = a_i x + b_i y,$$

con $r_1 + r_2 + \cdots + r_h = n$, ($r_1, r_2, \cdots, r_h$ tutti distinti oppure no); la (3) diventa allora, come si verifica,

$$[mS(1, m) - T(1, m)] \prod_{i=1}^{h} P_i^{r_i - 1}(1; m) = 0 \tag{4}$$

ove $S(1, m)$ e $T(1, m)$ sono polinomi di grado $h - 1$ in m che non si annullano per $m = -a_i/b_i$ $(i = 1, 2, \cdots, h)$.

La (4) può essere soddisfatta se:

$$mS(1, m) - T(1, m) = 0, \tag{5}$$

equazione di grado h in m che conduce ad h diametri principali [7] fra distinti e coincidenti. Le equazioni di tali diametri si ottengono evidentemente sostituendo le soluzioni della (5) nella (2).

Soddisfano inoltre la (4) i valori $m = -a_i/b_i$ $(i = 1, 2, \cdots, h)$.

Sia $m (= -a_s/b_s)$ zero r_s-plo uno di questi valori con $2 \leq r_s \leq h$ e sia inoltre:

$$U_{n-1}(x, y) = (a_s x + b_s y)^{r_s - 1} Q(x, y)$$

con $Q(x, y)$ polinomio di grado $n - r_s$ in x, y. L'equazione del diametro coniugato alla direzione in questione è allora, come si vede subito:

$$y = -\frac{a_s}{b_s} x - \frac{P_s^{r_s - 1}(1, m)\, Q(1, m)}{T(1, m) \prod_{i=1}^{h} P_i^{r_i - 1}(1, m)} t,$$

(7) Ved. loc. cit. (3), p. 134.

cioè un diametro autoconiugato [8], soluzione estranea a cui non corrisponde un diametro principale. Il numero dei diametri principali è dunque h.

Se invece $m = -a_s/b_s$ essendo zero r_s-plo di $U_n(1, m)$ è zero di ordine inferiore ad $r_s - 1$ di $U_{n-1}(1, m)$, è facile verificare che alla direzione $(1, -a_s/b_s, 0)$ è coniugata la retta all'infinito. Tali risultati valgono sia che i punti all'infinito siano multipli e di molteplicità qualsiasi, sia che la curva ammetta in tali punti contatti semplici o superiori con la retta impropria, in quanto la ricerca eseguita dipende soltanto da $U_n(x, y)$, dalle sue derivate prime e da $U_{n-1}(x, y)$.

La (4) fornisce allora anche qui solo h direzioni, fra distinte e coincidenti, a cui corrispondono diametri principali. Si può inoltre notare che per una curva piana che ammetta punto principale [9], improprio o indeterminato è in ognuno di questi casi $U_n(x, y) = (ax + by)^n$ [10], cioè la curva ha un solo punto improprio contato n volte e ammette un solo diametro principale ($h = 1$).

Nel caso della curva algebrica con punto principale indeterminato, l'unico suo diametro principale costituisce anche l'unico diametro che la curva ammette, coniugato a tutte le direzioni del piano e luogo del punto principale indeterminato [11].

3. La C_n passi ora per i punti ciclici ed in ognuno di essi cadano $h\,(< n/2)$ dei suoi punti d'incontro con la retta all'infinito, ed abbia l'equazione del tipo:

$$(7) \qquad (x^2 + y^2)^h P(x, y) + (x^2 + y^2)^{h-1} Q(x, y) + \cdots = 0$$

con $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ polinomi in x, y di grado $n - 2h$ e $n - 2h + 1$ rispettivamente. Dalla (3), nel caso della (7), si trae:

$$(8) \qquad \begin{cases} m = \pm i \\ m\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{1,m} - \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{1,m} = 0. \end{cases}$$

Per $m = \pm i$, dalla (2) risulta:

$$y = \pm ix \pm \frac{i\,Q(1, \pm i)}{2h\,P(1, \pm i)}\,t,$$

cioè due diametri autoconiugati isotropi e potendosi ogni retta isotropa considerare perpendicolare alla propria direzione, tali rette possono considerarsi diametri principali immaginari. Dalla seconda delle (8) restano fissate $n - 2h$ direzioni (fra distinte e coincidenti) a cui sono coniugati altrettanti diametri principali. Se

(8) Ved. loc. cit. (4_2), Parte I.

(9) Gli infiniti diametri di una curva algebrica piana in generale non passano per uno stesso punto; quando invece esiste un punto tale che per esso abbiano a passare tutti i diametri, tale punto dicesi *punto principale*. Il punto principale può essere proprio, improprio o indeterminato.

(10) Ved. loc. cit. (4_2), n. 5 e n. 6.

(11) Ved. B. A. ROSINA, *Sulle curve algebriche piane con punto principale indeterminato*. «Annali della Università di Ferrara», vol. VII, 1947-48.

poi il gruppo $x^2 + y^2$ è fattore di $U_{n-1}(x, y)$ con esponente minore di $h - 1$, allora ad ognuna delle direzioni $\pm i$ risulta coniugata la retta all'infinito.

4. Sia ora $h = n/2$ supposta la curva di ordine pari. Si possono presentare due casi; come al numero precedente:

a) Nel primo caso l'equazione della curva è della forma (ottenuta dalla (7) per $h = n/2$):

$$(9) \qquad (x^2 + y^2)^{n/2} + (x^2 + y^2)^{n/2-1}(ax + by) + \cdots = 0.$$

La (3) in virtù della (9) diventa una identità, perciò tale equazione è soddisfatta da qualunque valore di m, quindi ad ogni direzione del piano corrisponde un diametro principale, il che trova conferma dalla (2) che per le curve di equazione (9) diventa:

$$y = -\frac{1}{m}x - \frac{a + bm}{nm}t.$$

Tutti i diametri passano evidentemente per il punto $(-a/n, -b/n)$, *punto principale* per la curva (cfr. loc. cit. (4_2). Parte I, n. 9).

In particolare alle direzioni $\pm i$ dei punti impropri della curva, risultano coniugate le rette isotrope uscenti dal punto principale, diametri immaginari autoconiugati che si possono considerare principali per l'osservazione n. 4.

b) Nel secondo caso, analogamente a quanto è stato detto al numero precedente, l'equazione della curva sarà del tipo:

$$(10) \qquad (x^2 + y^2)^{n/2} + (x^2 + y^2)^r P(x, y) + \cdots = 0$$

con $0 \leq r < n/2 - 1$ e $P(x, y)$ polinomio di grado $n - 2r - 1$ in x, y. Anche in questo caso la (3), diventa una identità e quindi la C_n ammette infiniti diametri principali non passanti però per uno stesso punto, come è facile verificare con i calcoli. Alle direzioni $m = \pm i$, dei punti all'infinito della curva, risulta coniugata la retta impropria del piano.

6. Confrontando infine, nei vari casi così ottenuti, il numero dei diametri principali di una curva algebrica piana con quello dei suoi punti distinti all'infinito ne viene che:

Una curva algebrica piana di ordine n, ha tanti diametri principali (fra distinti e coincidenti [12]), *quanti sono i suoi punti distinti all'infinito*, esclusi i casi:

1° *in cui essa abbia tutti i suoi punti all'infinito assorbiti dai punti ciclici, caso in cui ammette infiniti diametri principali.*

2° *in cui essendo la curva circolare, il fattore* $x^2 + y^2$ *figuri in* $U_n(x, y)$ *con esponente* $r (\leq n/2)$ *ed in* $U_{n-1}(x, y)$ *con esponente minore di* $r - 1$; *in tale caso la* C_n *ammette tanti diametri principali quanti sono i suoi punti distinti all'infinito meno due.*

(12) Dando per le ovvie ragioni esposte il nome del diametro principale anche alle rette isotrope.

Scienza delle Costruzioni. — *Il carico di punta di una colonna a maglie rettangolari.* Nota di LIVIO NORZI, presentata (*) dal Corrisp. G. ALBENGA.

Con le notazioni della fig. 1 – e limitandoci al problema piano – siano: $y_1 = y_1(x)$ ed $y_2 = y_2(x)$ gli spostamenti trasversali degli assi dei montanti; $u_1 = u_1(x)$ ed $u_2 = u_2(x)$ gli spostamenti longitudinali degli stessi.

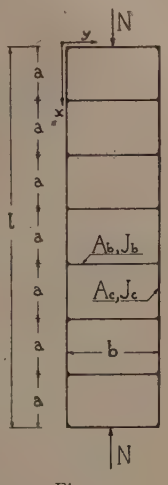


Fig. 1.

Indichiamo inoltre con ξ, η, φ le componenti ridotte al baricentro elastico di un collegamento dello spostamento relativo delle sue sezioni di incastro ai montanti. Si ha:

$$\xi = u_2 - u_1 - b\,(y_2' + y_1')/2$$
$$\eta = y_2 - y_1$$
$$\varphi = y_2' - y_1'$$

e, per formule ben note, il lavoro di deformazione del collegamento vale:

$$L = (6\,EJ_b/b^2)\,\xi^2 + (EA_b/2\,b)\,\eta^2 + (EJ_b/2\,b)\,\varphi^2 .$$

L'equilibrio elastico diviene instabile per il minimo valore N del carico di compressione assiale (che qui si assume col segno positivo) per cui può essere soddisfatta con deformazioni non identicamente nulle e compatibili coi vincoli la disuguaglianza:

$$(1) \qquad -\frac{N}{4}\int_0^l (y_1'^2 + y_2'^2)\,dx + \frac{1}{2}\,EA_c \int_0^l (u_1'^2 + u_2'^2)\,dx +$$
$$+ \frac{1}{2}\,EJ_c \int_0^l (y_1''^2 + y_2''^2)\,dx + \Sigma L \leqq 0 .$$

In quanto segue supporremo che siano impediti i movimenti rigidi d'insieme mediante le condizioni:

$$(2) \qquad y_1(0) = y_2(0) = y_1(l) = y_2(l) = 0$$

e che i collegamenti siano abbastanza numerosi da poter sostituire senza errore sensibile la ΣL con degli integrali.

Coll'introduzione delle variabili ausiliarie:

$$y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \qquad Y = \frac{1}{2}(y_1 - y_2)$$
$$u = \frac{1}{2}(u_1 - u_2) \qquad U = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$$

(*) Nella seduta del 10 marzo 1951.

si possono definire due tipi fondamentali di svergolamento:

α) simmetrico con $u = 0$, $y = 0$.

β) antisimmetrico con $U = 0$, $Y = 0$.

Essi, *purchè anche le condizioni di vincolo siano indipendenti*, sono separabili; infatti con le nuove variabili la (1) si trasforma nella:

$$(1') \quad -N\int_0^l (Y'^2 + y'^2)\,dx + 2\,EA_c\int_0^l (U'^2 + u'^2)\,dx + 2\,EJ_c\int_0^l (Y''^2 + y''^2)\,dx +$$

$$+ (12\,EJ_b/ab^3)\int_0^l 2u + by')^2\,dx + (4\,E/ab)\int_0^l (J_b\,Y'^2 + A_b\,Y^2)\,dx \leqq 0$$

ed il sistema di equazioni variazionali da essa deducibili come condizioni necessarie per l'instabilità si scinde ovviamente in due.

Le condizioni sufficienti [1] si ottengono sostituendo le soluzioni delle equazioni variazionali in (1') ed integrando successivamente per parti e dipendono solo dai valori agli estremi delle soluzioni stesse e delle loro derivate.

Caso α). – Le equazioni sono:

$$(3) \quad \begin{cases} EJ_c\,Y'''' - ((2\,EJ_b/ab) - N/2)\,Y'' + (2\,EA_b/ab)\,Y = 0 \\ U'' = 0 . \end{cases}$$

Il confronto delle (3), (1') dimostra che occorre porre $U = 0$ e, soddisfatte le (2), la condizione sufficiente è:

$$(4) \quad [Y'\,Y'']_0^l \leqq 0 .$$

Il problema è perfettamente analogo a quello di un palo infisso in un terreno elastico e la soluzione di interesse pratico corrente, cioè quella sinoidale pura per Y, dà il valore critico:

$$(5) \quad N_\alpha = \text{min.}\,\{2n^2\pi^2\,(EJ_c/l^2) + (4\,EJ_b/ab) + (4\,l^2\,EA_b/n^2\pi^2 ab)\} \qquad n = 1, 2, 3 \cdots$$

Caso β). – Le equazioni sono:

$$(6) \quad \begin{cases} EA_c\,u'' - (12\,EJ_b/ab^3)\,(2u + by') = 0 \\ 2\,EJ_c\,y'''' + Ny'' - (12\,EJ_b/ab^2)\,(2u' + by'') = 0 . \end{cases}$$

Gli esponenziali caratteristici k sono determinati dalla:

$$(7) \quad k^2\{2\,E^2 J_c\,A_c\,k^4 - [EA_c\,((12\,EJ_b/ab) - N) +$$

$$(48\,E^2\,J_b\,J_c/ab^3)]\,k^2 - (24\,EJ_b\,N/ab^3)\} = 0$$

e l'integrale generale dipende quindi da 6 costanti *a priori* arbitrarie; soddisfatte le (2), restano 4 costanti legate dalla condizione sufficiente:

$$(8) \quad [EA_c\,uu' + EJ_c\,y'\,y'']_0^l \leqq 0$$

(di secondo grado nelle costanti stesse).

(1) Cfr. L. Norzi, «Atti Acc. Sc. Torino», vol. 81-82, pp. 253-263 (1947).

La (8) dovrebbe essere soddisfatta per valori arbitrari di quelle costanti che, per l'incertezza sull'effettivo comportamento della struttura, non potessero nei casi concreti essere determinate altrimenti.

Qui discuteremo solo la soluzione delle semplici cerniere che – notiamo – lascia liberi gli spostamenti longitudinali agli estremi.

Ponendo così $k = i\pi/l$ nella (7), otteniamo la formula:

$$N_\beta = \frac{\pi^2 E}{l^2} \left\{ 2 J_c + \frac{\frac{1}{2} A_c b^2}{1 + (\pi^2 A_c ab^3/24 J_b l^2)} \right\}. \tag{9}$$

Essa nei casi limite $J_b = 0$ e $J_b \to \infty$ dà il carico di Eulero rispettivamente per i due montanti isolati oppure per la colonna di momento d'inerzia $I = 2 J_c + \frac{1}{2} A_c b^2$ pari a quello dei montanti stessi resi del tutto solidali dalla infinita rigidezza dei collegamenti [2].

Dal confronto della (5) e della (9) risulta che, a meno di avere sezioni A_b assai piccole (il che potrebbe verificarsi realizzando i collegamenti con tubi sottili o strutture anch'esse traforate) è in generale: $N_\beta < N_\alpha$ e così il caso β è quello di maggiore interesse.

Sostituendo nella (9) π con 2π si ha il carico critico nel caso del perfetto incastro – in cui si annullano anche gli spostamenti longitudinali agli estremi – e dal punto di vista applicativo occorre tener presente che quando, come spesso avviene, il denominatore delle frazioni tra parentesi è notevole, l'incremento di N_β rispetto al caso delle cerniere agli estremi è dovuto quasi solo al dimezzamento della lunghezza libera di flessione dei montanti mentre il termine dipendente dall'azione dei collegamenti varia percentualmente di poco.

Sostituendo invece – sempre nella (9) – J_b con $2 J_b$ si ha la soluzione del caso limite di un reticolato piano assai esteso parallelamente all'asse y che si svergoli con deformate $y_1, y_2, \cdots, y_n$ tutte sensibilmente eguali.

Infine si può osservare che la (9) si presta a discutere una notevole questione strutturale riferentesi ai grandi ponti in cemento armato ad arconi gemelli e fra loro collegati: e cioè se per assicurarne la stabilità elastica trasversale non sia preferibile giocare solo sull'inerzia « in derivazione » dei collegamenti anzichè ricorrere a forme cave di sezione per i singoli arconi.

Benchè la complessità dei fattori pratici che intervengono nei vari casi non permetta di dare regole generali in questo campo, pare opportuno segnalare come, secondo la (9), N_β decresca con la luce l – a parità degli altri dati – *meno rapidamente di* $1/l^2$.

(2) Ciò non si verifica invece per la formula d'uso (cfr. TIMOSHENKO, *Theory of Elastic Stability*, Mc. Graw & Hill 1936, Chap. II, Sect. 27):

$$N = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 EI}{l^2} \left(\frac{ab}{12 EJ_b} + \frac{a^2}{24 EJ_c} \right)}$$

che tuttavia per i pali in ferro cui normalmente si applica e per i quali $J_b \ll J_c \ll 1/2 A_c b^2$ dà risultati prossimi a quelli della (9).

Questa osservazione critica giustifica la presente Nota e vale anche per la formula di Engesser per le colonne a tralicci triangolari (riportata al medesimo paragrafo 27 del succitato trattato).

Astronomia (Astrofisica). — *Diagramma colore-grandezza e distanza dell'ammasso globulare M 56. – II. Distribuzione dei colori e delle grandezze ed eccesso di colore.* Nota di LEONIDA ROSINO, presentata (*) dal Socio G. SILVA.

4. Se tutte le stelle elencate nella precedente tabella III fossero realmente appartenenti all'ammasso globulare M 56, rappresentando le grandezze apparenti nelle ordinate e gli indici di colore nelle ascisse si dovrebbe ottenere un diagramma equivalente a quello di Hertzsprung–Russell, ma caratteristico della popolazione statistica dell'ammasso. Sfortunatamente altre stelle, più vicine o più lontane, si proiettano nella medesima regione ed è prevedibile che esse portino ad una certa dispersione nella disposizione dei punti del diagramma. Come si è detto nella prima Nota su quest'ammasso (4) tracce microfotometriche e nòveri di stelle indicano che la presenza di stelle dell'ammasso è sensibile fino a 7′–7′.5 dal centro, e del resto lo confermano le variabili, alcune delle quali, come la 10ª e la 11ª sono appunto a 7′-8′ dal centro. Tuttavia a questa distanza se pur si trovano ancora stelle dell'ammasso, è predominante l'insieme degli astri interposti o più lontani. Perciò si è limitato l'esame alla zona più densa, fino a soli 4′.3 dal centro, dove è presumibile che le componenti del sistema sieno in numero preponderante. Anzi si sono distinte, nelle figg. 1 e 2 della tavola fuori testo, tre regioni, dall'anello esterno fino al cerchio centrale, in cui il rapporto tra componenti dell'ammasso e membri spuri cresce rapidamente. Teoricamente la dispersione nel diagramma colore–grandezza, dovrebbe diminuire, come si va dall'anello più esterno al centro, ma occorre tener conto della minor precisione delle grandezze nella zona centrale, che tende a controbilanciare quest'effetto.

Grandezze e colori delle trecentodieci stelle della Tabella III sono graficamente rappresentate nella fig. 3. Nelle ordinate: grandezze apparenti rosse m_r. Nelle ascisse: indici di colore rossi c_r. Le stelle dell'anello più esterno sono contrassegnate da crocette; quelle della zona intermedia da punti pieni e gli astri del nucleo centrale da cerchietti. Le variabili che si trovano nella regione studiata sono segnate col simbolo V nelle posizioni che corrispondono alla grandezza ed al colore medi. La fig. 4 riproduce il medesimo diagramma, ma con le grandezze fotografiche in luogo di quelle rosse. In entrambi i diagrammi nelle figg. 3 e 4, a destra ed in alto abbiamo riportato le grandezze assolute e gli indici di colore rossi c_r' corretti dall'assorbimento interstellare, quali risultano dalle considerazioni del paragrafo 5 seguente. Il lettore avverta però che queste due scale dovrebbero essere riferite solamente alle componenti dell'ammasso e non alle stelle, più in là o più in qua del sistema, che pur compaiono nel diagramma. Alcune di queste stelle di interposizione si individuano facilmente nelle figg. 3 e 4. Segnaliamo,

(*) Nella seduta del 13 gennaio 1951.

(4) L. ROSINO, *Sull'ammasso globulare M 56*, « Pubbl. Oss. Bologna », IV, 7 (1944).

per esempio, nella fig. 3 quel gruppo di stelle sparse in alto a sinistra che, se effettivamente appartenessero all'ammasso, avrebbero luminosità e colori del tutto insoliti per sistemi di tale tipo. Lo stesso dicasi per qualche altro punto a destra del diagramma.

Comunque, fatte queste eccezioni, la fig. 3 mostra che il grosso delle stelle si concentra lungo una sequenza di giganti che, in corrispondenza alla grandezza $m_r = 14^m.5$ ($M_r = -1^m.0$) ed all'indice di colore rosso $c_r = +1.8$ ($c'_r = +1^m.0$)

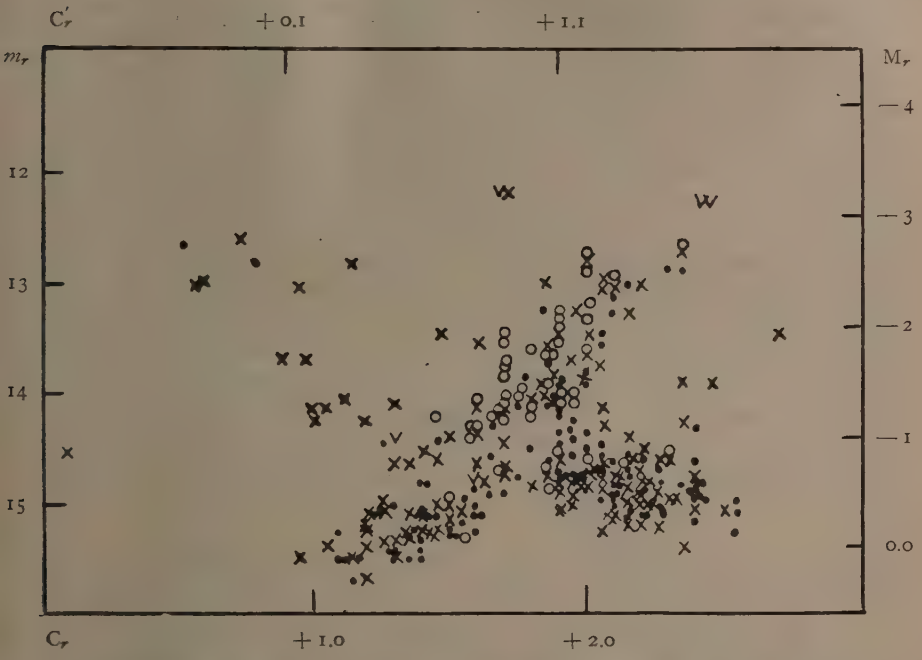


Fig. 3. – Diagramma colore-grandezza fotorossa. Le crocette indicano stelle dell'anello esterno, i punti pieni quelle dell'anello intermedio, i cerchietti rappresentano stelle della zona centrale. Le variabili sono segnate con il simbolo V. A sinistra ed in basso grandezze rosse ed indici di colore rossi. A destra ed in alto grandezze assolute rosse ed indici di colore corretti dall'assorbimento.

si spezza in due rami divergenti lungo i quali decresce la luminosità. Uno si spinge a sinistra verso $15^m.4$ e $+1^m.2$; l'altro va a destra verso indici di colore $+2^m.2$ ed oltre. Il diagramma conserva in sostanza lo stesso aspetto nella fig. 4, solo, per effetto del colore, il ramo di destra scende più rapidamente, mentre l'altro si spinge a sinistra con grandezza quasi costante (grandezza assoluta fotografica da $0^m.0$ a $+0^m.30$ circa, indice di colore corretto da $+1^m.0$ a $+0^m.2$). Le cefeidi sono appunto nel ramo di sinistra. Invece le due semiregolari N. 3 e 5 e la variabile N. 6 di tipo RV Tauri compaiono, con grandezza media assoluta attorno ai -3^m, all'estremità superiore della sequenza di giganti e sono le componenti intrinsecamente più splendenti del sistema. È evidente che il diagramma

rappresentato nelle figg. 3 e 4 differisce radicalmente da quello tipico di Hertzsprung–Russell, anche se si tien conto che le osservazioni sono limitate a stelle più brillanti della grandezza rossa $15^m.25$ ($M_r = -0^m.25$) ed a pochi membri più deboli. Ciò del resto, dopo quanto si sa sui due tipi di popolazioni stellari, era prevedibile. Il lato più interessante consiste invece nel fatto che il diagramma colore–grandezza dell'M 56 è assai diverso anche dalla media dei diagrammi consimili di altri ammassi globulari (5). Tra quelli conosciuti, solo l'ammasso globulare di tipo aperto NGC 5053 presenta un diagramma che ricorda da vicino quello riprodotto nella fig. 3. Anche in quel caso siamo alla presenza di due rami che divergono, uno verso il violetto ed uno verso il rosso. Di solito invece, quando la sequenza di giganti si scinde in due ramificazioni, entrambe si volgono, con diversa inclinazione, verso il violetto. Vero è che non sappiamo cosa avvenga più avanti, quando si passa ad astri meno luminosi, perchè di regola le osservazioni mancano proprio là dove sarebbero più interessanti, cioè all'inizio della sequenza principale (6). Nel caso attuale è poi da chiedersi quale ruolo giochi l'insieme delle stelle non associate all'ammasso, e se ad esse non sia dovuta la forma peculiare del diagramma colore–grandezza. Tuttavia, poichè non si nota una sensibile differenza nella distribuzione dei colori e delle grandezze tra le stelle più interne a quelle dell'anello esterno, vien fatto di supporre che molte delle eventuali componenti spurie, specialmente le più deboli, anche se non appartengono fisicamente all'ammasso, possano esserne in relativa vicinanza ed averne, dal punto di vista statistico, le medesime caratteristiche. Ultima peculiarità del diagramma in fig. 3, ed è la scarsità di stelle i cui punti rappresentativi cadano là dove dal ramo gigante si staccano i due rami divergenti. Vi è una lacuna nettissima in questa posizione, e la stessa tendenza mostrano M 4 ed NGC 5053.

5. Le scale in basso ed a sinistra nei diagrammi riprodotti nelle figg. 3 e 4 indicano che tutte le stelle dell'ammasso hanno indice di colore rosso superiore a $+1$ e fino a $+2{,}4$ ed oltre. Non v'ha dubbio che ciò è dovuto ad assorbimento selettivo da parte di materia interstellare che giace tra l'ammasso e chi

(5) Le ricerche sul diagramma colore–grandezza di ammassi globulari sono poco numerose, perchè presentano delle difficoltà notevoli e richiedono l'uso di grandi telescopi. Di solito le osservazioni si arrestano attorno alla grandezza assoluta zero, e di rado si va fino a $+1$ o $+2$. Vedi in proposito:

H. Shapley e H. N. Davis, *Photometric catalogue*, etc. «Ap. J.», *51*, 140 (1920); M. Schwarzschild, *On the variables in M 3*. H. C. 437 (1940); H. Shapley, *Thirteen hundred stars in the Hercules cluster M 13*. Mt. Wilson Co. 116 (1915); J. L. Greenstein, *Magnitudes and colors in the globular cluster M 4*. «Ap. J.», *90*, 387 (1939); O. Hachenberg, *Der Aufbau des Kugelförmigen Sternhaufens M 92*. «Zs. f. Ap.», XVIII, 49 (1939); J. J. Nassau e J. A. Hynek, *Magnitudes and colors in the globular cluster M 12*. Perkins Co. 17 (1942); J. Cuffey, *NGC 5053 and NGC 6838*-Kirkwood Observatory No. 6 (1943); ricerche di Shapley del 1920 dànno il colore delle stelle giganti nei due ammassi M 68 ed M 22. Sappiamo infine che è alla stampa una ricerca di A. Brown sul diagramma colore–grandezza dell'ammasso M 15.

(6) Ci teniamo a mettere in rilievo qui la grandissima importanza che avrebbero osservazioni condotte con i massimi istrumenti sugli ammassi più vicini di modulo 14-15, in modo da poter determinare grandezze e colore di stelle fino alle grandezze assolute $+4$ o $+5$.

osserva: e non v'è ragione di stupirsene se si pensa che l'ammasso ha bassa latitudine galattica e che non è visibile alcuna nebulosa extragalattica nella regione che lo circonda [7] anche nelle lastre di più lunga esposizione.

Di questo *eccesso di colore rosso* già si disse nella Nota III, osservando che i colori delle variabili 1, 3 e 6, i cui tipi spettrali sono noti dalle osservazioni di A. H. Joy [8], risultavano in media in eccesso di + 0^m.8 su quelli corrispondenti

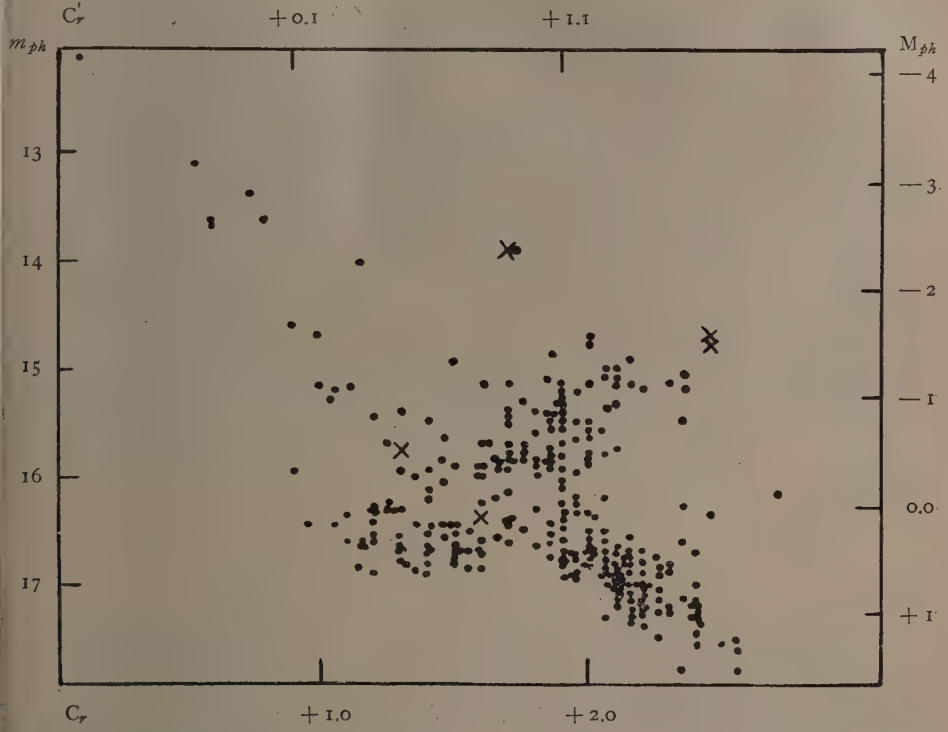


Fig. 4. – Diagramma colore–grandezza fotografica. Le crocette indicano le variabili. A sinistra ed in basso grandezze fotografiche ed indici di colore rossi; a destra ed in alto grandezze assolute fotografiche ed indici di colore corretti.

a quei tipi spettrali. La presente ricerca conferma tale risultato e nello stesso tempo permette di dedurre dal diagramma colore–grandezza dell'M 56 un nuovo valore. Si osservi infatti che il punto medio ove la sequenza di giganti si scinde nei due rami divergenti è all'incirca quello di coordinate: $c_r = +1^m.8$, $m_r = 14^m.5$. In tutti gli altri ammassi globulari di cui si sia studiato il diagramma e che risultino affetti o siano corretti dall'arrossamento tale scissione avviene all'incirca in

(7) N. U. MAYALL, *The radial velocity of fifty globular star clusters*, « Ap. J. », *104*, 290 (1946).

(8) A. H. JOY, *The spectra of the brighter variables in Globular Clusters*, « Ap. J. », *110*, 2. (1949).

corrispondenza ad un indice rosso $+ 0^m.9$. Vi sarebbe quindi, nel caso attuale un eccesso di colore rosso attorno a $+ 0^m.9$. Tenendo conto del valore derivato per le variabili concludiamo che: $+ 0^m.8$ *rappresenta l'eccesso di colore rosso dell'ammasso M 56* (9).

Per passare alla distanza del sistema è necessario applicare una correzione al suo modulo, calcolato dalle variabili senza tener conto dell'assorbimento. E poichè nella Nota III abbiamo concluso che $m - M = 16^m.3$, la distanza d in parsec risulta:

$$(1) \qquad \log d = 1/5\,(m - M + 5 - \Delta m) = 1/5\,(21.3 - \Delta m).$$

Il tutto in grandezze fotografiche ($\lambda_0 = 4300$ A); Δm indica appunto la correzione da apportare per effetto dell'assorbimento alle grandezze fotografiche. Avverto subito che il calcolo della Δm dall'eccesso di colore E (λ) rappresenta il passaggio più incerto di questa ricerca. È noto infatti che il rapporto m (λ): E (λ) tra l'assorbimento in corrispondenza ad una lunghezza d'onda λ_0 e l'eccesso di colore corrispondente alle lunghezze d'onda λ_0 e λ_1 è stato oggetto di accurate ricerche da parte di molti Autori negli scorsi decenni (10). I risultati però non sempre concordano ed i valori osservati sono spesso assai diversi. Io mi sono qui attenuto ad una accuratissima ricerca di A. E. Whitford (11) ed ho ricavato il valore del rapporto m : E (λ) dalla sua curva di assorbimento interstellare, per $\lambda_0 = 4300$; $\lambda_1 = 6500$. Mi risulta Δm : E (λ) $= 2^m,20$ ed essendo E (λ) $= + 0^m.8$ segue $\Delta m = 1^m,76$ correzione da introdurre nella (1) per ricavare la distanza d in parsec dell'ammasso.

Segue immediatamente dalla (1):

$$d = 8100\ pc.$$

La distanza calcolata senza tener conto dell'assorbimento sarebbe stata un po' più di due volte tanto. Data l'incertezza della correzione per l'assorbimento non si dia però alla cifra di sopra un valore assoluto e *la si consideri piuttosto come un ordine di grandezza*. La grande diversità, tra il valore non corretto e quello attuale della distanza, indica appunto quanto incerte sieno le distanze di oggetti lontani quando si opera in prossimità del piano galattico.

(9) L'eccesso di colore, secondo Stebbins e Whitford, sarebbe, ridotto al nostro sistema, solo $+ 0^m,25$ («Ap. J.», *84*, 132 (1936)). La classe di colore che i precedenti Autori assegnano all'M 56 porta però ad una forte deviazione nella relazione generale che intercede tra colore e tipo spettrale dell'ammasso integrato (N. U. Mayall, op. cit., p. 309).

(10) Vedi la lucida esposizione del problema data da W. Becker, *Sterne und Sternesysteme*. Steinkopff (1950) p. 204 e sgg.

(11) A. E. Whitford, *An extension of the Interstellar Absorption-curve*. «Ap. J.», *107*, 102 (1948).

Physica. — *Correction zonale de l'aberration sphérique dans les lentilles magnétiques* [1]. Note de GÉRARD NADEAU, présentée [2] par le Corresp. E. PERSICO.

1. Comme E. Persico l'a montré dans une Note parue précédemment [3], le dipôle magnétique peut être considéré comme une lentille électronique divergente qui pourrait, en combinaison avec une lentille convergente, construire un système corrigé (totalement) de l'aberration sphérique. Il a paru intéressant d'examiner s'il y aurait quelque avantage à utiliser une telle méthode de correction. Dans ce travail préliminaire, on a considéré le cas plus simple d'un système à symétrie axiale composé d'une lentille convergente (en l'occurrence, un simple courant circulaire) placée entre deux dipôles. L'aberration sphérique d'un tel système a été étudiée en intégrant numériquement les équations du mouvement des électrons émis par un objet ponctuel situé sur l'axe du système.

2. Dans un champ purement magnétique à symétrie axiale, le mouvement d'un électron issu d'un point de l'axe est déterminé par les équations suivantes [4], dans un système de coordonnées cylindriques $z, r,$ et θ:

$$(1) \qquad \frac{d^2r}{dz^2} = \frac{1-(dr/dz)^2}{KA^2-1} \cdot KA\left(\frac{\partial A}{\partial r} - \frac{dr}{dz}\cdot\frac{\partial A}{\partial z}\right)$$

$$(2) \qquad \frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{r}\left[\frac{1-(dr/dz)^2}{1+(KA^2)-1}\right]^{1/2}.$$

A est le potentiel vecteur (qui n'a que la composante azimutale), et $K = \frac{e}{2mc^2\varphi} = \frac{2{,}8680^{-2}}{\varphi}$, si φ est l'énergie de l'électron exprimée en volts.

Seule l'équation (1) nous intéresse; c'est elle qui détermine la trace de la trajectoire dans le plan méridien où suit l'électron dans sa rotation autour de l'axe. Pour faciliter les calculs, posons

$$\frac{dr}{dz} = \operatorname{tg}\lambda.$$

L'équation (1) est alors remplacée par le système

$$(3) \qquad \frac{d\lambda}{dz} = \lambda' = g_1 - g_2 \operatorname{tg}\lambda$$

$$(4) \qquad \frac{dr}{dz} = r' = \operatorname{tg}\lambda$$

[1] Travail exécuté au Département de Physique, Université Laval, Québec.

[2] Séance du 10 décembre 1951.

[3] E. Persico, *Rend. Lincei* (8), 7, 181 (1949).

[4] Voir, par exemple, Dyson, *Proc. Roy. Soc.* (A), 181, 464 (1943).

où

$$g_1 = \frac{KA}{KA^2 - 1} \cdot \frac{\partial A}{\partial r} \tag{5}$$

$$g_2 = \frac{-KA}{KA^2 - 1} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} \cdot \tag{6}$$

En général g_1 et g_2 sont des fonctions de r et z telles que l'intégration est impossible par des méthodes analytiques rigoureuses. On a, conséquemment, utilisé le procédé numérique suivant:

1° On calcule g_1 et g_2 pour des valeurs de r et de z couvrant le domaine d'intégration.

2° On trace les coubes $g_1(r, z_k)$ et $g_2(r, z_k)$ pour chaque valeur z_k de z correspondant aux limites des intervalles d'integration. Dans la suite les valeurs de g_1 et g_2 sont lues directement sur ces graphiques.

3° On calcule λ'_k et r'_k au moyen des formules (3) et (4), et on intègre d'après des formules de ce genre:

$$(\Delta\lambda)_k^{k+1} = h(2.27\,\lambda'_k - 2.46\,\lambda'_{k-1} + 1.54\,\lambda'_{k-2} - 0.37\,\lambda'_{k-3}) \tag{7}$$

$$(\Delta r)_k^{k+1} = h(0.375\,r'_{k+1} + 0.792\,r'_k - 0.208\,r'_{k-1} + 0.042\,r'_{k-2}) \tag{8}$$

qu'on obtient en négligeant les différences quatrièmes; h est l'intervalle d'intégration, et k l'indice qui numérote les intervalles. La différence entre ces deux formules est due au fait que λ' n'est connu qu'au début de l'intervalle, tandis que r' est connu aussi à la fin de l'intervalle.

3. Le potentiel vecteur d'un dipôle magnétique de moment μ est

$$A = \frac{\mu r}{(r^2+z^2)^{3/2}} \cdot \tag{9}$$

Il vient donc, pour les fonctions g_1 et g_2 d'un dipôle:

$$g_1 = \frac{r(z^2 - 2r^2)}{(z^2+z^2)[r^2 - (r^2+z^2)^3/K\mu^2]} \tag{10}$$

$$g_2 = \frac{3r^2 z}{(r^2+z^2)[r^2 - (r^2+z^2)^3/K\mu^2]} \cdot \tag{11}$$

Pour les calculs numériques, on pose $K\mu^2 = 1$, ce qui revient à prendre comme unité de longueur R, le rayon équatorial de la région interdite aux electrons. R dépend de l'énergie des électrons et du moment magnetique du dipôle.

Le potentiel vecteur du champ produit par un courant de I amp. circulant dans une spire circulaire de rayon a peut s'obtenir par le développement en série:

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+1)!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2n+1} \frac{d^{2n}}{dz^{2n}} H(z), \tag{12}$$

où

$$H(z) = H_0[1+(z/a)^2]^{-3/2} = \frac{2\pi I}{10a}[1+(z/a)^2]^{-3/2}. \tag{13}$$

En posant

$$\frac{H(z)}{H_o} = [1+(z/a)^2]^{-3/2} = Y_o \tag{14}$$

et

$$Y_n = \frac{d^n Y_o}{dz^n} \tag{15}$$

on obtient les formules

$$g_1 = \frac{LM}{L^2 - 1/(KH_o^2)} \tag{16}$$

$$g_2 = \frac{-LN}{L^2 - 1/(KH_o^2)} \tag{17}$$

où

$$L = \frac{A}{H_o} = \frac{r}{2} Y_o - \frac{r^3}{16} Y_2 + \frac{r^5}{384} Y_4 - \cdots \tag{18}$$

$$M = \frac{1}{H_o} \frac{\partial A}{\partial r} = \frac{1}{2} Y_o - \frac{3r^2}{16} Y_2 + \frac{5r^4}{384} Y_4 - \cdots \tag{19}$$

$$N = \frac{1}{H_o} \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{r}{2} Y_1 - \frac{r^3}{16} Y_3 + \frac{r^5}{384} Y_5 - \cdots . \tag{20}$$

L'unité de longueur étant le rayon a de la spire, la valeur de la constante KH_o^2 est choisie de façon à donner une longueur focale convenable à la lentille.

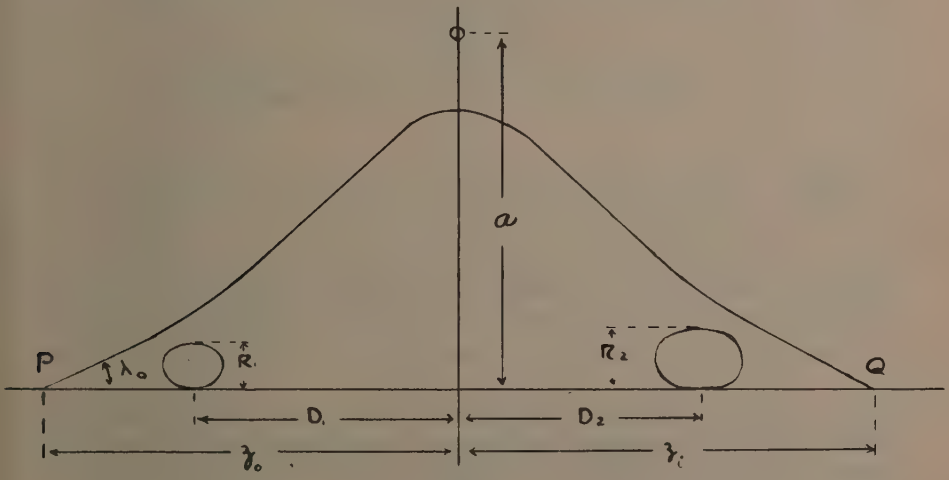


Fig. 1.

4. Dans le système formé par une spire placée entre deux dipôles (fig. 1), si a est l'unité de longueur, les paramètres variables seront : R_1 et R_2, les rayons équatoriaux des régions interdites des dipôles ; D_1 et D_2, les distances des dipôles au plan de la spire ; et z_o, la position de l'objet P. Il s'agit d'ajuster ces paramètres de sorte que z_i, la position de l'image Q, reste stationnaire quand l'inclinaison initiale λ_o des rayons varie. On aura alors un système corrigé de

l'aberration sphérique pour une certaine zône $\Delta\lambda_0$. En pratique, il y aura dans cette région corrigée une aberration résiduelle Δz_i; si l'on définit F, la distance focale équivalente du système, par la relation

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{z_0} + \frac{1}{z_i} \tag{21}$$

on pourra apprécier la performance d'un système par l'angle solide utilisable

$$\Omega = 2\pi(\cos\lambda_2 - \cos\lambda_1)$$

correspondant à une certaine tolérance $\Delta z_i/F$, λ_2 et λ_1 étant les valeurs limites de λ_0.

Le nombre des paramètres variables étant passablement élevé, on a simplifié les calculs en procédant comme suit:

1°: on a supposé que les champs des diverses composantes du système peuvent être considérés séparément.

2°: soient r_0 et λ l'ordonnée à l'origine et l'inclinaison de la direction d'une trajectoire avant sa déviation par le champ, la direction après passage dans le

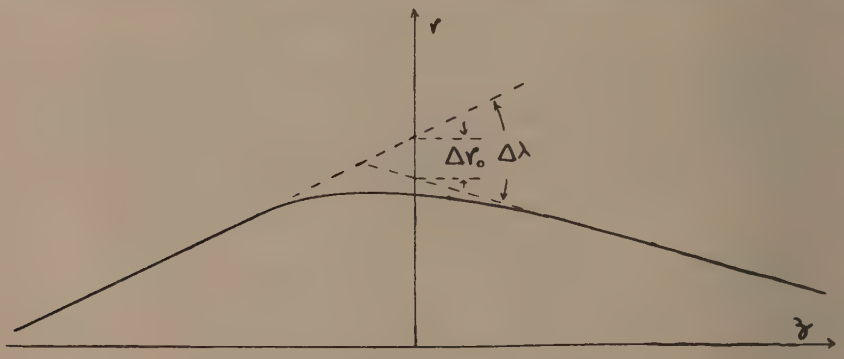


Fig. 2.

champ sera déterminée si l'on connaît Δr_0 et $\Delta\lambda$ (fig. 2). En intégrant quelques trajectoires particulières, on costruit un tableau de Δr_0 et $\Delta\lambda$, en fonction de r_0 et λ, d'où l'on tire, par interpolation, les valeurs relatives à une trajectoire quelconque.

5. Le procédé décrit plus haut permet d'obtenir avec une assez bonne précision la courbe d'aberration sphérique du système, c'est-à-dire la courbe de la position de l'image en fonction de l'inclinaison initiale de la trajectoire. La forme de cette courbe dépend des divers paramètres qui déterminent les dimensions et positions relatives des composantes du système. Quelques courbes caractéristiques sont données sur la fig. 3; les valeurs des paramètres relatives à ces courbes sont données dans le tableau suivant:

	z_0	R_1	D_1	R_2	D_2	KH_0^2	z_i	F	Ω
A—	1.45	0.10	0.95	0.08	1.06	3.48	1.48	0.73	0 12
B—	1.40	0.05	1.15	0.10	0.93	3.48	1.41	0.71	0.16
C—	1.37	0.03	1.22	0.16	0.77	3.48	1.59	0.74	0.19.

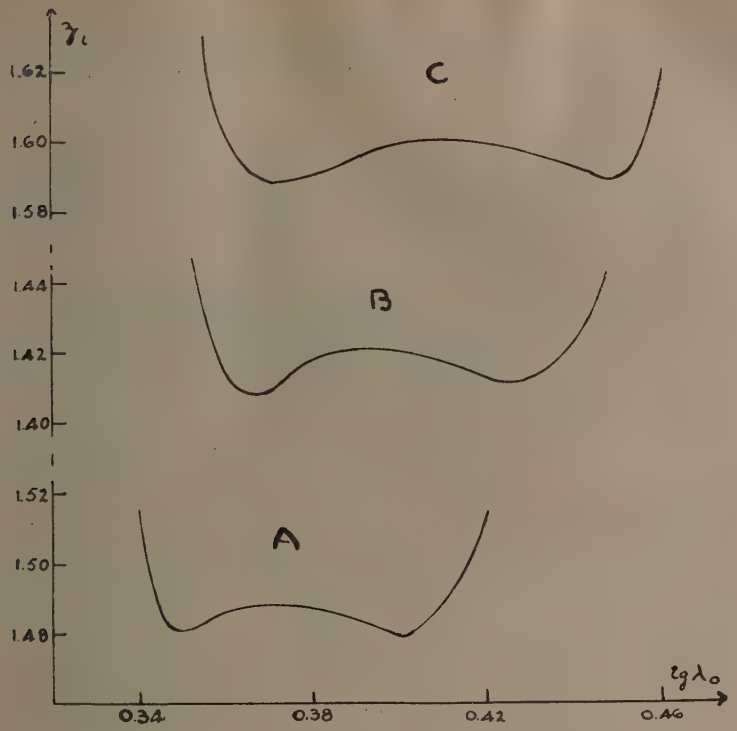


Fig. 3.

En général, la courbe d'aberration présente un maximum et deux minimums. En agissant sur les divers paramètres, on peut réduire la distance Δz_i entre les positions de ces maximum et minimums, au prix évidemment d'une diminution de la largeur $\Delta\lambda$ de la zône utilisable. La dernière colonne du Tableau indique la grandeur de l'angle solide utilisable correspondant à une même tolérance

$$\frac{\Delta z_i}{F} = 0.013.$$

Pour apprécier, au moins grossièrement, ces résultats, on a calculé la courbe d'aberration de la spire seule. Pour la même tolérance, on a obtenu une valeur de Ω de l'ordre de 0.004. L'amélioration de luminosité obtenue en associant deux dipôles à la spire est donc de l'ordre d'un facteur 40.

Tous ces calculs sont assez peu précis, et ils sont d'ailleurs relatifs à des champs magnétiques inutilisables dans la pratique. Toutefois, les résultats obtenus semblent indiquer qu'on aurait quelque intérêt à considérer cette possibilité de correction de l'aberration sphérique des lentilles convergentes par des champs divergents analogues à celui du dipôle, par exemple le champ qui existe à l'extérieur d'une bobine.

Chimica. — *Azione tossica delle cumarine su embrioni di Anfibi* (*). Nota di Enrico Del Pianto e Eugenia Pantano, presentata (**) dal Socio G. Bargellini.

I composti a struttura cumarinica possiedono proprietà tossicologiche di un certo interesse che si esplicano su organismi diversi del mondo animale e vegetale. L'interesse è in parte dipendente dal fatto che queste sostanze sono molto diffuse in natura.

Dopo che Boullay e Boutron–Charland [1] isolarono per la prima volta, più di un secolo or sono, la cumarina dal *Dipterix odorata*, molti composti appartenenti al gruppo della cumarina sono stati estratti da altre piante specialmente erbacee (Orchidacee, Graminacee, Leguminose, ecc.) e da alcuni frutti. Essi si trovano spesso in natura sotto forma di glucosidi.

Sebbene gli studi tossicologici su cumarine naturali e sintetiche siano molto numerosi, essi non hanno ancora portato luce sul meccanismo di azione di queste attività tossiche.

Accenneremo qui brevemente soltanto ad alcuni dei principali lavori, tra i più recenti, dato che molto vasta è la letteratura sull'argomento.

Molto studiate sono senza dubbio le influenze di queste sostanze sui vegetali, nei riguardi dell'arresto della germinazione dei semi e dello sviluppo delle radici.

Recentemente Lavollay e Laborey [2] hanno trovato che una concentrazione di cumarina di 10^{-5} e 10^{-6} è sufficiente a inibire la germinazione dell'orzo. Andus e Quastel [3] hanno osservato che la cumarina esercita sulle radici un'attività simile a quella dell'acido 2–4–dicloro–fenossi–acetico ma a concentrazioni relativamente elevate.

Riguardo all'attività antibatterica, è stato messo in evidenza da uno di noi che su 20 composti della serie cumarinica, presi in esame nella loro azione nei confronti dello *Staphilococcus aureus*, i più attivi erano la 1–2–ditiocumarina, la 2–tiocumarina e alcune cumarine 3–fenil sostituite [7].

Si era così potuto osservare un certo parallelismo tra l'azione antibatterica e quella ittiocida secondo le esperienze di Murti e Seshadri [8].

Nei confronti degli insetti le cumarine esplicano una duplice azione: repellente e tossica. La prima, ben studiata sulle pulci [9], è posseduta da derivati alogenati dell'anello piranico [10]. La seconda, quella insetticida, è posseduta in debole grado dalla cumarina, ma in forte grado dai derivati fenilici di questa [8] e dai derivati alogenati oltre che da analoghi quali la 1–tiocumarina [11].

Dato che le proprietà insetticide si esplicano anche sulle larve delle zanzare [12], è stata considerata la possibilità di utilizzare le cumarine nella lotta antimalarica. Infatti le zone ricche di piante contenenti cumarine sono immuni da malaria [13].

(*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Organica dell'Istituto Chimico dell'Università di Roma, Centro di Chimica Generale del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 10 febbraio 1951.

I primi studi sull'attività ittiocida delle cumarine risalgono al 1911. Priess [15], Thoms [16, 17, 18], Sieburg [19] e Späth [20], hanno osservato sui pesci una iniziale eccitazione cui seguono disturbi dell'equilibrio e, col prolungarsi dell'azione, la morte.

Alcune cumarine, quali la cumarina semplice, la 3–cloro–cumarina, l'angelicina ecc., esplicano questa attività tossico–narcotica in pochi secondi alla concentrazione 10^{-3} molare.

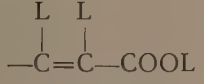
Esiste per questi composti una concentrazione critica al disotto della quale la tossicità decresce rapidamente [8].

Le proprietà tossiche sui mammiferi, infine, consistono principalmente in un'attività narcotica e depressiva sulle funzioni circolatoria e respiratoria, attività che sono state confermate recentemente sul topo [21]. Sono state anche descritte degenerazione necrotica del fegato, nefrite tubulare, glicosuria e ipotermia [22]; e nei ratti, un'attività estrogena nelle femmine e un'atrofia dei testicoli e delle vescichette seminali nei maschi giovani, non accompagnate da arresto della secrezione dell'ormone gonadotropo ipofisario [23].

Riguardo al meccanismo d'azione di questi composti sono state espresse varie ipotesi. Un'azione tossica generica è stata messa in relazione con la presenza di un anello lattonico insaturo quale è anche presente in molte sostanze naturali aventi effetti inibitori sullo sviluppo cellulare [14, 24, 25]. A tale ipotesi sono ricorsi gli Autori per spiegare l'attività antibatterica [26] e quella fitocida [3].

Sui vegetali queste sostanze agirebbero formando combinazioni labili con enzimi o metaboliti cellulari [3]. Sono state trovate finora come antagoniste all'azione fitotossica, la tiourea [5] e alcune eteroauxine [6].

L'attività insetticida è stata messa anche in relazione con l'aggruppamento chimico



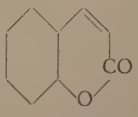
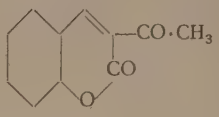
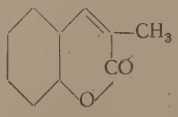
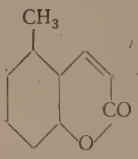
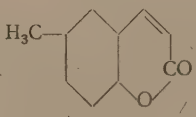
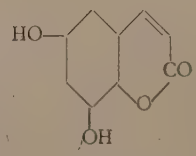
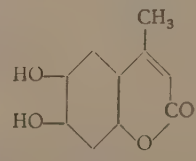
in cui L rappresenta un gruppo liposolubile [14].

Un'interpretazione recente infine assegnerebbe a questi prodotti un'attività cariotossica, essendo stato osservato un blocco mitotico completo delle cellule radicali alla metafase, blocco che persiste per molte ore.

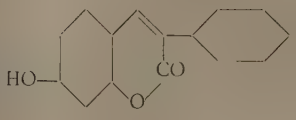
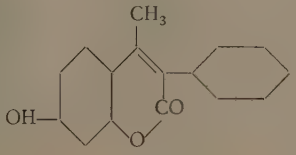
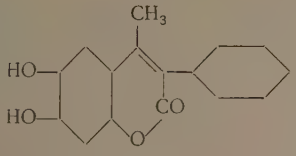
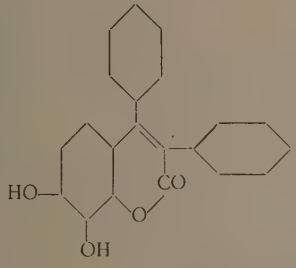
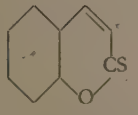
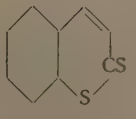
Da questi brevi cenni bibliografici appare che gli studi tossicologici di composti cumarinici hanno interessato numerosi Autori e che molte ipotesi circa il meccanismo d'azione attendono ancora conferma sperimentale. Nessun lavoro abbiamo trovato fino ad oggi in letteratura riguardante l'azione tossica di cumarine sullo sviluppo embrionale di anfibi. Uno studio in questo senso avrebbe potuto dare utili indicazioni attraverso le eventuali anomalie che si sarebbero potute presentare nel corso dell'ontogenesi. Infatti una sensibilità elettiva da parte di alcuni territori embrionali avrebbe potuto chiarire il meccanismo d'azione dei prodotti stessi.

Sono stati presi in esame, oltre alla cumarina, 13 suoi derivati variamente sostituiti e due analoghi solforati. È stato scelto, come materiale di esperimento la *Rana esculenta*.

TABELLA.

Prodotto	Fórmula di struttura	Concentrazione	Effetto sullo sviluppo
Cumarina		1/2.500	arresto allo stadio di abbozzo codale
3–acetil–cumarina		1/40.000	arresto immediato
3–metil–cumarina		1/7.000	arresto allo stadio di abbozzo codale
5–metil–cumarina		1/6.000	arresto allo stadio di abbozzo codale
6–metil–cumarina		1/6.000	arresto allo stadio di abbozzo codale
7–8–diossi–cumarina . . .		1/5.000	ritardo di sviluppo dallo stadio di abbozzo codale in poi
4–metil–6–7–diossi–cumarina		1/3.000	arresto allo stadio di abbozzo codale

segue: TABELLA.

Prodotto	Formula di struttura	Concentrazione	Effetto sullo sviluppo
3-fenil-7-ossi-cumarina .		1/24.000	arresto immediato
3-fenil-4-metil-7-ossi-cumarina		1/48.000	arresto allo stadio di abbozzo codale
3-fenil-4-metil-7-8-diossi-cumarina		1/60.000	arresto allo stadio di abbozzo codale
3-4-difenil-7-8-diossi-cumarina		1/120.000	ritardo dello sviluppo dallo stadio di abbozzo codale in poi
2-tiocumarina		1/48.000	arresto allo stadio di abbozzo codale
1-2-ditio-cumarina . . .		1/40.000	arresto allo stadio di abbozzo codale

I composti venivano disciolti in alcool etilico in quantità tale che, portando le soluzioni madri così ottenute in acqua, l'alcool non vi superasse la concentrazione dell' 1,8 %, che è senza effetto sullo sviluppo dell'embrione.

Gli embrioni venivano fatti sviluppare in acqua di fonte, alla temperatura di 22° C, a partire dallo stadio di blastula. Al termine dell'esperimento, che aveva una durata di 72 ore, gli embrioni venivano fissati in Bouin e si allestivano preparati microscopici.

Non è stato possibile raggiungere con tutti i prodotti in esame la concentrazione capace di arrestare lo sviluppo, data la scarsa solubilità di alcuni di essi. In questi casi sono state riportate le concentrazioni che determinano un notevole ritardo dello sviluppo stesso.

Dalla tabella si può osservare che, mentre la cumarina semplice ha un'attività molto bassa, notevolmente attivi sono i composti 3-fenil–sostituiti e le tiocumarine.

La 3–4-difenil–7–8-diossicumarina è il derivato che presenta l'attività più elevata, agendo alla diluizione di 1 : 120.000. Le rimanenti cumarine metil– e ossi–sostituite possiedono un'attività media essendo attive alle concentrazioni comprese tra 1 : 3000 e 1 : 7500, ad eccezione della 3–acetil–cumarina che è notevolmente più attiva.

Abbiamo osservato che gli intervalli tra la concentrazione attiva e quella in cui si ha uno sviluppo normale sono piuttosto piccoli. La 3-acetil-cumarina, ad esempio, che arresta completamente lo sviluppo alla concentrazione di 1 : 40.000, alla concentrazione di 1 : 60.000 è già del tutto priva di azione. Questo comportamento è analogo a quello che è stato osservato sui pesci [8].

Per quasi tutti gli embrioni lasciati crescere a concentrazioni di poco inferiori a quella inibente si potevano osservare delle malformazioni epiteliali in corrispondenza della regione cardiaca. Lo studio istologico di tali malformazioni e la sua interpretazione saranno oggetto di ulteriori indagini.

È risultato inoltre che l'effetto tossico dei prodotti è irreversibile; infatti, se l'embrione, già arrestato nello sviluppo dopo un soggiorno di 72 ore nella soluzione cumarinica, veniva posto in acqua di fonte, si riusciva a farlo sopravvivere per 48–72 ore senza osservare alcuna ripresa dello sviluppo. La sopravvivenza era però, in questo caso, superiore a quella degli embrioni rimasti nelle soluzioni in esame.

Si può pertanto concludere che l'attività tossica esplicata sugli embrioni di anfibi è analoga a quella esplicata sui batteri e sui pesci. Infatti i prodotti più attivi in tutti e tre questi casi sono i derivati fenil–sostituiti della cumarina e i suoi analoghi solforati.

Bibliografia.

[1] Boullay e Boutron-Charland, « J. Pharmacie et Sciencie accessoires », *11*, 485 (1825)
[2] J. Lavollay e F. Laborey, « Compt. rend. », *226*, 2015 (1948).
[3] L. J. Andus e J. H. Quastel, « Nature », *159*, 320 (1947).
[4] I. Cornmann, « J. Exptl. Biol. », *23*, 292 (1947).
[5] J. Lavollay e F. Laborey, « Compt. rend. Soc. biol. », *142*, 825 (1948).
[6] F. Moewus, « Biol. Zentr. », *68*, 58 (1949).

[7] E. DEL PIANTO, « Rendiconti Acc. Naz. dei Lincei », ser. VIII, vol. VI, p. 714 (1949).
[8] V. V. S. MURTI e T. R. SESHADRI, « Proc. Indian. Acad. Sci. », *25A*, 333 (1947).
[9] LINDUSKA, J. H. COCHRAN, e MORTON, « J. Econ. Entomol. », *39*, 767 (1946).
[10] W. HARING., « Ch. Z. », *11*, 1836 (1934).
[11] W. BERING-GERBSTEDT, MANSFELDER, SCEKREIS, D. R. P. 597613 Kl. 4511 del 24 agosto 1932.
[12] M. BRUCE, « Indian Journ. Med. Res. », *17*, 963 (1930).
[13] H. ZIEMANN « Arch. Schiffs Tropen – Hyg. », *35*, 410 (1931).
[14] P. LÄNGER, H. MARTIN e P. MULLER, « Helv. Chim. Acta », *28*, 892 (1944).
[15] H. PRIESS, « Ber. dtsch. pharm. Ges. », *21*, 227 (1911).
[16] H. THOMS e H. PRIESS, « Chem. Ztg. », *34*, 1279 (1910).
[17] H. THOMS, « Ber. dtsch. pharm. Ges. », *21*, 227 (1911).
[18] H. THOMS, « Ber. dtsch. chem. Ges. », *44*, 3325 (1911).
[19] E. SIEBURG, « Biochem. Z. », *113*, 176 (1921).
[20] E. SPÄTH « Monatsh. », *69*, 75 (1936).
[21] H. KREITMAIR, « Pharmacie », *4*, 140 (1949).
[22] E. MAMELI e E. FILIPPI, « Ann. Chim. App. », *16*, 556 (1926).
[23] P. GLEY, C. MENTRER, J. DELA MOLHO e MILLON, « Compt. rend. soc. biol. », *140*, 748 (1946).
[24] P. B. MEDAWAR, G. M. ROBINSON e R. ROBINSON, « Nature », *151*, 195 (1943).
[25] VELDSTRA e E. HAVINGA, « Enzymologia », *11*, 373 (1944).
[26] R. BRODERSEN e A. KJAER, « Acta pharm. et toxicol. », *2*, 109 (1946).

Chimica (Chimica Fisica). — *Velocità ultrasonora e compressibilità adiabatiche di miscele liquide atermiche o ideali* (*). Nota di FERDINANDO DANUSSO, presentata (**) dal Corrisp. G. NATTA.

Le difficoltà teoriche connesse con lo studio dello stato liquido della materia rendono degno di considerazione qualsiasi nuovo mezzo di ricerca sperimentale in grado di apportare sensibili contributi alla conoscenza di proprietà strutturali.

Tra i mezzi chimico-fisici aventi tali caratteristiche si vanno affermando da alcuni anni anche gli ultrasuoni.

Nel caso di liquidi puri già si sono potute stabilire, fra l'altro, correlazioni tra alcune proprietà strutturali e il valore, caratteristico di ogni liquido, della velocità di propagazione degli ultrasuoni o di convenienti funzioni di essa a carattere termodinamico od empirico (1-3), tra cui figura la compressibilità adiabatica.

Più frammentari risultano invece, anche se relativamente numerosi, i lavori basati sulla misura della velocità ultrasonora in miscele liquide (4), le cui conclusioni hanno carattere per lo più qualitativo.

Il tentativo di introdurre in questo campo elementi quantitativi deve, a mio avviso, essere preceduto dal calcolo di dati significativi di riferimento, che illu-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano.

(**) Nella seduta del 10 febbraio 1951.

(1) L. BERGMANN, *Der Ultraschall und seine Anw. in Wiss. und Techn.*, Hirzel, (Zürich 1949) p. 231.

(2) K. ALTENBURG, « Z. Physik. Chem. », *195*, 145 (1950); F. DANUSSO, « Ricerca Scientifica », *20*, 1481 (1950).

(3) F. DANUSSO, « Atti Accad. Naz. Lincei », vol. IX, fasc. 6, pp. 351-357 (1950).

(4) L. BERGMANN, loc. cit. (1), p. 293.

strino il comportamento della costante fisica fondamentale – in questo caso della velocità ultrasonora o della compressibilità – in miscele particolarmente semplici, che escludano, all'atto della loro formazione, sensibili variazioni strutturali.

Tutto ciò induce a prendere in considerazione le così dette miscele ideali, il cui studio è, sotto altri aspetti, notevolmente avanzato. D'altra parte alcune considerazioni, che esamineremo, dimostrano l'insufficienza degli ultrasuoni ad individuare l'idealità, per cui è preferibile riferirsi alla più vasta categoria delle miscele che avvengono senza sensibile effetto termico, designate da Hildebrand [5] come « atermiche », tra le quali figurano, come caso particolare, anche le ideali.

Ammettendo questa scelta e basandosi su ipotesi generalmente già accettate è facile ricavare la legge di variazione della velocità ultrasonora e della compressibilità adiabatica di miscele atermiche (o, nel caso, di miscele ideali) in funzione della composizione e delle proprietà dei componenti puri.

Il primo confronto tra dati sperimentali e dati calcolati si trova in un lavoro di Schaaffs [6], il quale fece uso di una relazione lineare così esprimibile:

$$(1) \qquad u_m = \Sigma u_i w_i$$

in cui u_m è la velocità ultrasonora della miscela e w_i ed u_i le frazioni in peso e le velocità spettanti ai componenti puri. La (1) risulta verificata in sistemi tipo toluolo–etere, tetracloruro di carbonio–acetone, anilina–acetone ed altri.

Per alcune soluzioni acquose di sostanze solide, come saccarosio, ramnosio, urea, urotropina, Schaaffs osserva curve assimilabili a rette qualora vengano rappresentati gli inversi delle velocità in funzione delle concentrazioni in volume.

Schaaffs, anche se denomina la (1) « regola di miscelazione », non accenna all'impiego di essa come criterio di idealità. D'altra parte la scelta della (1), a cui sembrano favorevoli alcuni Autori, anche come puro criterio empirico di confronto, resta infirmata dalla natura delle miscele che ad essa obbediscono, tra le quali figurano composti strutturalmente inadatti a miscelazioni prive di interazioni.

Utter e Kling [7], nell'intento di verificare sulle miscele l'additività della funzione empirica di Rama Rao, studiarono due miscele di idrocarburi e rilevarono, invece, un andamento approssimativamente lineare della velocità rispetto alle concentrazioni in volume. Pur prescindendo dalla scarsità e dalla relativa approssimazione dei dati di verifica, non può essere dato *a priori* a quest'ultima relazione, assunta in via puramente empirica, un particolare rilievo.

Solamente Natta e Baccaredda [8] posero come base un criterio di idealità. Essi definirono ideale, agli effetti della propagazione ultrasonora, ogni miscela che segua nella miscelazione l'additività dei volumi, e condussero il calcolo nell'ipotesi semplificativa di una stratificazione della miscela nei propri componenti. Ugua-

(5) J. H. Hildebrand, R. L. Scott, *The Solubility of Nonelectrolytes*, Reinhold Publ. Corp. (New York 1950).

(6) W. Schaaffs, « Z. Physik. Chem. », *105*, 658 (1937).

(7) N. Utter, R. Kling, « C. R. Acad. Sci. », Paris, *227*, 41 (1948).

(8) G. Natta, M. Baccaredda, « Atti Accad. Naz. Lincei », *4*, 360 (1948).

gliando il tempo di attraversamento della miscela alla somma dei tempi occorrenti per attraversare i singoli strati e ritenendo gli spessori degli strati, misurati nella direzione della propagazione ultrasonora, proporzionali alle concentrazioni in volume dei rispettivi componenti, detti Autori giunsero ad una formula equivalente alla seguente:

$$\frac{1}{u_m} = \Sigma \frac{v_i}{u_i} \tag{2}$$

essendo v_i le concentrazioni in volume dei vari componenti. Tale relazione si verifica bene nei sistemi cicloesano–decalina, n–eptano–poliisobutilene, acqua–saccarosio (quest'ultimo sistema in accordo con quanto fu osservato da Schaaffs).

Le caratteristiche della (2) sono teoricamente subordinate al modello scelto per il calcolo: essa vale rigorosamente per miscele stratificate nei componenti puri, con stratificazioni parallele tra loro, normali alla direzione della propagazione acustica e con superfici di separazione a carattere geometrico. È interessante notare che, nonostante tali limitazioni, la (2) trova frequenti verifiche sperimentali su miscele omogenee.

Vedremo ora come può essere risolto il problema da un punto di vista termodinamico e svilupperemo un calcolo valido per miscele liquide atermiche, omogenee ed isotrope, ritenendo adiabatico e reversibile il processo della propagazione ultrasonora.

Per l'impostazione del problema consideriamo alcune relazioni tipiche. Le miscele atermiche sono caratterizzate da calore di miscela nullo, per cui, per una miscelazione a pressione costante, se H è l'entalpia, si può scrivere:

$$\Delta H^M = 0 \tag{3}$$

intendendo con ΔH^M la variazione della funzione per il sistema complessivo durante la miscelazione. In tali condizioni si potrebbe dimostrare [9] che è lecito ritenere anche:

$$\Delta V^M = 0 \tag{4}$$

cioè ammettere l'additività dei volumi.

Indicando con U l'energia interna, nella miscelazione a pressione costante dalle (3) e (4) consegue:

$$\Delta U^M = 0. \tag{5}$$

Se la miscela che stiamo considerando è effettivamente (e non casualmente) atermica, si può ammettere che le equazioni viste valgano almeno in un certo intervallo di pressioni e di temperature (così come possono valere in un certo intervallo di concentrazioni).

Nel caso di una propagazione acustica sono particolarmente interessanti le variazioni delle funzioni termodinamiche con la pressione in condizioni adiabatiche.

(9) G. SCATCHARD, «Trans. Faraday Soc.», *33*, 160 (1937). HILDEBRAND, SCOTT, loc. cit. (5), p. 137.

Potendo ritenere tali funzioni dipendenti da due sole variabili fisiche (considerate indipendenti), possiamo derivare le (3), (4) e (5) rispetto alla pressione ad entropia S costante (e a composizione costante) ed ottenere corrispondenti relazioni tra le derivate, che possono essere ulteriormente trasformate in base a note relazioni termodinamiche.

Così, derivando la (3) nel modo detto, si può scrivere:

$$\left(\frac{\partial \Delta H^M}{\partial p}\right)_S = \Delta V^M = 0 \tag{6}$$

e si è ricondotti alla (4). Dalla (4) analogamente si ottiene:

$$\left(\frac{\partial \Delta V^M}{\partial p}\right)_S = 0 \tag{7}$$

e dalla (5) la seguente relazione:

$$\left(\frac{\partial \Delta U^M}{\partial p}\right)_S = -p\left(\frac{\partial \Delta V^M}{\partial p}\right)_S = 0 \tag{8}$$

che si riduce alla (7) e può essere ricavata, in senso inverso, dalla (4).

Si può quindi concludere, per l'impostazione del problema, che nelle trasformazioni connesse con la propagazione ultrasonora la relazione (4) assume una posizione fondamentale, in accordo con quanto fu intuito da Natta e Baccaredda [8].

Per arrivare a relazioni espressive conviene riscrivere la (4) mettendo in evidenza il volume V_m della miscela ed i volumi V_i dei singoli componenti puri prima della miscelazione:

$$V_m = \Sigma V_i. \tag{4'}$$

Derivando rispetto alla pressione, ad entropia (e composizione) costante, si ottiene la (7) nella seguente forma:

$$\left(\frac{\partial V_m}{\partial p}\right)_S = \Sigma\left(\frac{\partial V_i}{\partial p}\right)_S \tag{7'}$$

che estende l'additività alle derivate dei volumi più propriamente definibili « compressibilità adiabatiche ».

Per rendere esplicita la composizione mantenendo la semplicità delle formule, introduciamo la « compressibilità adiabatica molecolare » B e la « compressibilità adiabatica specifica » b accanto alla compressibilità adiabatica β abitualmente usata. Qualora si indichi con N e con W il numero di moli e il peso totale di un sistema liquido, le compressibilità ora elencate sono rispettivamente così definite:

$$B = -\frac{1}{N}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S \tag{9}$$

$$b = -\frac{1}{W}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S \tag{10}$$

$$\beta = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S. \tag{11}$$

Indicando con x_i, w_i e v_i le frazioni molari, in peso ed in volume dei vari componenti, si può facilmente constatare che la (7') dà luogo alle seguenti tre relazioni equivalenti:

$$B_m = \Sigma B_i x_i \tag{12}$$

$$b_m = \Sigma b_i w_i \tag{12'}$$

$$\beta_m = \Sigma \beta_i v_i \tag{12''}$$

assai semplici, che *esprimono in generale, per una miscela atermica, l'additività delle compressibilità adiabatiche* B, b e β *rispettivamente nel campo delle frazioni molari, in peso ed in volume.*

Poichè si possono dimostrare le seguenti relazioni [3]:

$$B = \frac{M}{\rho^2 u^2} \tag{13}$$

$$b = \frac{1}{\rho^2 u^2} \tag{14}$$

$$\beta = \frac{1}{\rho u^2} \tag{15}$$

in cui M è la massa molecolare, ρ la densità ed u la velocità ultrasonora, dalle (12) si ricava immediatamente *il legame tra la velocità ultrasonora di una miscela atermica e le velocità dei singoli componenti puri:*

$$\frac{M_m}{\rho_m^2 u_m^2} = \Sigma \frac{M_i x_i}{\rho_i^2 u_i^2} \tag{16}$$

$$\frac{1}{\rho_m^2 u_m^2} = \Sigma \frac{w_i}{\rho_i^2 u_i^2} \tag{16'}$$

$$\frac{1}{\rho_m u_m^2} = \Sigma \frac{v_i}{\rho_i u_i^2} . \tag{16''}$$

Come si vede, la relazione tra le velocità è meno semplice di quella tra le compressibilità.

Con procedimento analogo a quello seguìto per la (12), dalla (8) si può facilmente dedurre l'additività, rispetto alle frazioni molari, della funzione Φ messa in evidenza in altra Nota [3]. Alle relazioni viste si può perciò aggiungere anche la seguente:

$$\Phi_m = \Sigma \Phi_i x_i \tag{17}$$

e, volendo, le analoghe alle (12') e (12''), che esprimono l'additività delle variazioni dell'energia interna nella compressione adiabatica a composizione costante.

La (12), come la (17), oltre ad essere una delle più indicate per il riconoscimento delle miscele atermiche per via ultrasonora, è anche la relazione formalmente più adatta allo studio delle deviazioni in miscele termiche. Quest'ultima proprietà sarà messa in evidenza in Note successive.

TABELLA I.

ρ in gr/cm³ — u in m/sec — B in $cm^3 \cdot 10^{-3}$/mole atm

t° c	COMPONENTI	x moli	ρ dalle (18)	ρ sperim.	u dalle (16)	u sperim.	B dalle (12)	B sperim.
25°	Benzolo	0	—	0,873	—	1296	—	5,98
		0,3499	0,927	. . .	1280	1278	6,27	. . .
	(1)	0,5842	0,958	. . .	1273	1272	6,47	. . .
		0,8298	0,987	. . .	1268	1267	6,68	. . .
	Clorobenzolo	1	—	1,005	—	1265	—	6,83
25°	Eptano	0	—	0,715	—	1158	—	14,32
		0,3987	0,988	0,988	1034	1034	11,43	11,43
	(1)	0,5641	1,126	1,125	993	994	10,24	10,23
		0,7971	1,348	1,349	949	949	8,55	8,55
	Tetracloruro di C	1	—	1,584	—	921	—	7,09
30°	Toluolo	0	—	0,8554	—	1286	—	7,47
		0,4703	0,9657	0,9660	1263	1264	6,71	6,69
	Clorobenzolo	1	—	1,0961	—	1252	—	5,86
30°	Metaxilolo	0	—	0,8555	—	1302	—	8,39
		0,4784	0,9490	0,9497	1284	1286	7,67	7,63
	p–clorotoluolo	1	—	1,0544	—	1275	—	6,87
20°	Cicloesano	0	—	0,778	—	1281	—	8,47
		0,187	0,804	. . .	1310	1312	8,52	. . .
	(2)	0,409	0,830	. . .	1344	1347	8,57	. . .
		0,732	0,862	. . .	1391	1395	8,64	. . .
	Decalina	1	—	0,883	—	1427	—	8,71
30°	Alcol metilico	0	—	0,7832	—	1092	—	4,30
		0,4100	0,7950	0,7944	1168	1167	5,60	5,62
		0,7796	0,8004	0,8000	1210	1210	6,78	6,79
	Alcol n–butilico	1	—	0,8026	—	1228	—	7,48
30°	Alcol metilico	0	—	0,7832	—	1092	—	4,30
		0,3645	0,7973	0,7966	1167	1164	5,95	5,99
		0,5826	0,8016	0,8012	1193	1192	6,94	6,96
	Alcol isoamilico	1	—	0,8066	—	1228	—	8,81

(1) Dati sperimentali di P. TUOMIKOSKI, U. NURMI, «Comm. Phys. Math. Helsingf.», 10, 11 (1940).
(2) Dati sperimentali di NATTA, BACCAREDDA, loc. cit. (8).

La (12″) chiarisce qualche incertezza ancora esistente nella letteratura sulla legge di variazione della usuale compressibilità adiabatica con la composizione: la legge è semplice se ci si riferisce alle concentrazioni in volume, ma è meno semplice se si esprime diversamente la composizione.

La previsione di massima della velocità di una miscela (o di uno dei componenti, note le proprietà della miscela e degli altri componenti) può essere fatta utilizzando una delle (16), specie la (16′), e tenendo presente che, per la previsione delle densità, la (4) può essere specificata in uno dei seguenti modi:

$$\frac{M_m}{\rho_m} = \Sigma \frac{M_i x_i}{\rho_i} \tag{18}$$

$$\frac{1}{\rho_m} = \Sigma \frac{w_i}{\rho_i} . \tag{18′}$$

Le (16) possono anche, nei casi di validità approssimata, assolvere analiticamente un compito analogo a quello dell'estrapolazione empirica descritta da Schaaffs, estensibile anche a soluzioni di solidi allo stato di liquido sopraffuso [6].

Nella Tabella I sono confrontati dati sperimentali con dati previsti secondo le considerazioni qui esposte per alcune miscele approssimativamente atermiche. I dati sperimentali di velocità, non provenienti dalla letteratura, sono stati determinati con un apparecchio messo a punto nell'Istituto di Ultracustica del C. N. R. a frequenza di 4 MHz e cella a doppio quarzo secondo Giacomini [10]: essi possono essere considerati approssimati al 0,2%. Le densità sono state eseguite in picnometro.

Benchè tutte le relazioni viste valgano anche per miscele ideali, il riconoscimento di queste ultime non può essere fatto unicamente attraverso misure di densità e di velocità ultrasonora. La miscelazione ideale, infatti, può essere riscontrabile solo nella variazione di funzioni termodinamiche diverse da quelle fin qui considerate. L'entropia di miscela, ad esempio, non è nulla, ma deve corrispondere al valore ottenibile dal calcolo delle complessioni relative alla configurazione del sistema in condizioni ideali. Tale corrispondenza si riflette in variazioni anche delle energie libere e, in definitiva, nell'obbedienza alla legge di Raoult [11]. Dalle stesse variazioni consegue, tra l'altro, la validità delle (3) e (4), che risultano così condizioni necessarie, ma non sufficienti, di idealità.

CONCLUSIONI. – Nell'intento di apportare elementi quantitativi allo studio delle miscele liquide mediante misure di velocità ultrasonora, si sono stabilite le leggi di dipendenza della compressibilità adiabatica e della velocità ultrasonora dalla composizione, nel semplice caso di miscele che avvengono senza sensibile effetto termico (atermiche).

Alcune considerazioni termodinamiche mettono in evidenza, per tali miscele, la posizione fondamentale dell'additività dei volumi nei problemi connessi con la

(10) A. GIACOMINI, «Rend. Acc. Naz. Lincei», *2*, 791 (1947).
(11) HILDEBRAND, SCOTT, loc. cit. (5), p. 17, 106.

propagazione acustica. La relazione dell'additività dei volumi si traduce, per derivazione rispetto alla pressione ad entropia e composizione costante, nell'additività delle compressibilità adiabatiche, definite in senso assoluto. La dipendenza dalla composizione assume forma semplice qualora si introduca, accanto alla compressibilità adiabatica β abitualmente usata, la « compressibilità adiabatica molecolare » B e quella « specifica » b, secondo le seguenti definizioni:

$$B = -\frac{1}{N}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S \qquad b = -\frac{1}{W}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S \qquad \beta = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S$$

in cui N è il numero di moli del sistema liquido compresso, W il peso, V il volume, p la pressione ed S l'entropia. Dalle posizioni fatte consegue l'additività di queste compressibilità rispettivamente nel campo delle frazioni molari, in peso ed in volume, come espresso dalle (12).

Additiva risulta pure la funzione Φ messa in evidenza in una Nota precedente, che esprime variazioni dell'energia interna con la pressione, ad entropia e composizione costante.

Dato il legame esistente in generale tra le compressibilità adiabatiche e la velocità ultrasonora, dalle (12) scendono immediatamente le relazioni (16) tra la velocità della miscela e quella dei singoli componenti puri, in forme diverse a seconda del tipo di concentrazione considerata.

La tabella I confronta dati sperimentali con dati previsti utilizzando le (12) e le (16) per alcune miscele approssimativamente atermiche.

Le relazioni viste valgono anche per le miscele ideali, che costituiscono un caso particolare delle atermiche. Le miscele ideali non sono però individuabili per via unicamente ultrasonora, per cui la validità di ognuna delle relazioni qui considerate è condizione necessaria, ma non sufficiente, di idealità.

Chimica organica. — *Nuovi spettri Raman dell'* α*–acetilpirrolo e dell'* N*–acetilpirrolo* (*). Nota di Elisa Ghigi e Paolo Chiorboli, presentata (**) dal Socio G. B. Bonino.

Nello studio della precedente bibliografia sugli spettri Raman dell' α-acetilpirrolo (1) e dell' N–acetilpirrolo (2) abbiamo osservato che gli spettri di questi composti erano stati eseguiti soltanto in questo Istituto su un unico campione per ciascuno dei due prodotti preparati da P. Pratesi nell'Istituto di Chimica Organica del Politecnico di Monaco di Baviera.

La lettura degli spettri stessi era stata eseguita mediante riferimento alle righe dello spettro del mercurio per interpolazione con la nota formula di Hartmann.

(*) Lavoro eseguito presso il centro Studi di Chimica Fisica del Consiglio Nazionale delle Ricerche nell'Istituto Chimico « G. Ciamician » della Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 10 febbraio 1951.

(1) Bonino, Manzoni, Pratesi, « Z. phys. Chem. », *25*, 348 (1934).

(2) Bonino, Manzoni, Pratesi, « Z. phys. Chem. », *22*, 21 (1933); Bonino, Manzoni, « Ricerca Sci. », 1937, II, p. 227; Manzoni, questi « Rendiconti », VII, *1*, 669 (1940).

Prima di procedere ad un nuovo studio sperimentale e teorico sulle manifestazioni spettroscopiche del gruppo C=O nei due chetoni sovra ricordati abbiamo stimato opportuno ripetere gli spettri di ambedue i prodotti partendo però da campioni di nuovo preparati dei due composti.

I due chetoni sono stati all'uopo preparati da uno di noi (Ghigi) nel laboratorio di Chimica Organica dell'Istituto Chimico « Giacomo Ciamician », per consiglio e sotto la guida del prof. G. B. Bonino, come è descritto appresso.

D'altra parte dovendoci preparare a discutere differenze talvolta anche piccole nella posizione delle righe Raman, esigenza che non era così severamente necessaria nel primo studio degli spettri Raman eseguito nei precedenti lavori, abbiamo voluto riferire con molta diligenza gli spettri, eseguiti sulle sostanze di nuovo preparate e opportunamente purificate, allo spettro di emissione del ferro onde poter apprezzare con maggiore sicurezza anche piccole differenze nella posizione delle righe.

1° α-*acetilpirrolo*. – È stato preparato secondo B. Oddo [3] dal ioduro di pirrilmagnesio con cloruro di acetile in soluzione eterea.

Il prodotto venne separato per distillazione con vapore e successiva cristallizzazione dall'acqua, da cui si separa in aghi incolori, fusibili a 90° C.

Il prodotto così ottenuto, già assai notevolmente puro, fu, prima delle esperienze, ulteriormente purificato per successive ricristallizzazioni da etere di petrolio, allo scopo di assicurarsi della completa eliminazione d'ogni traccia d'acqua, che potrebbe perturbare i risultati.

2° N-*acetilpirrolo*. – È stato preparato secondo G. Ciamician e M. Dennstedt [4] per azione del cloruro di acetile in soluzione eterea sul pirrolato potassico sospeso in etere. Il prodotto venne separato per distillazione con vapore d'acqua e quindi, previa estrazione con etere ed eliminazione dell'etere, per distillazione frazionata. Liquido incoloro. P. E. 177–178°C.

Prima delle esperienze il composto fu ogni volta ridistillato ripetutamente ad una pressione di circa 10 mm_{Hg} e sempre sotto vuoto furono chiusi alla fiamma i tubicini « Raman ». Con queste precauzioni anche dopo lunghe pose il contenuto dei tubicini è sempre risultato perfettamente limpido ed incoloro.

RISULTATI SPERIMENTALI. – Nelle seguenti tabelle sono riportati gli spettri Raman dell'α-acetilpirrolo e dell'N-acetilpirrolo da noi eseguiti sui campioni preparati espressamente come è detto sopra.

Accanto agli spettri Raman ora ottenuti (con luce eccitatrice di una lampada a vapori di mercurio filtrata opportunamente sì da utilizzare la riga a 4358 Å e con le apparecchiature spettrografiche descritte già in precedenti lavori [5] sono segnate le posizioni delle righe degli spettri Raman eseguiti precedentemente.

(3) ODDO, « Ber. », *43*, 1014 (1910).
(4) CIAMICIAN e DENNSTEDT, « Gazz. chim. it. », *13*, 460 (1883).
(5) Ved. per esempio: ROLLA, CHIORBOLI, « Gazz. chim. it. », *78*, 937 (1948).

TABELLA I.

Spettro Raman dell' α–acetilpirrolo in soluzione metanolica satura

BONINO, MANZONI, PRATESI (1) (1934)	Questo lavoro (1951)
—	895 (1)
929 (3 1/2)	932 (3)
—	990 (1) ?
1045 (3)	1045 (3)
—	1150 (1)
—	1317 (1) ?
1367 (3)	1371 (3)
1406 (4)	1408 (4)
1636 (5)	1638 (6 dif)
2967 (2)	2954 (1)

(1) « Z. phys. Chem. », *25*, 356 (1934).

DISCUSSIONE DEI RISULTATI.

1) *α–acetilpirrolo.* – Lo spettro che noi abbiamo ottenuto per la soluzione metanolica satura di α–acetilpirrolo corrisponde pienamente a quello ottenuto nel 1934 da Bonino, Manzoni, Pratesi.

I nostri spettri, ottenuti con una apparecchiatura più moderna e luminosa di quella utilizzata dai precedenti Autori, mostrano alcune deboli righe in più che non erano mostrate negli spettri precedentemente pubblicati. Così notiamo la riga a 895 cm^{-1} quella a 1150 cm^{-1}. Altre due righe deboli mostrate dai nostri spettri e mancanti nello spettro dei precedenti Autori e cioè la 990 cm^{-1} e la 1317 cm^{-1} potrebbero però considerarsi dubbie e cioè potrebbero interpretarsi anche come 1044 cm^{-1} e 1370 cm^{-1} rispettivamente, e cioè coincidenti con due righe intense dello spettro Raman di questo composto, eccitate dalla riga del mercurio a 22995 cm^{-1} anzichè dalla solita riga eccitatrice intensa a 22938 cm^{-1}. Perciò noi abbiamo segnato queste due righe con un punto interrogativo.

Sta però di fatto che le 5 righe forti caratteristiche dello spettro Raman dell' α–acetilpirrolo corrispondono pienamente nei due spettri e cioè nel nostro e in quello dei precedenti Autori anche con una ottima coincidenza numerica delle rispettive posizioni. Di fatti la posizione di queste righe forti differisce fra i due spettri in media di meno di tre numeri d'onda su 1000–1700 numeri d'onda.

Notiamo che la riga caratteristica del gruppo C=O trovata a 1636 cm^{-1} nello spettro di Bonino, Manzoni, Pratesi viene riconfermata a 1637 cm^{-1} nel nostro spettro. Viene dunque confermato che nella soluzione satura metanolica di α–acetil-pirrolo la riga caratteristica del gruppo C=O si presenta come una riga di un gruppo C=O « perturbato ».

TABELLA II.

Spettro Raman dell' N–*acetilpirrolo.*

BONINO, MANZONI, PRATESI (1) (1933)	BONINO, MANZONI (2) (1937)	questo lavoro (1951)
—	168 (1)	162 (2)
405 (½)	405 (1)	401 (2)
—	524 (1 ½)	521 (2)
544 (1)	—	—
—	559 (0)	559 (1)
—	—	594 (1)
644 (1)	637 (2)	634 (3)
859 (2)	863 (1 ½)	862 (2)
914 (2)	919 (3)	917 (4)
967 (0)	976 (1 ½)	975 (3)
1027 (0)	1031 (1 ½)	1027 (3)
1082 (0)	1084 (½)	1082 (1)
1132 (4)	1136 (10)	1135 (10)
—	1300 (1)	1299 (2)
—	—	1319 (1)
1382 (3)	1372 (½)	1370 (1)
—	1400 (3)	1400 (4)
—	1422 (½)	1427 (1)
1468 (3)	1465 (5)	1464 (5)
1711 (4)	1715 (6 dif)	1716 (8)
2915 (2 dif)	2935 (4)	2935 (3)
—	2980 (0)	2982 (1)
—	3025 (0)	3021 (1)
3135 (3)	3120 (1 ½)	3118 (1)
—	3153 (2 dif)	3154 (2)

(1) « Z. phys. chem. », *22*, 21 (1933).
(2) « Ricerca Sci. », 1937, II, p. 227.

2) N–*acetilpirrolo*. – Lo spettro Raman dell'N–acetilpirrolo da noi ottenuto corrisponde ottimamente, come numero e come posizione di righe, allo spettro ottenuto da Bonino e Manzoni nel 1937. Noi otteniamo in più una debole riga a 594 cm^{-1} ed una seconda debole riga a 1319 cm^{-1}.

Il gruppo C=O si manifesta nel nostro spettro Raman con una intensa riga a 1716 cm^{-1} che corrisponde alla riga a 1715 cm^{-1} dello spettro di Bonino e Manzoni. Dunque resta ancora una volta definitivamente confermato che mentre nella soluzione satura metanolica l'α–acetilpirrolo mostra una riga fortemente perturbata del gruppo C=O, l'N–acetilpirrolo mostra questa riga in posizione perfettamente normale e cioè nella precisa posizione nella quale si trova la riga del gruppo C=O nei chetoni alifatici.

Questa forte differenza di posizione della riga C=O nei due chetoni pirrolici aveva già attirato l'attenzione di Bonino e Collaboratori. Abbiamo reputato utile ed opportuno riconfermare questa forte differenza del comportamento spettroscopico del gruppo C=O nei due chetoni fotografando nuovi spettri su nuovi campioni di chetoni espressamente preparati. Ci sembra che il risultato sperimentale, che può a prima vista apparire singolare, sia ora perfettamente confermato ed acquisito.

Geologia. — *Rilevamento geologico nella zona del Pizzo Badile (Adamello sud–occidentale)* (*). Nota di Bruno Accordi, presentata (**) dal Corrisp. Gb. Dal Piaz.

Generalità. - Nella scorsa estate ho proseguito il rilevamento geologico alla scala 1 : 25.000 della zona del Pizzo Badile, sul versante sinistro della media Val Camonica e all'altezza dei paesi Cimbergo–Paspardo–Capodiponte.

Il territorio esaminato consta prevalentemente di terreni sedimentari, ed è limitato *grosso modo* a Sud dalle valli Palobbia e Paghera, a Est dal meridiano passante per il Passo di Mezzamalga, a Nord dal torrente Tredenùs (nella conca del Volano) e dal torrente Re, che sbocca nell'Oglio sopra Capodiponte; l'Oglio stesso segna il limite Ovest.

Alcune plaghe comprese entro questi limiti erano già state da me rilevate nell'estate 1949 (1); per la parte più a Nord mi sono basato su un rilevamento inedito di A. Riedel del 1948. Per l'interpretazione di alcuni problemi feci tesoro delle osservazioni del prof. Piero Leonardi, che visitò la zona compiendo con me qualche escursione.

(*) Lavoro compiuto nell'Istituto di Geologia e Mineralogia dell'Università di Ferrara e compreso nel programma del Centro Studi di Petrografia e Geologia del Consiglio Nazionale delle Ricerche presso l'Università di Padova.

Esprimo la mia riconoscenza ai proff. Gb. Dal Piaz e P. Leonardi per i consigli e gli aiuti.

(**) Nella seduta del 10 febbraio 1951.

(1) B. Accordi, *Appunti geologici sul versante sinistro della Val Camonica, dalla Val Palobbia alla Valle di Fa.* « Rendic. Accad. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. VIII, fasc. 3, pp. 253-58, Roma 1950.

Il tratto rilevato comprende un nucleo centrale – il Pizzo Badile – abbastanza complicato per la tettonica, per il numero e la varietà dei filoni e delle apofisi eruttive, per la complessità delle azioni metamorfiche; ed una fascia periferica di terreni più antichi (essenzialmente werfeniani e permiani), di facile interpretazione ed in buona parte ricoperta da morenico, da bosco e da coltivazioni.

STRATIGRAFIA. — *Prepermiano.* – Compare solo oltre il limite settentrionale della zona rilevata e consta di scisti cristallini - forse azcheozoici – su cui poggiano le formazioni permo–triassiche. Ad un sommario esame sembra vi siano vari termini di transizione da filladi quarzifere a micascisti filladici e scisti cloritici e sericitici (questi ultimi contengono vene di siderite). I piani di scistosità sono ondulati; la fogliettatura è spesso fine; il colore varia dal grigio–chiaro al grigio–verdognolo e al grigio–viola. L'inclinazione s'aggira spesso sui 50°, la direzione prevalente è NW–SE; non sono rari i lembi ripiegati o fratturati con andamento vario.

Permiano. – La discordanza tra gli scisti e le arenarie permiane non è sempre evidente; l'inclinazione è spesso uguale, la direzione tende in molti casi a N–S nelle arenarie. Il passaggio dagli uni alle altre è a volte netto e ben visibile.

Sopra gli scisti s'incontrano dapprima banchi di arenarie grossolane e di piccoli conglomerati ad elementi quarzosi fino ad 1 cm. di diametro; il colore tende al grigio–viola o viola–ruggine; lo spessore è di 20–30 metri. Seguono, per uno spessore molto più potente (150 metri circa), arenarie minute o minutissime grigie o grigio–scure, in banchi di 1–3 metri poco fessurati. La parte più recente – dello spessore di una cinquantina di metri – ridiventa grossolana: arenarie a grana grossa, violacee o grigie, banchi di conglomerato tipo «verrucano» con elementi silicei varicolori del diametro massimo di 5 cm.

Questa formazione arenacea permiana, perfettamente osservabile in dettaglio e limitata alla zona a nord e ad ovest di Cimbergo, presenta notevolissime differenze (nel colore, nella costituzione litologica, nella grana e nella compattezza, nel determinare le caratteristiche del paesaggio) rispetto alle parzialmente coeve « arenarie di Val Gardena », per cui sono d'accordo con il prof. Leonardi sull'inopportunità di chiamarla con questo stesso nome.

Werfeniano inferiore (*Servino*). – È una formazione di spessore non ben determinabile, con frequenti passaggi da finissime arenarie a calcari arenacei, il tutto più o meno ricco in argilla e di colore variabile; alla base i letti sono per breve tratto giallastri e friabili; seguono letti con sfaldatura perfetta, grigio–viola, grigio–verdi, verde–gialli, fossiliferi in alcuni punti; la direzione prevalente è N–S; l'inclinazione (a W) si va attenuando dalla base al tetto, passando da una media di 40° ad una media di 25-30°. Il Servino affiora con una certa estensione in due soli tratti, presso i paesi di Cimbergo e di Paspardo; gli altri modesti affioramenti sono disposti secondo un arco che ha per centro il Pizzo Badile.

I fossili sono mal conservati, e oltre a qualche resto di ammonite ed a qualche lamellibranco sono relativamente abbondanti resti di vegetali del tipo dei fucoidi; il prof. Leonardi vi trovò anche impronte di zampe riferibili a rettili. Notevoli alcuni esempi di *ripplemarks*, dai quali si può dedurre l'ambiente di deposizione.

Werfeniano superiore. – Al Servino segue, sempre in concordanza, la dolomia cariata, per uno spessore di una sessantina di metri. Alla base vi sono letti bianco-gialli, friabili, talora farinosi, con piccole percentuali di gesso; seguono alcuni banchi più compatti e brecciati; s'incontra quindi la vera dolomia cariata, prima con piccola cariatura, quindi con celle vistose; il colore di questi ultimi

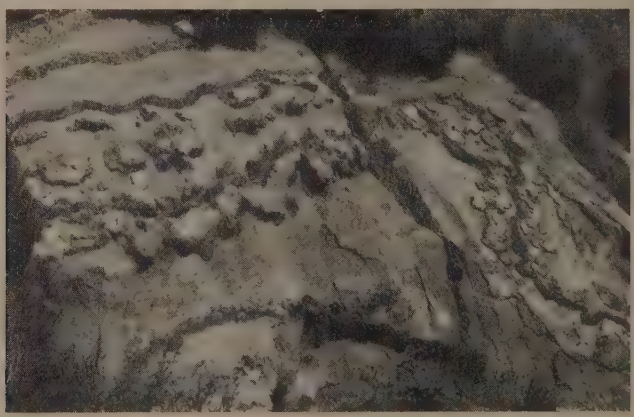


Fig. 1. – I caratteristici calcari con letti silicei nodulari della zona a *Protrachiceras reitzi* (Ladinico inferiore). Presso Sella Nanti.

(Fotogr. B. Accordi).

banchi è decisamente giallo. Gli affioramenti più belli si trovano a SE di Nadro, a est di Cimbergo e a Pian del Campo. Inclinazione e direzione, spesso non misurabili, hanno in genere valori uguali o vicini a quelli del sottostante Servino.

Tra la cariata ed i caratteristici strati a fitte alternanze calcareo-marnose dell'Anisico inferiore vi è un banco di calcare grigio o grigio-chiaro, con rade e deboli variazioni in contenuto argilloso, ricco a tratti di vene calcitiche e interrotto da qualche esile letto di argilla verdognola: è ben osservabile solo nei dintorni di Ceto. Come è noto [2] Salomon [3] chiamò questi calcari *Eltodolomit*,

(2) Vedi B. Accordi, 1950, op. cit. p. 255, e A. Riedel, *Primi risultati di uno studio geologico sulla media Val Camonica a sinistra del fiume Oglio.* «Rendic. Accad. Naz. Lincei», ser. VIII, vol. VI, fasc. 1, Roma 1948.

(3) W. Salomon, *Die Adamellogruppe.* «Abhandl. K. K. Reichsanst.», vol. XXI, fasc. 1, con carta geologica 1 : 75.000, Vienna 1908.

e li ritenne vicarianti con la dolomia cariata; ho potuto constatare definitivamente che le due formazioni non sono affatto vicarianti, ma più volte contemporaneamente presenti. E in assenza di fossili è difficile decidere se i calcari grigi appartengano già all'Anisico inferiore o vadano assegnati al Werfeniano superiore.

Per non dilungarmi su cose già dette, rimando, per quanto riguarda i termini dell'Anisico, del Ladinico e del Carnico, alla mia nota del 1950. Accenno solo ad un interessante caso di *eteropia di facies* osservato ora per la prima volta nei materiali del Ladinico superiore (Wengen): procedendo da sud a nord, le caratteristiche arenarie scure (zona a *Daonella lommeli*), osservabili fino alla Val di Vades, cedono il posto a letti alternatamente calcareo–arenacei e calcareo–silicei (visibili in dettaglio nell'alta Val di Cotro), simili in parte ai sottostanti letti del Ladinico inferiore (zona a *Protrachiceras reitzi*).

I terreni anisici, ladinici e carnici sono accentrati in corrispondenza del Pizzo Badile, salvo esili affioramenti in posizioni un pò più periferiche, e pur costituendo la cerniera della « sinclinale del Badile » (il cui asse passa, con direzione ENE-WSW, appena a sud del Pizzo), hanno inclinazioni e direzioni localmente assai variabili in conseguenza di fitti ripiegamenti.

MASSE ERUTTIVE E FILONI. – I terreni sedimentari sono limitati a est da masse prevalentemente granodioritiche, passanti verso nord a termini assai prossimi alla tonalite. Entro i sedimenti stessi spuntano numerose apofisi o placche che tendono in parte a differenziarsi in senso basico: dioriti, dioriti anfiboliche, gabbrodioriti (4). I filoni, poco numerosi nella fascia periferica e abbondantissimi attorno al Pizzo Badile, sono in buona parte granodioritici, dioritici, microdioritici; abbondano pure i filoni porfiritici, di color verde–scuro, mentre quelli aplitici sono scarsi.

Di notevole interesse sono alcuni filoni – situati attorno al Pizzo – profondamente alterati, di composizione non ancora definita, fagliati e interrotti da filoni granodioritici più recenti; sono disposti quasi verticalmente (nel marmo di Esino pure raddrizzato) e, secondo i proff. Bianchi e Dal Piaz, non è escluso che appartengano ad una serie di manifestazioni vulcaniche ben più antiche (forse triassiche).

Anche per quanto riguarda la ricchezza dei fenomeni metamorfici di contatto e la selettività del metamorfismo rimando alle pubblicazioni citate (5).

(4) Per una più ampia visione dei fenomeni di differenziazione e di metamorfismo si consultino: A. BIANCHI e GB. DAL PIAZ, *Differenziazioni petrografiche e metamorfismi selettivi di contatto nel Massiccio dell'Adamello.* « Rendic. Soc. Mineral. Ital. », V, 1948; A. BIANCHI e GB. DAL PIAZ, *Metamorfismo selettivo e processi metasomatici di contatto nel Massiccio dell'Adamello.* « Internat. Geol. Congress », Report of the VIII Session, Part III, Great Britain 1948; si consultino pure le bibliografie riportate in questi lavori.

(5) Le rocce eruttive e metamorfiche delle valli Palobbia e Paghera stanno formando oggetto di ricerche petrografiche da parte del prof. S. MORGANTE.

Tettonica. – La zona rilevata costituisce l'ala nord della «sinclinale del Badile», ed i sedimenti hanno un'inclinazione media (esclusa la fascia presso l'asse della sinclinale) di 30–60° verso SW: prevalentemente verso W nel tratto più settentrionale, verso sud in vicinanza della cerniera.

Le formazioni più settentrionali e più antiche (fino al Werfeniano compreso) mancano di notevoli ripiegamenti e possiedono inclinazioni medie o modeste; sono costituite di materiali in prevalenza rigidi, per cui le faglie abbondano; il paesaggio ha *grosso modo* l'aspetto di una gradinata a ripiani inclinati (dati dal tetto delle arenarie permiane, del Servino, della dolomia cariata) e solcata da strette e profonde forre (ad esempio i torrenti Figna e Re, ben visibili salendo da Ceto a Paspardo).

I terreni più recenti (dall'Anisico al Ladinico, compresi gli strati di La Valle in facies eteropica) sono invece tormentati e fittamente ripiegati, per la loro plasticità e per essere stati serrati in una morsa formatasi in corrispondenza del nucleo della sinclinale del Badile.

Molto interessante è la cima del Pizzo Badile, di candido marmo di Esino a grana grossissima e friabile disposto in strati verticali, che è stata spostata in blocco verso ovest dall'intrusione di un grosso filone orizzontale di 20–30 metri di spessore, granodioritico (fascia alta del Badile, a q. 2300 circa), il cui collegamento con la massa eruttiva più ad est (Le Mandrie) è perfettamente visibile.

La morfologia di questa zona centrale, aspra e povera di vegetazione, contrasta fortemente con quella dianzi descritta, e ricorda il paesaggio dolomitico.

Morenico e preistoria. – Quanto già osservato nel 1949 in posizioni più meridionali vale anche per questa zona di più recente rilevamento; sopra i 1000 metri vi sono potenti depositi morenici freschi, incoerenti, ad elementi quasi esclusivamente granodioritico-tonalitici; in basso, verso il fiume Oglio, vi sono fascie residue di morenico più alterato e cementato. Sopra i 1800 metri (ad esempio al Buco dell'Orso) vi è qualche esempio di cordone morenico stadiale freschissimo e ben conservato. Frequenti le rocce lisciate e striate.

Lungo il comodo sentiero che da Paspardo si dirige verso nord, su alcuni dossi lisciati di arenaria permiana vennero scoperti, dal prof. Leonardi e da me, interessanti graffiti preistorici la cui illustrazione (6) arricchisce notevolmente la serie già conosciuta di manifestazioni artistiche degli antichi camuni.

(6) P. Leonardi, *Nuove serie di petroglifi della Val Camonica*. «Annali dell'Università di Ferrara», vol. VIII, Parte I, 1950.

Fisiologia. — *L'influenza del pH sul passaggio dell'acqua attraverso la cute di «Rana esculenta»*. Nota di Vittorio Capraro, Paolo Pennella e Mario Tiengo, presentata (*) dal Corrisp. R. Margaria.

Variando la temperatura delle cute di Rana il metabolismo e il passaggio d'acqua attraverso la cute aumentano secondo lo stesso andamento [1]; ciò ha fatto supporre che il passaggio di acqua sia un fenomeno collegato, almeno indirettamente, con l'entità del metabolismo della cute. Ma tale comportamento potrebbe anche essere dovuto al fatto che le variazioni di temperatura agiscono per tramite di una variazione della resistenza al passaggio dell'acqua; mentre la forza che determina questo passaggio rimane indipendente dal metabolismo essendo rappresentata solo dal gradiente osmotico.

Non è da prendere in considerazione l'ipotesi di una modificazione critica dello stato di aggregazione dei sistemi cellulari ad una determinata temperatura (Marlier [2]), trattandosi del nostro caso di un fenomeno ad andamento progressivo ed uniforme, che non presenta in alcun punto delle brusche deviazioni.

Ci pare invece più logico spiegare l'andamento del fenomeno osservato ammettendo l'esistenza di una modificazione progressiva dello stato di aggregazione dei costituenti proteici per effetto del progressivo aumento della temperatura. A tale proposito è stato reso noto precedentemente [3] che il pH del sangue di Rana non si modifica sensibilmente con la temperatura mentre è presumibile che il punto isoelettrico dei costituenti proteici si abbassi con l'innalzarsi della temperatura [4]; ciò dovrebbe avere come conseguenza un progressivo allontanamento delle proteine dalla condizione isoelettrica e cioè una minore loro coesione aumentando la temperatura. È presumibile che in tali condizioni le proteine offrano una minore resistenza al passaggio dell'acqua. Che si abbiano modificazioni di questo genere con la temperatura risulta anche dall'osservazione fatta di recente da Zeidman [5] che le cellule epiteliali della mucosa boccale dimostrano una adesività fra di loro che varia in ragione inversa con la temperatura.

Per saggiare questa ipotesi abbiamo determinato il passaggio di acqua nella Rana con la solita tecnica [1] alla temperatura di $25 \pm 1°$ C, trovandosi l'animale in un ambiente saturato con miscele di aria e CO_2 in varia concentrazione; a questo scopo si faceva gorgogliare nell'acqua dove era posta la Rana la miscela gassosa desiderata, dimodochè anche l'aria soprastante il livello liquido e che veniva introdotta dall'animale nei polmoni, aveva la stessa composizione in riferimento alla pressione parziale dei singoli gas, di quella che saturava l'acqua.

(*) Nella seduta dei 10 febbraio 1951.

(1) V. Capraro, «Rend. Acc. Naz. Lincei», ser. VIII, vol. IX, p. 193 (1950).

(2) G. Marlier, «C. R. Soc. de Biol.», *143*, 569 (1949).

(3) V. Capraro e M. Tiengo, «Boll. Soc. It. Biol. Sper.», *26*, 55 (1950).

(4) W. C. Stadie, J. H. Austin e H. W. Robinson, «J. of Biol. Chem.», *66*, 901 (1925); W. C. Stadie e K. A. Martin, «J. of Biol. Chem.», *60*, 191 (1924).

(5) I. Zeidman, «Science», *109*, 596 (1949).

La Rana resiste a concentrazioni di CO_2 fino ad un massimo del 15 %. Supponendo che ad equilibrio gassoso si abbiano nell'ambiente interno pressioni di CO_2 di poco discoste da quelle dell'ambiente esterno, conoscendo la curva di

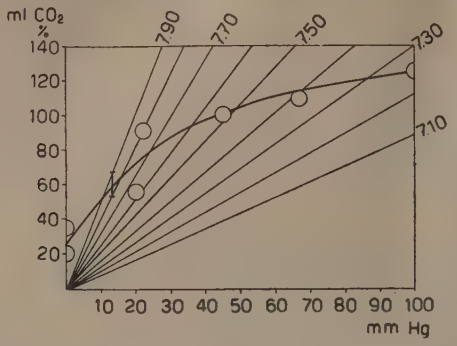


Fig. 1. – Curva di dissociazione per il CO_2 del sangue di Rana a 18° C. Le linee isoidriche sono state calcolate ammettendo: $pK'_1 = 6{,}25$; $\alpha_{CO_2} = 0{,}88$. Non è stato tenuto conto della presenza di $CO_3^{=}$–ioni.

dissociazione per il CO_2 del sangue di Rana, si può calcolare il pH approssimativo del sangue per ogni tensione di CO_2 ambiente. Ci siamo serviti allo scopo della curva di dissociazione per il CO_2 del sangue di Rana a 18° C precedentemente determinata [3] (fig. 1); l'errore dovuto alla diversità di temperatura non dovrebbe superare 0,05 pH.

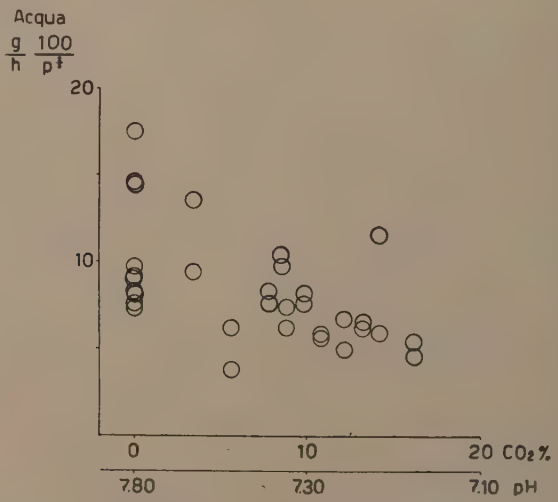


Fig. 2. – Passaggio dell'acqua nelle Rane immerse in acqua di fonte saturata con miscele di aria e CO_2 a varia concentrazione. Sulle ordinate sono posti i valori di passaggio di acqua in g per ora, divisi per il peso della Rana innalzato a 2/3, e moltiplicati per 100; le Rane avevano pesi varianti tra 10 e 20 g. Sulle ascisse sono posti i valori delle percentuali di CO_2 nell'aria che si faceva gorgogliare, accanto ai presumibili valori di pH del sangue nelle stesse condizioni.

I risultati sono riportati nella fig. 2. Da essi appare che l'acidificazione porta ad una lieve diminuzione del passaggio di acqua, relativamente piccola in confronto alle modificazioni di pH ottenute. In base a questi risultati, è difficile concepire che l'abbassamento di temperatura porti ad un innalzamento tale del punto isoelettrico da spiegare la diminuzione così cospicua del passaggio di acqua che si ha con il raffreddamento; difatti dai dati riportati nella letteratura appare che lo spostamento del punto isoelettrico delle proteine plasmatiche è di 0,2 pH per ogni 10° C di temperatura [4], mentre il Q_{10} per il passaggio dell'acqua è di 2–3.

È vero che l'abbassamento di temperatura dovrebbe avere come conseguenza un aumento dello stato di coesione delle proteine anche senza spostamento del

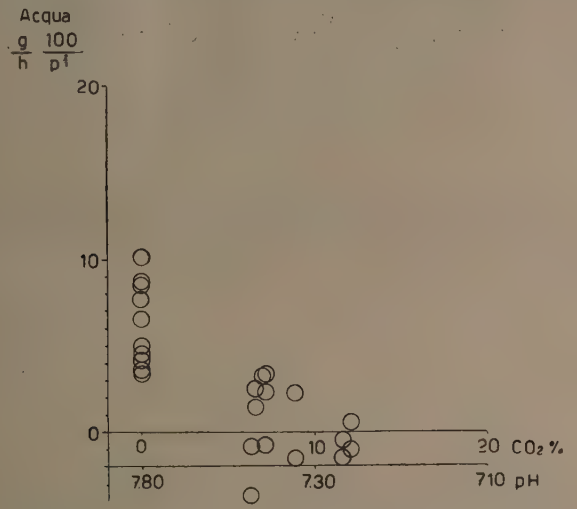


Fig. 3. – Passaggio dell'acqua nelle Rane immerse in sol. di NaCl al 6,5 ‰, saturata con miscele di aria e CO_2 a varia concentrazione. Ascisse e ordinate come nella fig. 2.

pH isoelettrico, per diminuzione della energia cinetica delle micelle proteiche e per diminuzione del loro grado di dissociazione (il coefficiente termico della dissociazione dovrebbe essere, però, relativamente piccolo), tuttavia l'effetto ottenuto con una variazione di pH così cospicua ci sembra troppo piccolo per essere portati ad ammettere che l'influenza della temperatura sul passaggio dell'acqua da un ambiente ipotonico sia solo effetto di una variazione dello stato fisico delle proteine.

È in accordo con questa supposizione anche il comportamento, di fronte alle variazioni di pH, del passaggio di acqua della Rana immersa in soluzione di NaCl isotonica; in questo caso il passaggio di acqua presuppone un dispendio di energia da parte dell'epitelio, ed è quindi certamente un fenomeno attivo. Ora, come appare dai risultati raccolti nella fig. 3, il passaggio di acqua in queste condizioni diminuisce con l'acidificazione molto più rapidamente che nel caso della Rana immersa in acqua di fonte, fino ad annullarsi con tensioni esterne di CO_2

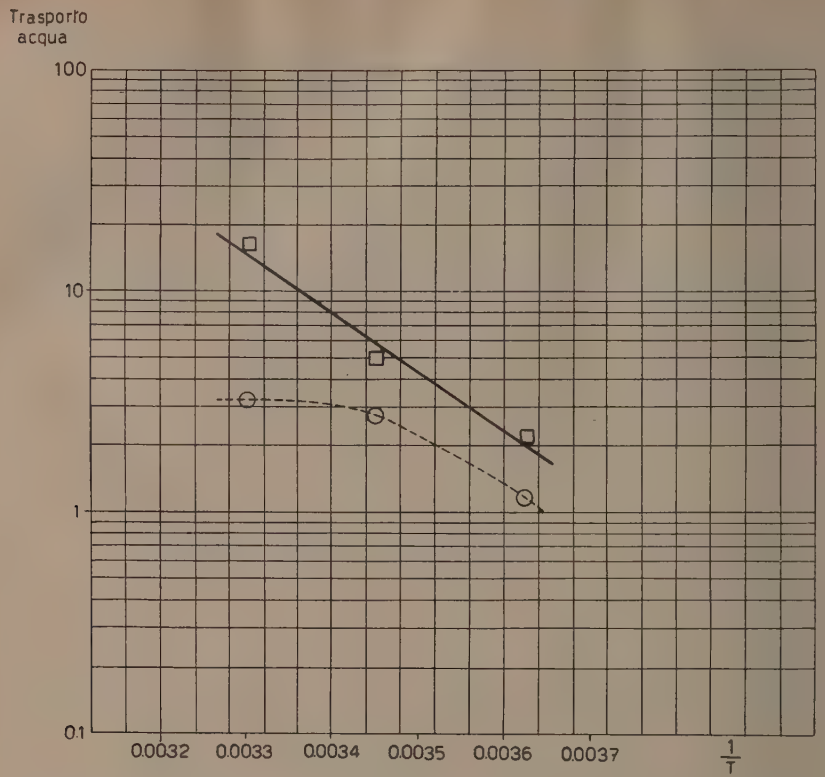


Fig. 4. – Passaggio dell'acqua nelle Rane immerse in acqua di fonte (□) risp. in sol. di NaCl al 6,5 °/₀₀ (⊙) in rapporto alla temperatura esterna. Sulle ordinate in scala logaritmica peso in g dell'acqua passata per ora diviso per il peso dell'animale innalzato a 2/3, e moltiplicato per 100; sulle ascisse il reciproco della temperatura assoluta. Ciascun punto rappresenta la media di 5-8 esperimenti. Gli esperimenti sono stati fatti contemporaneamente su una stessa popolazione di Rane.

di 70–80 mm. Hg. Invece il passaggio di acqua sotto l'influenza della temperatura, in Rane immerse in NaCl isotonico, mostra dei coefficienti termici eguali od inferiori a quelli presentati dal passaggio in acqua di fonte [6] (fig. 4).

Il fenomeno dell'influenza del pH sul passaggio dell'acqua tra due ambienti isotonici è riproducibile anche sulla cute isolata, modificando il pH del Ringer interno con $NaHCO_3$ (fig. 5).

Da quanto sopraesposto appare chiaro che se la variazione di pH agisse solo modificando la resistenza dei substrati al passaggio dell'acqua, non si comprenderebbe la differenza riscontrata tra la Rana immersa in acqua di fonte e la Rana immersa in NaCl isotonico. E d'altra parte se la temperatura agisse modificando

(6) La funzione logaritmica non è rappresentata qui da una retta perchè a temperature superiori ai 15–20° C si nota una inflessione; il passaggio di acqua non cresce più di molto con l'elevarsi ulteriore della temperatura.

il passaggio di acqua, nella Rana immersa in acqua di fonte, solo attraverso uno spostamento dello stato di aggregazione delle micelle proteiche non si comprenderebbe perchè i coefficienti termici siano eguali o superiori a quelli trovati per il passaggio di acqua nella Rana immersa in NaCl isotonico.

È verosimile, quindi, pensare che il pH agisca sul passaggio dell'acqua, anche in qualche altro modo, modificando dei fattori strettamente legati al metabolismo cellulare e che quindi si fanno sentire di più nel caso del passaggio di acqua nella Rana immersa in NaCl isotonico (che è un fenomeno esclusivamente dovuto alla attività delle cellule) che nel caso del passaggio di acqua nella Rana immersa

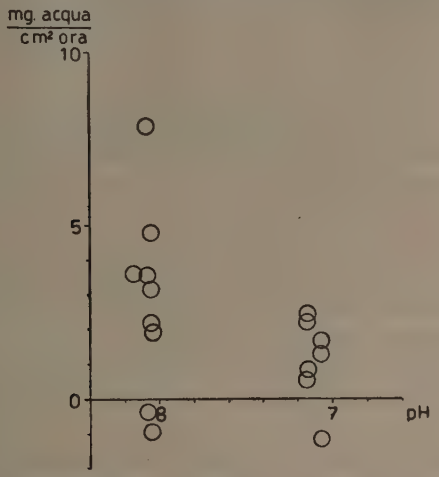


Fig. 5. – Passaggio di acqua nella cute del dorso di Rana, isolata e posta tra due ambienti costituiti da liquido di Ringer, alla temperatura di 28,3° C. Il pH del Ringer posto dal lato del sottocutaneo era modificato ad arte con l'aggiunta di quantità variabili di $NaHCO_3$. Il passaggio di acqua è stato determinato nel tempo di 2 ore, per pesata.

in acqua di fonte (che è un fenomeno presumibilmente anche dovuto al gradiente osmotico).

Uno di questi fattori potrebbe essere il potenziale elettrico della cute, di cui si sa che è direttamente connesso con il metabolismo cutaneo [7] che è influenzato dal pH [7] e dalla temperatura [8] nello stesso senso del passaggio dell'acqua.

Il fenomeno del passaggio dell'acqua dovrebbe essere considerato allora, almeno parzialmente, un fenomeno elettroosmotico [9].

Si può concludere quindi:

1° Il passaggio di acqua attraverso la cute di *Rana esculenta* integra, diminuisce acidificando l'ambiente interno della Rana, con un aumento della tensione di CO_2.

(7) H. H. Ussing, « Acta Physiol. Skand. », *17*, fasc. 1 (1949); idem, « Abstracts f. the XVIII Int. Physiol. Congr. », Copenhagen 1950.

(8) J. E. Lesser, « Pfluegers Arch. f. die ges. Physiol. », *116*, 124 (1907).

(9) R. Hoeber, « Physical Chemistry of Cells a. Tissues », Londra 1947.

2° La diminuzione dovuta alla acidificazione è molto maggiore se la Rana è immersa in soluzione salina isotonica che se è immersa in acqua di fonte.

3° Il fenomeno della diminuzione del passaggio di acqua con l'acidificazione è riproducibile sulla cute isolata.

4° I coefficienti termici del passaggio di acqua nella Rana immersa in NaCl isotonico sono eguali od inferiori (a seconda della temperatura) a quelli precedentemente riscontrati per il passaggio di acqua nella Rana immersa in acqua di fonte.

5° In base ai risultati ottenuti si fa l'ipotesi che il pH e la temperatura agiscano sul passaggio dell'acqua, almeno in parte, modificando il potenziale della cute; il fenomeno dovrebbe essere considerato in tal caso, almeno parzialmente, come un fenomeno elettroosmotico.

Biologia. — *Sulle modificazioni volumetriche dei nucleoli negli ovociti in accrescimento. Osservazioni preliminari su «Antedon rosacea»* (*). Nota di ENRICO VANNINI, presentata (**) dal Corrisp. U. D'ANCONA.

Numerose ricerche sono state dedicate, anche in tempi non recenti, allo studio del comportamento dei nucleoli durante fasi diverse dell'attività cellulare. Tali indagini hanno acquistato un rinnovato interesse nell'ultimo decennio, dopo che è stato dimostrato – soprattutto per merito di Caspersson e dei suoi collaboratori – che il nucleolo rappresenta il principale componente di un apparato endonucleare, deputato a regolare le sintesi proteiche che si svolgono entro il citoplasma. Così è stata chiarita la ragione per la quale si riscontra comunemente un notevole sviluppo della sostanza nucleolare nelle cellule dotate di intenso accrescimento, o accumulanti sostanze proteiche di riserva nel proprio citoplasma.

È ben noto lo schema interpretativo, prospettato dalla scuola del Caspersson e più volte confermato. Entro il nucleo cellulare una parte della cromatina, costituita essenzialmente da desossiribonucleoproteine, si dissolve progressivamente, generando sostanze composte di acidi ribonucleici e di proteine basiche del tipo degli istoni, che si accumulano a formare la massa principale dei nucleoli. I nucleoli, costituiti pertanto da ribonucleoproteine, poi continuano ad accrescersi per un processo di autosintesi, e producono a loro volta proteine ricche in gruppi basici, diffondentisi nel carioplasma in direzione della membrana nucleare. A livello di quest'ultima, le proteine emesse dai nucleoli nuovamente si accoppiano ad acidi ribonucleici, ed infine migrano in seno al citoplasma sotto forma di granulazioni assai minute. Si deve appunto a tali granuli ribonucleoproteici – che conferiscono al citoplasma un forte grado di basofilia – l'intensa sintesi di proteine citoplasmatiche, che si verifica durante l'accrescimento cellulare, e durante l'elaborazione di prodotti di accumulo o di sostanze di riserva.

Fra le cellule nelle quali è stata meglio dimostrata l'esistenza di questi intimi rapporti fra l'accumulo di ribonucleoproteine di provenienza nucleolare e la sintesi di proteine caratteristiche del citoplasma, possono essere annoverati gli ovociti in periodo di auxocitosi e di vitellogenesi. Oltre agli studi fondamentali di J. Brachet (1941, 1945), che riguardano soprattutto gli ovociti degli Anfibi, ricorderò, fra le

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia e Anatomia comparata dell'Università di Padova, con un sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 10 febbraio 1951.

altre, le recenti osservazioni di Serra e Queiroz-Lopes (1945) sugli ovociti di *Helix* e *Tachea*, di Bretschneider (1946) sull'ovogenesi in *Limnaea*, di Pasteels (1948) sulle uova di *Ascaris*, di Battaglia (1949) sugli ovociti ovarici e bidderiani di Anfibi, di Fautrez-Firlefyn (1949) sull'ovogenesi di *Artemia*, ed infine le numerose ricerche di Urbani (1949, 1950) che, in via comparativa su vari gruppi di animali, ha studiato il metabolismo degli acidi nucleici in ovociti provvisti di fascia vitellogena o di corpo vitellino del Balbiani (*Antedon, Pholcus, Tegenaria, Schizophyllum, Cavia*), oppure della così detta « massa del Giardina » (*Dytiscus*).

Recentemente, ho anch'io intrapreso questo genere d'indagini, con un programma che ho parzialmente delineato in una Nota precedente [1]; e ultimamente, nel corso di osservazioni iniziate sui Teleostei e sugli Anfibi, ho avuto modo di constatare taluni fatti, relativi alle variazioni della quantità di sostanza nucleolare durante l'accrescimento e la maturazione degli ovociti di I ordine, che mi sono sembrati degni di essere studiati con dettaglio.

Generalmente gli ovociti dei Teleostei e degli Anfibi sono però provvisti di moltissimi nucleoli; perciò, il calcolo della quantità di sostanza nucleolare mostra una certa difficoltà e può nascere il dubbio che le cause di errore siano talvolta piuttosto numerose. Per tal ragione, prima di rendere noti i risultati raggiunti nei suddetti Vertebrati, ho ritenuto opportuno controllare la loro validità su un materiale più adatto, rappresentato da animali forniti di ovociti con un solo nucleolo, del quale non appare difficile calcolare il volume con esattezza sufficiente.

La mia scelta è caduta sugli ovociti del Crinoide *Antedon rosacea*, non solamente perchè essi presentano un unico nucleolo assai voluminoso, ma anche perchè sono già stati oggetto di uno studio molto approfondito, riguardante il comportamento delle nucleoproteine. Così ho potuto disporre di un materiale ormai ben conosciuto, dai vari punti di vista che potevano interessare le presenti osservazioni.

Fino dal 1911 le osservazioni del Cotronei [2] sull'*Antedon rosacea* - genialmente precorritrici delle odierne interpretazioni citochimiche – hanno infatti dimostrato che il citoplasma dei più piccoli ovociti diviene inizialmente molto basofilo e che ben presto, con il procedere dell'accrescimento ovocitario, la sostanza basofila del citoplasma si concentra per la massima parte in una « fascia vitellogena », originantesi a contatto del nucleo che ne viene parzialmente circondato. In ovociti un po' più grandi la fascia vitellogena si allontana progressivamente dal nucleo, spostandosi verso la periferia della cellula, e comincia a disgregarsi. La scomparsa della fascia vitellogena coincide con la formazione dei primi globuli di tuorlo; e l'ulteriore progresso della vitellogenesi, negli ovociti in continuo accrescimento, si accompagna ad una forte diminuzione della basofilia citoplasmatica. Il nucleolo, nettamente basofilo all'inizio dell'auxocitosi, diviene in parte acidofilo nelle fasi successive, per un processo di vacuolizzazione parziale che in esso si verifica.

Il Cotronei potè dedurre dalle proprie osservazioni che i materiali basofili del citoplasma negli ovociti dell'*Antedon*, ed in particolare quelli della fascia vitellogena, sono sostanze necessarie per la genesi del tuorlo, originatesi nel nucleolo e diffuse da questo attraverso la membrana nucleare. Le recentissime ricerche dell'Urbani [3] hanno portato una completa conferma a queste conclusioni

(1) E. VANNINI, *Ovogenesi ed acidi nucleici.* (In corso di pubblicazione negli « Atti del XII Convegno della Società Italiana di Anatomia »).

(2) G. COTRONEI, *La fascia vitellogena nell'oocite in crescita di « Antedon rosacea » Lamarck.* « Arch. Zool. Ital. », vol. V, p. 41 (1911).

(3) E. URBANI, *Ricerche comparative sui nuclei vitellini* (Memorie I e II). « Rivista di Biologia », vol. XLI, p. 63 e p. 331 (1949).

e, con i metodi citochimici moderni, hanno mostrato che le sostanze basofile in oggetto constano di acidi ribonucleici associati a proteine.

Con le presenti ricerche mi sono dunque proposto di studiare, nell'*Antedon rosacea*, le variazioni del volume del nucleolo, correlandole con quelle degli altri componenti cellulari, durante tutto il periodo di accrescimento ovocitario.

Il materiale di cui ho potuto disporre consta di pinnule di femmine mature, ciascuna delle quali conteneva un completo assortimento di ovociti di dimensione diversa, dall'inizio dell'auxocitosi sino alla fine della vitellogenesi. Tali pinnule erano state fissate nei liquidi di Carnoy, Helly o Zenker acetico (4). Per ridurre al minimo l'eventuale intervento di una variabilità indi-

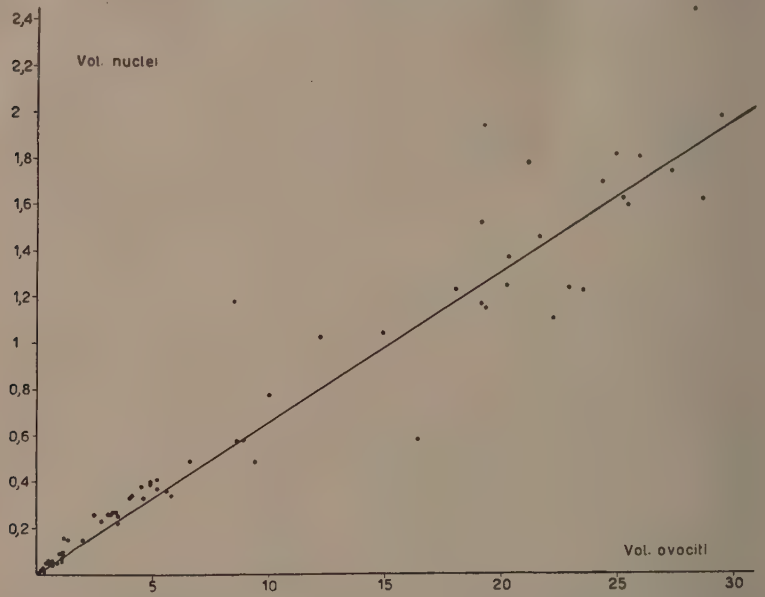


Fig. 1. – Variazioni del volume del nucleo, in funzione del volume ovocitario. Sia sull'asse delle x che su quello delle y, scala di $1 = 10^5\ \mu^3$. La linea teorica è stata calcolata con l'equazione $y = 1/15\ x$.

viduale, tutte quante le misurazioni volumetriche sono state effettuate sugli ovociti di tre sole pinnule contigue di uno stesso esemplare, che erano state fissate in liquido di Helly.

Ogni pinnula, inclusa in paraffina, è stata sezionata serialmente in fette di 7,5 μ, che sono state colorate con la miscela verde di metile–pironina, che tinge in rosso il nucleolo, il citoplasma basofilo e la fascia vitellogena. Ogni ovocita – compreso in un numero di fette tanto più alto quanto maggiori erano le sue dimensioni – è stato completamente ricostruito proiettandone le varie superficie di sezione con la camera lucida all'ingrandimento di 500 volte, e disegnando accuratamente i contorni del nucleolo, del nucleo e del corpo cellulare.

Data la forma regolarmente sferoidale od ovoidale delle cellule e dei loro suddetti componenti, dai disegni ottenuti ho potuto facilmente ricavare il volume in μ^3 di ciascun ovocita, del suo nucleo e del suo nucleolo. A tale scopo, ho utilizzato la nota formula $4/3\ \pi a \cdot b \cdot c$, in cui le lettere a, b, c rappresentano, rispettivamente, le lunghezze in μ dei raggi maggiore e minore delle superficie di sezione, e del valore medio fra di essi. Poichè per ogni ovocita disponevo di

(4) Una parte di questo materiale mi è stata cortesemente fornita dal dott. E. Urbani, dell'Istituto di Anatomia comparata dell'Università di Roma, che sentitamente ringrazio.

più disegni, corrispondenti a vari livelli di sezione, ho calcolato i volumi del nucleolo, del nucleo e di tutta la cellula tenendo conto, volta per volta, di quel disegno in cui ciascuna delle suddette regioni presentava la più estesa superficie.

Tali calcoli sono stati effettuati su 80 ovociti, di volume compreso fra 6.319 e 2.942.946 μ^3. In questa breve Nota mi limito a commentare i principali diagrammi, che ho potuto costruire elaborando tali dati.

Anzitutto, sarà necessario valutare secondo quale legge si verifichi l'accrescimento nucleare, in funzione dell'accrescimento di tutto l'ovocita. Come appare dalla fig. 1 – in cui l'asse delle ascisse corrisponde al volume degli ovociti e quello delle ordinate al volume dei nuclei –, durante l'accrescimento ovocitario i volumi nucleari tendono a distribuirsi secondo una linea diagonale, passante per l'origine delle coordinate cartesiane. Ciò dimostra un rapporto di diretta proporzionalità fra i due valori considerati, esprimibile con una equazione della forma $y = kx$.

Con buona approssimazione, l'andamento teorico dell'accrescimento nucleare può essere rappresentato dalla retta che ho tracciato nella figura, e che è stata costruita attribuendo il valore di 1/15 alla costante k dell'equazione sopra indicata. Si noti tuttavia che, negli ovociti più piccoli, i volumi nucleari generalmente sono collocati al disopra di tale retta. Ne possiamo dedurre che, all'inizio dell'accrescimento, i volumi nucleari oltrepassano quasi sempre 1/15 del volume ovocitario complessivo, mentre più tardi essi tendono a mantenere tale valore relativo.

Un simile comportamento, di diretta proporzionalità lineare, si nota pure considerando le variazioni del volume nucleare in funzione dell'accrescimento del solo citoplasma (differenza fra il volume complessivo dell'ovocita e il volume nucleare), oppure considerando le variazioni del volume citoplasmatico in funzione dell'accrescimento volumetrico dell'intero ovocita.

Passiamo ora ad analizzare come si svolgano le modificazioni di volume del nucleolo, in funzione del progressivo accrescimento di tutto l'ovocita. La fig. 2, costruita a tale scopo, può essere agevolmente confrontata con la figura precedente, perchè ne diversifica soltanto per il fatto che sull'asse delle ordinate sono disposti i volumi del nucleolo, anzichè quelli del nucleo.

Come appare chiaramente dal confronto delle due figure, i volumi dei nucleoli si comportano in maniera nettamente diversa dai volumi nucleari, perchè non tendono a distribuirsi secondo una linea retta, ma presentano un primo periodo di ingrandimento molto intenso, seguìto poi da una fase di più lento accrescimento con probabile tendenza terminale ad una lieve diminuzione di volume.

Calcolando, per singole classi di grandezza ovocitaria, i valori medi del volume dei nucleoli, ho ottenuto una curva empirica delle variazioni di quest'ultimo, rappresentata nella figura con una linea tratteggiata. L'andamento del primo tratto di questa curva empirica ricorda quello del ramo di una parabola, che abbia per asse l'asse delle x e per tangente nel vertice l'asse delle y; la curva a tratto continuo disegnata nella figura (curva teorica) è, appunto, tale ramo di parabola, costruito secondo l'equazione $y^2 = mx$, in cui m è una quantità costante che ho ricavato dai dati empirici dei quali disponevo.

La buona corrispondenza fra il primo tratto delle due curve, empirica e teorica, permette quindi di stabilire che, in una prima fase dell'accrescimento ovocitario, il volume dei nucleoli cresce secondo un ramo di parabola. Nell'ulteriore fase

dell'auxocitosi, l'accrescimento dei nucleoli procede invece con ritmo assai più rallentato, onde il loro volume va discostandosi sempre più sensibilmente dall'andamento parabolico iniziale.

Un andamento simile viene pure riscontrato, analizzando le variazioni del volume del nucleolo in funzione dell'accrescimento nucleare, od in funzione dell'accrescimento della massa citoplasmatica. Ciò, del resto, è pienamente com-

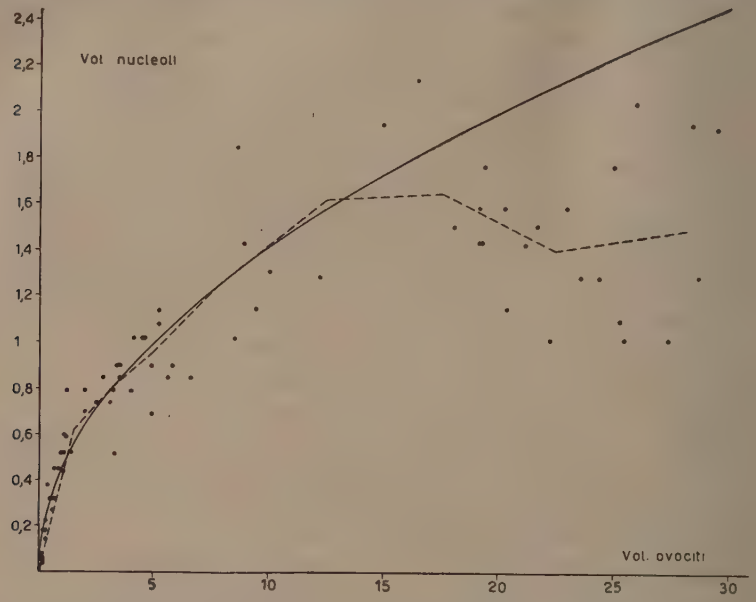


Fig. 2. – Variazioni del volume del nucleolo, in funzione del volume ovocitario. Sull'asse delle x, scala di $1 = 10^5\ \mu^3$; sull'asse delle y, scala di $1 = 10^3\ \mu^3$. A tratteggio la curva empirica ed a tratto continuo la parabola teorica, che, nel suo primo tratto, corrisponde alla curva empirica.

prensibile, dati i rapporti di diretta proporzionalità che sono stati constatati fra il volume nucleare e quello del citoplasma, o di tutto l'ovocita.

Da quanto è stato finora riferito, appare chiaro che *il nucleolo ha un tipo di accrescimento volumetrico suo proprio, ben diverso da quello del nucleo che l'accoglie.* Un fatto simile era già stato descritto da Bretschneider e Hirsch, nel 1937, per gli ovociti di un Lamellibranco(5); questi Autori ne avevano dedotto che il nucleolo è un « sistema parziale », almeno in parte funzionalmente indipendente dal nucleo considerato nel suo insieme.

Per completare le presenti osservazioni, e per tentare di giungere ad un'interpretazione fisiologica, mi è sembrato opportuno ricorrere ad un altro criterio

(5) L. H. Bretschneider e G. C. Hirsch, *Kernwachstum und Nukleolengrösse bei den Eiern von « Lima hians » (Lamell.). Ein Beitrag zur Frage der partiellen Systeme.* « Cytologia », vol. VIII, p. 128 (1937).

di valutazione volumetrica, ed inoltre cercare di confrontare il contenuto in ribonucleoproteine, nel citoplasma degli ovociti delle diverse dimensioni.

Il primo scopo è stato raggiunto calcolando, sugli 80 ovociti analizzati nelle figure precendenti, il *rapporto nucleo–plasmatico* di R. Hertwig, ottenuto dividendo il volume del nucleo per quello del citoplasma, ed inoltre un *rapporto nucleolo–nucleare* ed un *rapporto nucleolo–plasmatico,* che sono stati rispettivamente ricavati dividendo il volume del nucleolo per quello della porzione rimanente del nucleo, o dividendolo per il volume del citoplasma. Ho potuto così analizzare come vadano modificandosi i valori di tali rapporti, durante tutto l'accrescimento ovocitario.

Per raggiungere il secondo scopo, ho sottoposto le sezioni di alcune pinnule di *Antedon* ad una serie di colorazioni con la miscela verde di metile–pironina disciolta in liquidi tamponati a pH differente, secondo un metodo recentemente proposto, che permette di confrontare in maniera sufficientemente approssimata le differenti concentrazioni di ribonucleoproteine [6].

Questo metodo si basa sul fatto che – nei componenti cellulari provvisti di ribonucleoproteine – l'affinità verso la pironina diminuisce, sostituita da una crescente affinità per il verde di metile, mano a mano che si adoperano miscele coloranti, tamponate a un pH più alto; e che la zona di graduale viraggio dall'esclusiva colorabilità con pironina all'esclusiva colorabilità con verde di metile è situata a pH tanto più elevati, quanto maggiore è la concentrazione delle ribonucleoproteine. Ne consegue che il livello dei pH di viraggio, riconoscibile dalla colorazione violacea assunta dalle strutture cellulari, costituisce un indice dell'abbondanza in ribonucleoproteine.

Per quanto si riferisce ai valori del rapporto nucleo–plasmatico, basterà dire che essi mantengono un livello assai costante durante tutto il periodo dell'accrescimento ovocitario, dopo una lieve diminuzione che si verifica nella fase più iniziale.

Diversamente si comportano invece in valori del rapporto nucleolo–nucleare e del rapporto nucleolo–plasmatico. Qui sarà sufficiente analizzare le variazioni di quest'ultimo (più interessante ai fini del presente studio), tenendo conto del fatto che anche il rapporto nucleolo–nucleare mostra le stesse caratteristiche.

Come si vede chiaramente dalla fig. 3 – in cui sull'asse delle ascisse sono disposti, come al solito, i volumi ovocitari –, durante tutto il periodo di accrescimento degli ovociti si verifica un abbassamento progressivo del rapporto nucleolo–plasmatico, i cui valori corrispondono alle ordinate. Più in dettaglio, ad una rapida diminuzione iniziale dei valori del rapporto (fino a ovociti di circa 550.000 μ^3) segue un periodo di più lento abbassamento, suddivisibile a sua volta in due fasi, una estendentesi fino a ovociti di circa 1.700.000 μ^3 e l'altra fino alle massime dimensioni ovocitarie.

In altri termini, la grandezza relativa del nucleolo decresce con il procedere dell'auxocitosi.

Mi è sembrato opportuno confrontare questi risultati con quelli della ricerca delle concentrazioni delle ribonucleoproteine nel citoplasma degli ovociti di grandezza differente. Tale ricerca, effettuata con il metodo descritto, ha dimostrato

(6) F. M. GEROLA e E. VANNINI, *La colorazione con verde di metile–pironina in mezzo tamponato nella ricerca degli acidi ribonucleici.* «Boll. Soc. Ital. Biol. Sperim.», vol. XXV, p. 644 (1949).

un graduale rarefarsi delle sostanze in oggetto negli ovociti in progressivo accrescimento. Questo processo viene indicato schematicamente, nella fig. 3, dall'andamento di una fascia tratteggiata che rappresenta i valori di pH al livello dei quali il citoplasma dei singoli ovociti prende una tinta violacea, dovuta ad una affinità contemporanea per i due coloranti verde di metile e pironina. A livelli più bassi della fascia tratteggiata corrisponde, cioè, una minore concentrazione di ribonucleoproteine, nel citoplasma degli ovociti.

Quello che più mi interessa far notare, è *l'evidente corrispondenza fra il progressivo impoverimento del contenuto citoplasmatico in ribonucleoproteine e il parallelo abbassamento del rapporto nucleolo–plasmatico, dall'inizio alla fine dell'accrescimento ovocitario.*

Questo mi sembra il risultato principale delle presenti osservazioni, perchè ci induce a considerare il valore del suddetto rapporto volumetrico come un indice

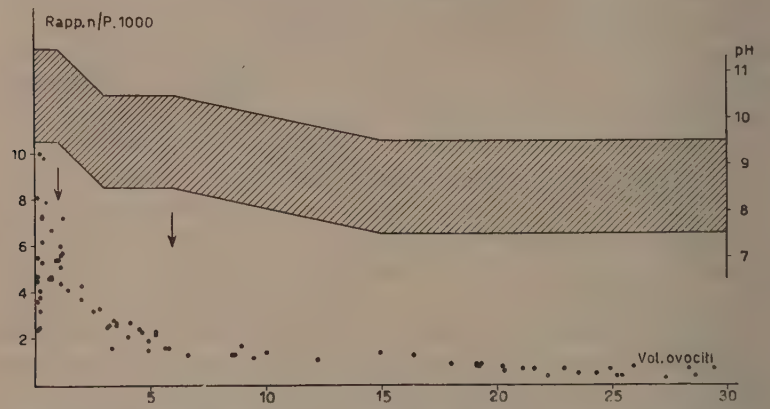


Fig. 3. – Variazioni del rapporto nucleolo–plasmatico, in funzione del volume ovocitario. Sull'asse delle x, scala di $1 = 10^5\ \mu^3$; sull'asse delle y, i valori del rapporto nucleo-plasmatico moltiplicati per mille. La fascia tratteggiata, riferita ai gradi di pH segnati a destra, indica le concentrazioni in ribonucleoproteine citoplasmatiche. Le due frecce verticali delimitano la fase di esistenza di una fascia vitellogena.

dell'intensità dello scambio di ribonucleoproteine fra nucleolo e citoplasma. A rapporti nucleolo–plasmatici elevati, come quelli delle prime fasi dell'accrescimento ovocitario, corrisponde cioè una maggiore concentrazione delle ribonucleoproteine in seno al citoplasma, e pertanto la potenzialità di un rigoglioso accrescimento e di una intensa elaborazione futura di sostanze proteiche di riserva. A rapporti nucleolo–plasmatici più bassi, corrisponde invece un impoverimento progressivo del citoplasma in ribonucleoproteine, con passaggio dalla fase di accumulo di queste alla fase del loro consumo per la genesi del tuorlo.

È necessario considerare, infatti, che la vitellogenesi si verifica, in *Antedon*, nella fase dei più bassi valori del volume nucleolare relativo; tale fase è successiva al periodo di presenza della fascia vitellogena, che nella figura è contrassegnato da due frecce verticali.

Ulteriori ricerche saranno dirette a constatare fino a qual punto i presenti risultati siano validi per gli altri tipi di ovociti, o in generale per altre categorie di cellule in intenso accrescimento.

Biologia. — *Ulteriori ricerche sulla natura degli spermatidi degenerativi in «Cottus gobio»* (*). Nota di CECILIA PILATI, presentata (**) dal Corrisp. U. D'ANCONA.

In una serie di ricerche iniziate nel 1945, notai nella spermatogenesi del Teleosteo *Cottus gobio* la comparsa di spermatidi degenerativi (1), che – per la forma caratteristica – denominai anche « formazioni globulari » e di cui cercai di riconoscere la natura (2), senza peraltro raggiungere risultati conclusivi.

Continuando tali ricerche, tenni presenti i risultati del Pollister e del Lavin (3) sugli spermi apireni dei Molluschi, nei quali questi Autori riscontrarono, parallelamente alla degenerazione del nucleo e quindi alla scomparsa dell'acido desossiribonucleico, un aumento d'acido ribonucleico nel citoplasma.

Volli, perciò, vedere se qualche fenomeno del genere avveniva anche nel caso del *Cottus gobio*; se, cioè, la diminuzione e la scomparsa dalle formazioni globulari dell'acido desossiribonucleico, che già avevo dimostrato con il metodo di Feulgen (Pilati, 1948), fosse accompagnata da un maggior contenuto in acido ribonucleico. Adottai quindi, su materiale fissato in Helly, il metodo di colorazione consigliato dal Brachet: doppia colorazione con verde di metile e pironina, che, se non è da sola strettamente specifica, permette però di mettere in evidenza gli acidi ribonucleici, quando venga associata all'uso della ribonucleasi (Brachet (4)).

Per evitare che il pH ambiente influisse sulla colorabilità degli elementi allo studio, operai secondo Gerola–Vannini (5) in mezzo tamponato, a vari pH, con i tamponi di Soerensen e di Mc Ilvain, e potei ottenere una bella colorazione di contrasto a pH 6.

Le formazioni globulari si colorarono in rosso con la pironina, ma potei anche rilevare che tale colorazione permaneva dopo il trattamento con ribonucleasi. Potei, così, escludere la presenza d'acido ribonucleico e, di conseguenza, concludere che la degenerazione osservata degli spermatidi in spermioistogenesi non è da attribuirsi ad una trasformazione dell'acido desossiribonucleico in acido ribonucleico.

(*) Ricerche eseguite nell'Istituto di Zoologia e Anatomia comparata dell'Università di Padova, sotto la guida del prof. E. Vannini.

(**) Nella seduta del 10 febbraio 1951.

(1) C. PILATI, *La gametogenesi del Cottus gobio.* « Ist. Ven. Sc. Lett. Arti », vol. CV, p. 43 (1947).

(2) C. PILATI, *Spermatidi degenerativi in Cottus gobio.* « Boll. Zool. », vol. XIV, p. 105 (1948).

(3) A. W. POLLISTER e G. I. LAVIN, *Possible conversion of chromonucleic acid into plasmonucleic acid during atypical spermiogenesis of Viviparus malleatus Reeve.* « Anat. Rec. », vol. LXXXIX, p. 557 (abstract) (1944).

(4) J. BRACHET, *La détection histochimique des acides pentosenucléiques.* « C. R. Soc. Biol. », vol. CXXXIII, p. 88 (1940); *Embryologie chimique,* Masson & C., Paris–Liège (1947).

(5) F. M. GEROLA e E. VANNINI, *La colorazione con verde di metile–pironina in mezzo tamponato nella ricerca degli acidi ribonucleici.* « Boll. Soc. Ital. Biol. Sper. », vol. XXV, p. 644 (1949).

Per accertarmi ulteriormente sull'effettiva assenza di acidi nucleici dalle formazioni allo studio, effettuai su di esse anche la ricerca dell'acido ortofosforico che, come è noto, un'idrolisi opportunamente condotta libera da tutti gli acidi nucleici. Fissai il materiale nei due modi consigliati da J. A. Serra ed A. Queiroz Lopes [6], ottenendo risultati paralleli; ed, eseguita un'idrolisi lenta, proseguii la colorazione con il metodo Angeli [7], che ha dato altre volte buoni risultati e che si presenta più semplice del metodo di Serra e Queiroz Lopes. Dalla decolorazione ottenuta, rilevai che non si era formato fosfomolibdato ammonico e quindi che l'idrolisi non aveva liberato acido ortofosforico da nucleoprotidi.

Questa reazione venne quindi a confermare i risultati raggiunti con i metodi di Feulgen e di Brachet, che escludevano per gli spermatidi degenerativi la presenza di acidi desossiribo– e ribonucleici.

Volli però, prima di escludere in maniera assoluta la natura nucleoprotidica, cercar di caratterizzare le proteine che, negli spermatidi degenerativi, avrebbero eventualmente dovuto coniugarsi con gli acidi nucleici, funzionanti da gruppo prostetico. Su materiale fissato in alcool 95° – per evitare con altri fissativi possibili spostamenti del pH – eseguii parallelamente la ricerca delle proteine acide e delle proteine basiche secondo i metodi consigliati dal Serra [8]: mentre per le prime ottenni una reazione netta, per le seconde ebbi una reazione debolissima, quasi nulla, che dimostrò come le proteine acide sieno presenti in misura di gran lunga superiore a quelle basiche. Questa preponderanza delle proteine acide sulle basiche venne a spiegare la forte affinità delle formazioni globulari per tutti i coloranti basici usati nel corso delle ricerche.

Per ulteriore controllo determinai il punto isoelettrico di tali proteine, servendomi di coloranti acidi e di coloranti basici ad una serie di pH diversi (Lavine [9]): ottenni reazione positiva per pH 6–6,5 e quindi conferma dei risultati precedenti.

Mi sembra che quanto sopra esposto mi autorizzi ad escludere la presenza di nucleoprotidi negli spermatidi degenerativi di *Cottus gobio*:

1° perchè la presenza d'acido desossiribonucleico viene esclusa dalla negatività della reazione di Feulgen;

2° perchè la presenza d'acido ribonucleico viene esclusa dall'inefficacia della ribonucleasi secondo il metodo di Brachet;

3° perchè la presenza d'acido ortofosforico liberato per idrolisi da un acido nucleico viene esclusa dalla negatività della colorazione di Angeli;

(6) J. A. Serra e A. Queiroz Lopes, *Une méthode pour la démonstration histochimique du phosphore des acides nucléiques.* « Portugaliae Acta Biol. », vol. I, p. 111 (1949).

(7) B. Angeli, *La ricerca microchimica del fosforo nelle cellule vegetali.* « Riv. di Biol. », vol. X, p. 702 (1928); L. Lison, *Histochimie animale. Méthodes et problèmes*, Gauthier-Villars, Paris (1936).

(8) J. A. Serra, *Histochemical tests for proteins and aminoacids; the characterization of basic proteins.* « Stain Technology », vol. XXI, p. 5 (1947); D. Glick, *Techniques of histo- and cytochemistry.* Interscience Publishers, New York–London (1949).

(9) N. D. Lavine, *The determination of apparent isoelectric points of cell structures by staining at controlled reaction.* « Stain Technology », vol. XV, p. 91 (1940).

4° perchè le proteine reagiscono acide e dimostrano punto isoelettrico a pH 6-6,5, mentre è notorio che nei nucleoprotidi il componente proteico ha reazione nettamente basica.

Si può pertanto concludere che negli spermatidi degenerativi di *Cottus gobio* non si verifica una trasformazione dell'acido desossiribonucleico in acido ribonucleico, ma che la scomparsa del primo s'accompagna ad un accumulo di proteine di tipo prevalentemente acido.

Rimane sempre aperto il problema del significato funzionale delle formazioni globulari, specialmente per quanto riguarda una loro importanza, quali costituenti del liquido spermatico, nella fisiologia della fecondazione.

Biologia. — *Circolazione dell'aureomicina nell'organismo con particolare riguardo ai suoi rapporti con la linfa* (*). Nota di RENATO SANTI e MARIO SEREMBE, presentata (**) dal Socio E. MENEGHETTI.

Precedenti ricerche hanno dimostrato che l'aureomicina permane in quantità titolabile nella maggior parte degli organi ancora molte ore dopo che la sua presenza non è più dimostrabile nel sangue (1). È evidente che il farmaco, accumulato da questi organi, viene ceduto a poco a poco al sangue e viene eliminato lentamente attraverso vari emuntori (reni, fegato (bile), intestino). Non si conosce però come avvenga il suo passaggio dal sangue al liquido interstiziale ed eventualmente da questo alle cellule e successivamente come si muova in senso opposto dai tessuti al sangue.

Si è voluto raccogliere su questo argomento qualche dato sperimentale, anche se di natura indiretta, determinando la curva di concentrazione dell'aureomicina nella linfa del dotto toracico e in quella del tronco cervicale di destra. Per confronto, negli stessi momenti, è stata titolata l'aureomicina nel sangue, nella bile, nelle orine e nei principali organi.

METODI. - La ricerca è stata eseguita su cani di 10-15 Kg, anestetizzati con morfina (g. 0,01 per Kg), iniettata nel sottocutaneo e cloralosio (g. 0,1 per Kg), iniettato nelle vene.

La linfa è stata prelevata dal dotto toracico, incannulato in vicinanza del suo sbocco e così pure si è fatto per il linfatico cervicale. È stata prelevata dal coledoco tutta la bile prodotta, legando contemporaneamente il cistico. L'orina è stata raccolta nelle femmine con catetere a permanenza e nei maschi mediante fistola vescicale. Per ottenere il sangue è stata punta la vena giugulare esterna destra. Gli organi sono stati omogeneizzati con apposito apparecchio ed estratti con soluzione fisiologica.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Farmacologia dell'Università di Padova, Centro di studio per la Chemioterapia.

(**) Nella seduta del 10 febbraio 1951.

(1) R. SANTI e M. SEREMBE, « Arch. int. pharmacodyn. », *81*, 493 (1950).

Il cloridrato di aureomicina, sciolto in soluzione fisiologica, è stato introdotto, a seconda dei casi, per via endovenosa (vena safena), per via orale (mediante sondaggio gastrico), per via duodenale (mediante iniezione diretta, previa laparatomia) e per via intramuscolare. La titolazione biologica è stata fatta in piastra sullo stafilococco aureo.

Le prove di ultrafiltrazione sono state fatte con sacchetti di cellofan, provocando all'esterno di essi una depressione di 20 cm di Hg. I pori della membrana filtrante sono di dimensioni tali da non lasciar passare l'emoglobina.

Risultati. – Usando tutte e quattro le vie d'introduzione citate, l'aureomicina si ritrova nella linfa, proveniente dalla testa, fugacemente e solo dopo alcune ore dalla somministrazione, mentre compare nella linfa del dotto toracico in modo pronto, in misura elevata e per un tempo prolungato.

Tabella I.

Concentrazione dell'aureomicina nel fegato e nei liquidi organici del cane

	Via e dose	γ per grammo di organo o per cc di liquido dopo						
		30 min.	1 h	3 h	6 h	9 h	12 h	24 h
Fegato	Endovenosa mg. 5/Kg.	—	—	2,5	0,4	0,2	0,1	0
Bile	Endovenosa mg. 5/Kg.	—	4	2	1	1	0,5	0
Linfa del dotto t.	Endovenosa mg. 5/Kg.	9	2	1,2	0,4	0,2	0,1	0
Sangue	Endovenosa mg. 5/Kg.	0,6	0,4	0,2	tracce	0	0	0
Fegato	Endomuscolare mg. 20/Kg.	—	—	0,8	1,6	—	0,6	0,3
Bile	Endomuscolare mg. 20/Kg.	—	—	3,5	2,2	2	1,8	0,6
Linfa del dotto t.	Endomuscolare mg. 20/Kg.	7	4	5	3	1,5	0,4	0,2
Sangue	Endomuscolare mg. 20/Kg.	0,2	0,5	1	0,8	0,3	tracce	0
Linfa del dotto t.	Duodenale mg. 20/Kg.	tracce	0,4	0,9	0,6	0,4	0,35	0
Sangue	Duodenale mg. 20/Kg.	0,1	0,2	0,4	0,4	0,1	0,1	0
Linfa del dotto t.	Gastrica mg. 30/Kg.	0	0	tracce	1,5	0,9	0,35	0
Sangue	Gastrica mg. 30/Kg.	0	0	tracce	0,5	0,5	0,25	0

Analizzando più minutamente i fenomeni riguardanti quest'ultima via linfatica, si può dire che l'aureomicina passa nella linfa 10–15 minuti dopo che è già comparsa nel sangue e più precisamente pochi minuti dopo l'iniezione endovenosa, 30–60 minuti dopo la somministrazione per via duodenale e per via intramuscolare e 180 minuti dopo la somministrazione per via orale. Qualunque sia la via d'introduzione, l'aureomicina raggiunge rapidamente nella linfa del dotto toracico concentrazioni più elevate che nel sangue, mantenendole poi tali per tutta la durata dell'esperimento e alla fine si può svelare solo nella linfa.

La diversa entità del passaggio dell'aureomicina nella linfa a seconda della sua provenienza (poca nel tronco cervicale e molta nel dotto toracico) denota che questo fenomeno dipende prevalentemente da proprietà intrinseche di alcuni organi e, in particolare, richiama l'attenzione sul fegato e sull'intestino, dove si produce la maggior parte della linfa del dotto toracico, che, come è noto, è di composizione mista, perchè, oltre che dagli organi addominali, prende origine anche dal lume intestinale.

Si deve quindi sottoporre al vaglio sperimentale l'ipotesi che il discreto circolo entero–epatico di eliminazione e di riassorbimento, a cui l'aureomicina viene a sottostare nella misura dell' 1–5% della dose somministrata [2], favorisca il passaggio di questo antibiotico nei vasi linfatici all'altezza dell'intestino oppure del fegato. Per chiarire quest'ultimo punto, è stata asportata con una cannula introdotta nel coledoco tutta la bile, e con essa tutta l'aureomicina eliminata dal fegato, in modo da interrompere definitivamente tale circolo. In queste condizioni sperimentali le concentrazioni di aureomicina nella linfa del dotto toracico non vengono a diminuire sensibilmente, come avrebbe dovuto verificarsi se l'assorbimento del farmaco da parte dei linfatici si fosse prodotto prevalentemente nell'intestino.

A sostegno di questa deduzione sta anche il fatto che, quando si introduce direttamente l'aureomicina nello stomaco o nel duodeno, il suo passaggio nella linfa non è né celere né cospicuo.

Resta ora da stabilire come avvengano nel fegato gli scambi dell'aureomicina tra sangue, liquido interstiziale, cellule e linfa, perchè, pur essendo molto significativo il fatto che questo organo possiede un contenuto di aureomicina elevato e simile a quello della linfa, non sappiamo ancora nulla sull'essenza del fenomeno stesso. Per arrivare a una migliore comprensione delle cause, che determinano per questa sostanza le differenze di concentrazioni riscontrate nei vari liquidi organici, si è tentato di stabilire in quale stato essa circoli nell'organismo e, in particolare, quando arriva in contatto con le membrane dei vasi sanguigni e linfatici.

L'aureomicina si lega in notevole misura alle sostanze proteiche, ma non è facile stabilirne l'esatta misura perchè al pH dell'organismo avvengono anche fenomeni di precipitazione. Infatti praticando le prove di ultrafiltrazione fuori dell'organismo, mettendo a contatto per qualche tempo (30–60 minuti) l'aureomicina

(2) R. SANTI e M. SEREMBE, « Arch. int. pharmacodyn. », *82*, 48 (1950).

con la linfa e con il sangue, si ottengono cifre di fissazione molto elevate, risultando completamente trattenuti dalla membrana di cellofan fino a 1000 gamma per cc; ma anche quando si trova in soluzione acquosa, opportunamente neutralizzata, l'aureomicina viene trattenuta in larga misura (80–90 %), perchè a questo pH essa è poco solubile, mentre, se si lascia immutata la reazione acida del suo cloridrato, sale comunemente usato, questa sostanza passa abbastanza facilmente attraverso i pori del filtro.

Per accertare quanto effettivamente si verifica *in vivo*, sono state ripetute le prove di ultrafiltrazione sul sangue e sulla linfa di animali a cui era stata iniettata precedentemente nei muscoli l'aureomicina; ma le concentrazioni, che così si raggiungono, sono molto basse e non forniscono risultati sicuri, perchè si trovano ai limiti della sensibilità del metodo. In taluni casi la frazione ultrafiltrabile rappresenta il 10 % della quantità totale.

In conclusione, dalle prove fatte non è stato possibile stabilire se l'aureomicina nell'organismo si leghi solo alle proteine o si trovi riunita in grossi aggregati e non si sa a quale ipotesi dare la preferenza, delle due qui sotto prospettate, per spiegare il comportamento dell'aureomicina nei diversi liquidi dell'organismo.

Si può affermare con sicurezza che l'aureomicina passa agevolmente attraverso le pareti dei capillari sanguigni e di quelli linfatici, perchè la si ritrova nella linfa pochi minuti dopo una sua iniezione nelle vene. Varie considerazioni portano ad ammettere che la permeabilità delle membrane vasali, tanto sanguigne che linfatiche, sia uguale nei due sensi (dall'interno dei vasi all'esterno e viceversa), per quella frazione di aureomicina che non è legata alle proteine o agli elementi figurati del sangue, date le dimensioni relativamente modeste della sua molecola, la rapidità con cui si assorbe e si distribuisce nell'organismo qualunque sia la via di somministrazione ecc. Invece per quanto riguarda la frazione non libera, una ipotesi attendibile, che si può avanzare per spiegare le elevate concentrazioni raggiunte nella linfa, si basa appunto sul legame con le proteine, legame che rende impermeabile a questo farmaco la parete dei vasi sanguigni [3]; mentre i vasi linfatici costituiscono una via di drenaggio delle sostanze proteiche pervenute nel liquido interstiziale e quindi anche dell'aureomicina eventualmente ad esse legata.

Secondo l'interpretazione appena citata, l'aureomicina sarebbe ceduta dal sangue al liquido interstiziale: su questo fatto non possono sussistere dubbi, in quanto il passaggio del farmaco nella linfa deve avvenire necessariamente per questa via. In un secondo tempo dal liquido interstiziale essa verrebbe ceduta in parte alle cellule, ma a sostegno di questa affermazione non esistono prove dirette; però, per arrivare nella bile, deve prima essere assunta dalle cellule epatiche e inoltre, se non si verificasse tale evento, riuscirebbe difficile comprendere come si

(3) Anche a voler accettare l'opinione di quegli Autori, che ammettono una filtrazione delle proteine attraverso le membrane vascolari, specialmente nel fegato, il passaggio nei linfatici di aureomicina in conseguenza di tale legame con le proteine non può spiegare le differenze di concentrazione riscontrate, perchè il farmaco si trova in minore quantità proprio nel sangue.

possa raggiungere e mantenere per molto tempo un'elevata concentrazione di farmaco solo nel liquido interstiziale, perchè in tale sede non dovrebbero sussistere a lungo notevoli differenze di concentrazione rispetto al sangue, data la grande velocità della circolazione sanguigna e data la modesta concentrazione delle proteine nel liquido interstiziale (0,1 %), che, essendo 70 volte inferiore a quella del sangue, può fissare solo una modesta frazione di farmaco: l'equilibrio raggiunto ai due lati di questa membrana vasale non può che essere spostato a favore del sangue.

Entro i vasi linfatici invece la concentrazione delle sostanze proteiche cresce sensibilmente, raggiungendo nel fegato (6 %) quasi i valori del sangue (7 %); quindi con l'ausilio di queste sostanze si può verificare un notevole trasporto di aureomicina e forse proprio di quella frazione già fissata dalle cellule, perchè le sostanze proteiche della linfa sono anche di origine tissurale. Sembra logico ammettere che gli scambi dell'aureomicina tra liquido interstiziale e linfa si svolgono a favore di quest'ultima e sarebbero così spiegate le elevate concentrazioni di farmaco raggiunte nella linfa, senza dover chiamare in causa ipotetiche proprietà speciali della parete linfatica nei confronti dell'aureomicina, oltre a quella permeabilità selettiva normalmente esistente per le proteine.

Rientra in un analogo ordine di idee l'altra eventualità. Il sistema linfatico è adibito al trasporto dei corpi molto voluminosi pervenuti nei tessuti e tra questi corpi potrebbe esservi l'aureomicina, perchè al pH dell'organismo essa è poco solubile e perciò tenderà a riunirsi in grossi aggregati, che si fisseranno in prevalenza nelle cellule reticolo-endoteliali dei vari organi e in particolare del fegato; quindi l'accumulo in questo organo dell'aureomicina avverrebbe con un meccanismo analogo a quello indicato dal Meneghetti per gli alcaloidi e i metalli pesanti [4].

Infine anche la lentezza di circolazione della linfa potrebbe contribuire a mantenere sfasati i dati concernenti le concentrazioni dell'aureomicina rispettivamente nella linfa del dotto toracico e nel sangue, ma solo entro limiti modesti di tempo.

Comunque il volume ridotto di linfa che scorre nel dotto toracico (da 300 a 600 cc il giorno nei nostri cani di 8-15 Kg) dimostra che gli scambi maggiori di aureomicina devono avvenire direttamente tra sangue e tessuti e non tra linfa e tessuti.

(4) E. MENEGHETTI, *Lezioni di Farmacologia*. Padova, Cedam, 1950.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Senatore Castelnuovo comunica che è presente alla seduta il professore Emilio Segré dell'Università di California che si laureò a Roma e fu qui allievo di Enrico Fermi. Al prof. Segrè, che ha accettato l'invito del Consiglio della Fondazione Donegani di tenere prossimamente un ciclo di conferenze sui nuovi elementi della Chimica, il Presidente porge il cordiale saluto dell'Accademia e suo personale.

Il Presidente informa poi i colleghi che il fascicolo n. 2 dei Rendiconti (febbraio 1951) è già impaginato e, al riguardo, desidera ancora una volta riaffermare la sua ferma decisione di accelerare il più possibile la stampa e la revisione delle bozze in modo che in ogni seduta si possa presentare il fascicolo dell'adunanza precedente.

PLICHI SUGGELLATI

Il Senatore Castelnuovo presenta quindi un plico suggellato inviato dalla signora Stefania Argentieri e un altro dell'ing. Roberto Schanzer, consegnato all'Accademia, per incarico dell'ingegnere stesso, dal generale Livio Negro.

La Classe, constatata l'integrità dei sigilli, dispone che i plichi di cui trattasi siano conservati nell'archivio accademico a disposizione degli interessati.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Cecchini presenta, illustrandoli brevemente, due suoi lavori dal titolo: « Le variazioni di latitudine e il movimento del polo di rotazione terrestre » (estratto dal « Bulletin géodesique », n. 17, settembre 1950) e « Variazioni delle latitudini terrestri e fenomeni geofisici » (estratto dalla rivista « Geofisica pura e applicata », vol. XVIII, 1950).

Il Socio Dore, a nome della Commissione Geodetica Italiana e in particolare dei membri di detta Commissione che sono Soci dell'Accademia, presenta una pubblicazione dal titolo « Verbale della 42ª, 43ª, 44ª Riunione Plenaria della Commissione Geodetica Italiana tenute in Roma », mettendo in evidenza che la pubblicazione stessa documenta i lavori svolti, dopo la guerra, per la riorganizzazione dei servizi geodetici, dalla citata Commissione.

Il Socio Bompiani presenta il volume « Integraltafel–Erster Teil–Unbestimmte Integrale », di W. Gröbner e N. Hofreiter, facendo presente di essere venuto a conoscenza che l'editore gli inviò in omaggio detta opera, edita nel 1949, perchè egli ne facesse la recensione nelle pubblicazioni dell'Accademia. Poichè ciò, come è noto, non è previsto dalla prassi accademica,

il Socio Bompiani ritiene di poter esaudire il desiderio dell'editore con la presentazione del volume nella presente seduta affinchè sia conservato nella Biblioteca accademica.

Il Socio Giuseppe Levi offre in omaggio all'Accademia i cinque volumi della VII edizione del Trattato « Anatomia dell'Uomo » di Giulio Chiarugi. Egli ricorda di avere volentieri accettato l'incarico di curare la citata edizione per la deferenza che egli conserva alla memoria dell'insigne prof. Chiarugi che fu suo amato Maestro e fa presente di avere lasciato invariato il piano generale della grande opera, che l'Autore volle aderente al tradizionale indirizzo anatomico dell'analisi particolareggiata delle forme organiche. Però, a causa degli importanti progressi conseguiti nel campo dell'anatomia microscopica durante i molti anni trascorsi dalla prima edizione del Trattato ad oggi, è stato indispensabile introdurre nell'opera delle modificazioni, in speciale modo nelle parti attinenti all'istologia ed embriogenia, all'apparecchio nervoso e all'anatomia microscopica dei visceri.

Il Presidente ringrazia il Collega Levi per il cortese omaggio che la Classe accoglie con il più vivo compiacimento, rivolgendo un riverente pensiero alla memoria di Giulio Chiarugi che l'Accademia si onora di avere annoverato tra i suoi Soci.

Il Senatore Castelnuovo comunica quindi che il Collega Miolati ha voluto, ancora una volta, donare alla Biblioteca accademica pubblicazioni veramente preziose, facendole omaggio dei quattro tomi dell'opera di Amedeo Avogadro, edita nel 1837–1841, dal titolo « Fisica de' corpi ponderabili ossia Trattato della costituzione generale de' corpi ». Il Presidente, rilevata l'importanza e la rarità di detta opera, desidera porgere i più vivi ringraziamenti dell'Accademia e suoi personali al Socio Miolati.

Il Socio Miolati è ben lieto che il suo omaggio sia gradito e, dopo aver ricordato che i predetti tomi di Avogadro possono effettivamente considerarsi rarissimi in quanto quasi tutte le copie in circolazione furono acquistate da studiosi tedeschi fin dal 1911, in occasione del Congresso tenutosi a Torino, offre un altro volume dal titolo « Cesare Bertagnini (1827–1927) – Vita, opere e carteggio inedito », a cura di Giulio Provenzal, con prefazione di Raffaello Nasini, nonchè una traduzione dal tedesco di C. Bertagnini, intitolata « Descrizione del Laboratorio chimico della Università di Giessen », di I. P. Hofmann, con una prefazione del dott. Giusto Liebig.

Il Socio Negri, a nome del Collega Chiarugi, Direttore dell'Istituto Botanico dell'Università di Firenze, impossibilitato ad intervenire alla presente seduta, illustra brevemente i volumi 1–5 del periodico « Webbia » offerti in omaggio all'Accademia dal predetto Istituto, ricordando che i volumi 6° e 7° sono già stati presentati nell'adunanza di febbraio dallo stesso prof. Chiarugi e facendo presente che il periodico, riattivato nel 1948 dopo una sospensione venticinquennale, ha principalmente il fine di raccogliere lavori di sistematica di notevole ampiezza.

L'Accademico Segretario illustra brevemente le opere inviate in omaggio, mettendo in particolare evidenza il Volume XXII delle « Oeuvres Com-

plètes » di Cristiaan Huygens, pubblicate dalla Società Olandese delle Scienze, l'Annuario del Consiglio Nazionale delle Ricerche (1950), una pubblicazione del citato Consiglio dal titolo « Attività svolta dagli Istituti e dai Centri di Studio », la nuova edizione del trattato di G. Vitali e G. Sansone sulla « Moderna Teoria delle funzioni di variabile reale » e una pubblicazione di A. Melis intitolata « Anno di Giubileo – Il Settantacinquesimo anniversario della fondazione della Stazione di Entomologia Agraria di Firenze », (Estratto dall'Appendice di « Redia »), vol. XXXV, 1950.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci Albenga (a mezzo del Collega Perucca), Cotronei, Segre, Carrelli, Bompiani, Picone, Chain e Lombroso.

Il Socio Cotronei presenta una Memoria del dott. T. Perri dal titolo: Ricerche Sperimentali sull'induzione di arti soprannumerari negli Anfibi Anuri (Bufo vulgaris). Il Presidente comunica che verrà nominata una apposita Commissione per l'esame di detta Memoria.

Il Segretario accademico legge l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

Beloff–Chain A., Bovet D., Chain E. B., e Pocchiari F. – Metabolismo del glucosio–1–fosfato in conigli normali e diabetici da allossana (pres. dal Socio straniero E. B. Chain).

Scarpa O. – Corrosioni causate da correnti elettriche alternate ai ferri inclusi nei calcestruzzi.

Amerio L. – Sull'estensione delle nozioni di « colle » « nodo » e « fuoco » ai sistemi di due equazioni differenziali periodiche in tre variabili. Nota II (pres. dal Corrisp. B. Finzi).

Baffoni G. M. – L'andamento dell'ipertrofia reattiva in alcuni aspetti della cromatolisi della cellula nervosa (pres. dal Socio G. Cotronei).

Cennamo F. – Diffrazione di raggi X nei miscugli benzolo–tetracloruro di carbonio (pres. dal Socio A. Carrelli).

Hornich H. – Su alcune successioni di serie i cui termini generali convergono a zero (pres. dal Socio E. Bompiani).

Pucci C. – Sulla maggiorazione dell'integrale di una equazione differenziale lineare ordinaria del secondo ordine (pres. dal Socio M. Picone).

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 10 marzo 1951

Annuario del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Roma 1950.

Attività svolta dagli Istituti e dai Centri di studio. Roma, Consiglio Nazionale delle Ricerche, 1950. Pp. 244, in-8°.

AVOGADRO Amedeo. — *Fisica dei corpi ponderabili ossia trattato della costituzione generale dei corpi.* Torino, Stamperia Reale, 1837-1841. Voll. 4, in-8°, con tavv.

BERTAGNINI Cesare. — Vedi: HOFMANN I. P. — Vedi: PROVENZAL Giulio.

CANDIOLI Primo. — *Aspetti tecnico-economici della cultura del grano in Italia.* Estr. da « Atti dell'Accademia di Agricoltura, Scienze e Lettere di Verona », ser. 6ª, vol. I, 1949-50.

CASTELFRANCO Giorgio. — *Il concetto di forza in Leonardo da Vinci.* Estr. da « Proporzioni », a. 1950, n. 3.

CECCHINI Gino. — *Variazioni delle latitudini terrestri e fenomeni geofisici.* Estr. da « Geofisica pura e applicata », vol. XVIII, 1950.

— *Le variazioni di latitudine e il movimento del polo di rotazione terrestre.* Estr. da « Bulletin géodésique », settembre 1950, n. 17.

CHIARUGI Giulio. — *Istituzioni di anatomia dell'uomo.* 7ª ed. riveduta ed aggiornata dal prof. Giuseppe Levi. Milano, Società Editrice Libraria, 1948. Voll. 5, in-8°, con figg.

COMMISSIONE GEODETICA ITALIANA. — *Verbale della 42ª, 43ª, 44ª riunione plenaria, tenute in Roma.* Bologna, Coop. Tip. Azzoguidi, 1949, Pp. 83, in-8°.

GERBELLA Luigi. — *L'azienda generale italiana petroli e il problema nazionale dei carburanti.* Estr. da « Trasporti Pubblici », 1947, nn. 6-7.

— *I carburanti italiani.* Da San Colombano a Cortemaggiore. Estr. da « Trasporti Pubblici », 1949, n. 6.

GERBELLA Luigi. — *Gli impianti di perforazione e le ricerche di gas e di petrolio.* Estr. da « L'Ingegnere », 1949, n. 9.

GILLE Arthur. — *Étude de la valeur pratique des épreuves R. B.* Estr. da « Dissertations présentées à l'Institut de Psychologie appliquée et de Pédagogie », Université Catholique de Louvain, ser. 4ª, n. 4.

GRÖBNER Wolfgang und HOFREITER Nikolaus. — *Integraltafel.* Ester Teil: Unbestimmte integrale. Wien und Innsbruck, Springer, 1943, Pp. VIII-166, in-16°.

HOARE Cecil A. and MACKINNON Doris L. — *Clifford Dobell. 1886-1949.* Estr. da « Obituary Notices of Fellows of the Royal Society », vol. VII, 1950, november.

HOFMANN I. P. — *Descrizione del laboratorio chimico della Università di Giessen.* Con una prefazione del dott. Giusto Liebig. Tradotto dal tedesco da C. Bertagnini. Ms. autografo, cm. 17 × 15, pp. 126, con un ritratto aggiunto.

HOFREITER Nikolaus. — Vedi: GRÖBNER Wolfgang.

HUYGENS Christiaan. — *Œuvres complètes.* Tome XXII. La Haye, Société Hollandaise des Sciences, 1950. Pp. 923, in-4°, con figg.

ISTITUTO CENTRALE DI STATISTICA. — *Classificazione delle malattie e cause di morte deliberate dalla VI Conferenza internazionale per la revisione delle nomenclature nosologiche (Parigi, 26-30 aprile 1948).* Roma, Tip. F. Failli, 1951. Pp 274, in 8°.

LEVI Giuseppe. — Vedi. CHIARUGI Giulio.

MACKINNON Doris L. — Vedi: HOARE Cecil A. and MACKINNON Doris L.

MANULI Fortunato. — *L'assoluto infinito.* Pizzo di Calabria, Tip. Giuseppe Occhiato, 1951, Pp. 31, in-8°, con figg.

MARIANI J. — *Metrical Geometry contact transformations and nuclear physics.* Brooklyn, Institute of Applied Biology, 1950. Pp. 28, in-8°.

MELIS A. — *Anno di Giubileo. Il settantacinquesimo anniversario della fondazione della Stazione di Entomologia Agraria di Firenze.* Estr. da «Redia», vol. XXXV, 1950, appendice.

PROVENZAL Giulio. — *Cesare Bertagnini (1827–1927). Vita opere e carteggio inedito.* A cura di Giulio Provenzal. Roma, Istituto Nazionale Medico Farmacologico «Serono», 1928. Pp. XII–334, in–8°, con tavv.

SANSONE G. — Vedi: VITALI G. e SANSONE G.

STEIN G. (S. I). — *L'universo, d'onde?* Estr. da «La Civiltà Cattolica», 1949, quad. 2379.

TONI Serino. — *Lacuna dei corpi instabili e sovvertimento della scienza e Appendice.* La Spezia, Stabilimento Industriale Tipografico, s. d. Pp. 43, in–8°.

VITALI G. e SANSONE G. — *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale.* – Parte I. Giuseppe VITALI. *Aggregati. Analisi delle funzioni. Integrazione. Derivazione.* Bologna, Zanichelli, 1951, Pp. VI–222, in–8°.

Webbia. Raccolta di scritti botanici. Voll. 7, 1905–1923.

D. DE BLASI.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 14 aprile 1951

Presidenza del Socio G. Castelnuovo

NOTE DI SOCI

Elettrochimica. — *Corrosioni causate da correnti elettriche alternate ai ferri inclusi nei calcestruzzi.* Nota (*) del Socio Oscar Scarpa.

1. In un noto trattato sul cemento armato (1) è genericamente affermato, senza citare prove, che le correnti alternate non causano corrosioni ai ferri inclusi nei calcestruzzi.

Di tale fatto ho trovato nella recente letteratura scientifica e tecnica solamente un breve cenno in una pubblicazione di G. M. Magee *(Electrolytic corrosion of Steel in concrete)* effettuata nel novembre 1949 nella rivista americana *Corrosion* (2).

In questa Nota riguardante le corrosioni causate da correnti unidirezionali, il Magee cita incidentalmente, senza dar particolari, una sua prova fatta con corrente alternata, dalla quale deduce che tale corrente non causa corrosioni nei ferri inclusi.

Vedremo che ben differente è il caso dei calcestruzzi clorurati (3).

Per quanto riguarda le corrosioni ai ferri inclusi nei calcestruzzi, causate da correnti unidirezionali, hanno grande importanza le ampie ricerche sperimentali pubblicate nell'anno 1913 da E. H. Rosa, B. Mac Collum e O. S. Peters (4), i quali hanno mostrato che tali correnti determinano non soltanto gravi ossidazioni nelle regioni anodiche dei ferri inclusi, e alterazioni chimico-fisiche del cemento aderente, ma pur alterazioni nella costituzione chimica del cemento circondante le regioni catodiche; con conseguente danneggiamento delle proprietà meccaniche.

Nelle regioni anodiche il calcestruzzo può venir persino spaccato in causa dell'aumento di volume che subiscono i ferri ossidandosi.

(*) Presentata nella seduta del 10 marzo 1951.

(1) L. Santarella, *Il cemento armato*, vol. I (U. Hoepli editore).

(2) Vol. V, novembre 1949.

(3) Chiamo calcestruzzi clorurati quelli nel cui impasto sono stati aggiunti cloruri solubili per gli scopi di cui in appresso.

(4) *Technical Papers of Bureau of Standards*, n. 18, Washington (anno 1913).

Ricordo che le corrosioni dei ferri inclusi nel cemento armato per azione di correnti continue vennero pur da me studiate nell'anno 1914 esaminando i pilastri che facevano parte di opere cementizie esistenti nel Borgo Marinaro in Napoli, dove, a quell'epoca, esisteva una sottostazione elettrica generante corrente continua per l'alimentazione dell'impianto a cinque fili (con il neutro a terra) appartenente alla Società Generale di Illuminazione. Danni analoghi a pilastri in cemento armato vennero da me studiati nell'anno 1918 e seguenti nella fabbrica di accumulatori al piombo della Società Generale Italiana Accumulatori elettrici in Melzo (Milano)[5], per ovviare ai quali consigliai dei provvedimenti che ben corrisposero allo scopo.

2. Per quanto riguarda le azioni delle correnti alternate sui metalli e in particolare su quelli ferrosi (ghisa, acciaio, ferro), sepolti nei terreni umidi, ho recentemente descritte[6] le esperienze con cui ho mostrato come in adatte condizioni esse causano notevoli corrosioni. Il caso dei terreni umidi presenta analogie con quello qui trattato, sebbene la grande alcalinità del cemento può far dubitare che il conseguente stato passivo acquistato dalla superficie del ferro con esso in contatto possa preservarlo dalle corrosioni. Ma è noto che gli stati passivi dei metalli sono generalmente distrutti dalle correnti alternate attraversanti il contatto fra metallo ed elettrolita e che tali stati passivi sono ostacolati dalla presenza di alcuni elettroliti.

In alcune precedenti pubblicazioni[7] ho riportato l'osservazione che parecchi anni or sono ebbi campo di effettuare sulle gravi corrosioni dei ferri inclusi nel calcestruzzo costituente le fondazioni di alcuni forni elettrici alimentati con sistemi di correnti trifasi, di cui il centro stella era collegato alla terra. In questo caso il calcestruzzo poteva raggiungere e anche sorpassare la temperatura di 50° alla quale è molto accresciuta la sua conduttività elettrolitica. Ne attribuii fin d'allora la causa a correnti alternate dissimetriche che attraverso le suole dei forni, le loro fondazioni in cemento armato e il terreno ritornavano alla presa di terra del centro stella.

In una precedente pubblicazione su questi « Atti »[8] ho ricordato come alcuni costruttori, per evitare i danni prodotti dal gelo quando le gettate vengono effettuate nei mesi invernali, adoperano, per l'impasto dei calcestruzzi, delle soluzioni di sale marino o di altri cloruri. Altri costruttori impiegano invece soluzioni anticongelanti delle quali non risulta sieno state studiate le azioni rispetto a possibili corrosioni. A tal proposito si deve tener presente che alcune di queste sostanze, e in particolare i cloruri, fanno notevolmente aumentare la conduttività elettrolitica dei calcestruzzi.

(5) Dei pilastri così danneggiati ho riportato le fotografie in alcune pubblicazioni sulle corrosioni metalliche (vedi ad esempio in « Atti del XX Congresso della Società Italiana per il progresso delle scienze » (Milano, settembre 1931).

(6) *Sulla corrosione elettrochimica del ferro e della ghisa per effetto di correnti alternate.* « Rendiconti Lincei », vol. II, 1947; *Sulle corrosioni delle membrature metalliche per azione di correnti alternate e di loro sovrapposizione a correnti continue.* « La Ricerca Scientifica », Anno 17°, giugno 1947; *Nuove esperienze sulle corrosioni elettrochimiche di tubi di acciaio, di ghisa e di piombo interrati, per effetto di correnti elettriche alternate.* « La Ricerca Scientifica », Anno 17°, novembre 1947.

(7) Ad esempio nella citata pubblicazione sugli « Atti della XX Riunione della Società Italiana per il progresso delle Scienze ».

(8) « Rendiconti dei Lincei », vol. X, fasc. 3, pp. 189–192 (1951).

Fig. 1. – Prima della sabbiatura.

Nella citata pubblicazione ho descritto le esperienze da me istituite per verificare se l'aggiunta di Cloruro di sodio alle acque di impasto, causa effettivamente corrosioni nei ferri inclusi (fatto che alcuni costruttori affermano mentre altri negano) nonchè per chiarire in quali condizioni tali corrosioni si producono.

Come seguito di tale studio, tenendo conto delle mie osservazioni sopra esposte, e di altre che ebbi occasione di effettuare negli anni decorsi, ho creduto necessario provare, con esperienze di laboratorio, la possibilità che le correnti alternate, con frequenza industriale causino, o almeno facilitino, le corrosioni dei ferri inclusi nei calcestruzzi e ciò specialmente allorquanto questi sono impuri per cloruri.

Correnti di tal tipo possono infatti venir disperse da impianti elettrici per luce e forza e possono quindi investire membrature di costruzioni in cemento armato.

Nelle esperienze [9] ho impiegato due tipi di elettrodi, immersi in calcestruzzi puri (cioè non contenenti sensibili quantità di Cloruro di sodio) e in calcestruzzi clorurati [10] costituendoli, in un primo tempo, con cilindri di acciaio dolce del diametro di circa 1 cm., lunghi 25 cm., immersi per 20 cm. nei calcestruzzi. Questi vennero versati, appena effettuato l'impasto, entro a cassette di ebanite, infilando poi, subito, gli elettrodi (due per cassetta). Nelle successive esperienze ho adoperato lastre di ferro dello spessore di 2 mm., lunghe 20 cm., larghe 20 mm., che pur vennero immerse verticalmente nei rispettivi calcestruzzi per la prorondità di 16 cm., adoperando, sempre, una cassetta per ogni coppia di elettrodi.

I calcestruzzi clorurati contennero 50 grammi di cloruro di sodio per litro di calcestruzzo. Tanto per i calcestruzzi puri che per quelli clorurati venne impiegata la qualità di cemento e la qualità e quantità di granella del tipo adoperato nelle esperienze di cui la precedente Nota.

Le prove vennero eseguite alla temperatura ambiente, ma in causa dell'effetto Joule la temperatura del calcestruzzo divenne più elevata. Essa venne misurata con termometri immersi nella massa. La tensione impiegata fu 160 volt nominali, 42 periodi, ma impiegando un reostato si impedì che la intensità della corrente fosse superiore a 1 Ampère nelle condizioni iniziali, quando è massima la conduttività dei calcestruzzi. Tale intensità si ridusse però in poche ore a decimi di ampère in causa degli aumenti della resistenza dei calcestruzzi. In corrispondenza le tensioni misurate ai morsetti degli elettrodi aumentarono gradualmente da circa 30 Volt iniziali a 150 Volt. Il passaggio della corrente fu fatto durare 90 giorni.

Similmente vennero effettuate le prove impiegando come elettrodi le lastre di ferro. Anche con esse la durata fu di 90 giorni e la intensità della corrente assunse in media valore dell'ordine di centesimi di ampère. Tanto nell'un caso che nell'altro il passaggio della corrente alternata non produsse corrosioni visibili agli elettrodi immersi nei calcestruzzi puri, ma le corrosioni risultarono molto notevoli con i calcestruzzi clorurati.

(9) Debbo qui ripetere quanto ho dichiarato nella nota (1) a pagina 190 della precedente pubblicazione circa il laboratorio in cui ho eseguito le esperienze.

(10) Vedi nella Nota sopra citata.

Fig. 2. – Dopo la sabbiatura.

La figura 1 mostra la fortissima ossidazione delle lastre di ferro appena separate (alla fine della prova) dal blocco di calcestruzzo clorurato, operazione che venne eseguita spaccando il blocco, dopo rotta la relativa cassetta, adottando le medesime cure con le quali fu operata la separazione dei ferri nel caso delle esperienze senza impiego di corrente elettrica [11].

Le corrosioni del metallo sottoposto a questi ossidi, malgrado la piccolissima densità della corrente impiegata (dell'ordine di appena 0,02 Ampère per dm^2) sono notevolissime, come mostra la figura 2 che riproduce la fotografia delle medesime lastre dopo asportati gli ossidi mediante sabbiatura.

Analoghe corrosioni si osservano (sebbene meno intense e più localizzate) nel caso degli elettrodi costituiti con cilindri di acciaio.

Conclusioni. – Risulta dalle presenti esperienze che è lecito ritenere (almeno in condizioni normali) che le correnti alternate con frequenza industriale, non causano sensibili corrosioni ai ferri inclusi nei calcestruzzi puri, mentre, fatto assai importante per alcuni casi della pratica, esse causano notevolissime corrosioni quando i calcestruzzi contengono cloruri, anche se il tenore non sorpassa quello adottato da parecchi costruttori per evitare i danni apportati dal gelo, nei mesi invernali, nel periodo iniziale della posa in opera.

È mia intenzione di estendere queste ricerche al caso di altre sostanze anticongelanti.

Chimica biologica. — *Metabolismo del glucosio-1-fosfato in conigli normali e diabetici da allossana* [*]. Nota di Anne Beloff-Chain, Daniele Bovet, Ernst Boris Chain e Francesco Pocchiari, presentata [**] dal Socio E. B. Chain.

Subito dopo la scoperta dell'insulina fu dimostrato [1] che la quantità di fosforo inorganico presente nel sangue diminuisce negli animali normali dopo un'iniezione di insulina e glucosio, e questo fatto fu più tardi confermato con l'aiuto di sostanze marcate radioattive [2]. Queste osservazioni hanno suggerito che il modo di azione dell'insulina riguarda la fosforilazione dei carboidrati o dei loro intermediari.

(11) Vedere nella Nota citata.

(*) Lavoro eseguito nei laboratori di Chimica biologica e di Chimica terapeutica dell'Istituto Superiore di Sanità di Roma.

(**) Nella seduta del 10 marzo 1951.

(1) N. R. Blatherwick, M. Bell e E. Hill, « Journ. Biol. Chem. », *61*, 241 (1924); G. A. Harrop Jr. e E. M. Benedict, « Journ. Biol. Chem. », *59*, 683 (1924); W. A. Perlzweig, E. Latham e C. S. Keefer, « Proc. Soc. Exp. Biol. and. Med. », *21*, 33 (1923-24); W. B. Wiggleswort, C. E. Woodrow, W. Smith e L. B. Winter, « Journ. Physiol. », *57*, 447 (1922-23); L. B. Winter e W. Smith, « Journ. Physiol. », *58*, 327 (1923-24); R. Ellsworth e A. Weinstein, « Bull. John Hopkins Hosp. », *53*, 21 (1933); A. Bollinger e F. W. Hartman, « Journ. Biol. Chem. », *64*, 91 (1925); S. Soskin, R. Levine e O. Hechter, « Am. Journ. Physiol. », *134*, 40 (1941).

(2) N. Ó. Kaplan e D. M. Greenberg, « Am. Journ. Physiol. », *140*, 598 (1943).

Per verificare tale ipotesi è stato deciso di studiare il destino in vivo di differenti intermediari fosforilati del metabolismo del glucosio in animali normali e diabetici da allossana. Queste ricerche sono state iniziate col glucosio–1–fosfato, che è ritenuto uno dei primi derivati nei quali il glucosio viene trasformato dopo essere entrato nella cellula.

È stato trovato che il glucosio–1–fosfato iniettato endovena in conigli (1,5 g/Kg) rapidamente abbandona il sangue ed entra nei tessuti sia in conigli normali che in quelli diabetici da allossana, e la velocità di scomparsa è stata

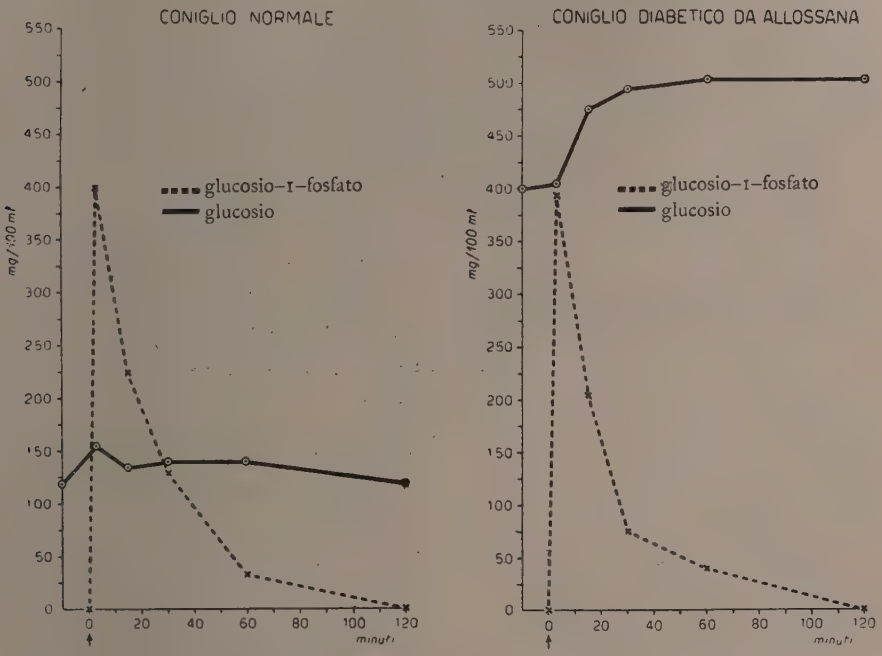


Fig. 1. – Velocità della scomparsa dal sangue di glucosio–1–fosfato (1,5 g/Kg), iniettato endovena in conigli normali e diabetici da allossana.

trovata la stessa in entrambi. Una parte del glucosio-1–fosfato iniettato è eliminato nelle urine. Tale quantità eliminata è circa il 30% in media, sia in conigli normali che in quelli diabetici da allossana. La velocità di scomparsa dal sangue del glucosio–1–fosfato è pertanto in netto contrasto col comportamento del glucosio che, mentre viene rapidamente metabolizzato nei conigli normali, rimane circolante per prolungato tempo nel sangue dei conigli diabetici (Figg. 1 e 2). È quindi chiaro che quando il glucosio è nella forma libera non è capace di entrare nelle cellule nei conigli diabetici, mentre lo può fare facilmente se fosforilato in posizione 1.

Questi esperimenti devono essere considerati come un'ulteriore indicazione che una delle funzioni dell'insulina riguarda la fosforilazione dei carboidrati, senza la quale essi non possono essere utilizzati dai tessuti.

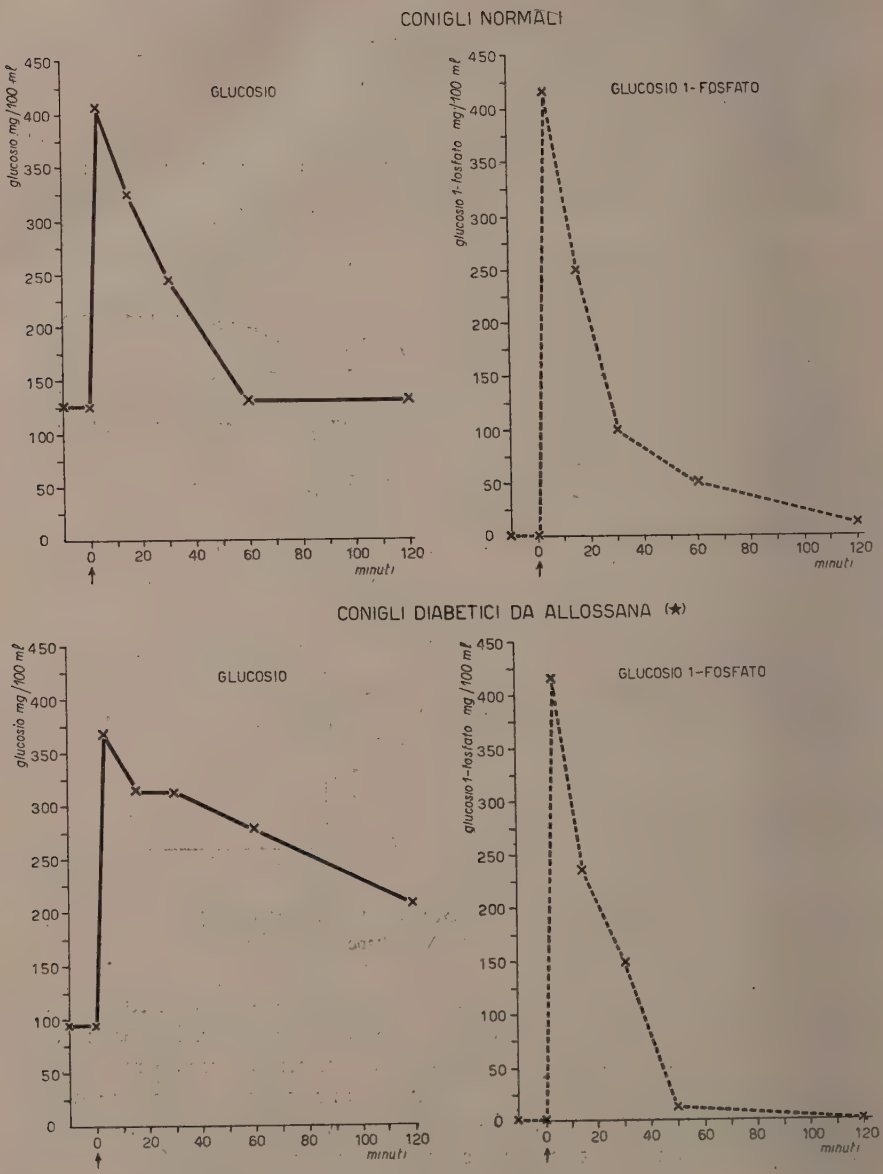


Fig. 2. – Velocità della scomparsa dal sangue di glucosio (1 g/Kg) e di glucosio-1-fosfato (1,5 g/Kg) iniettato endovena in conigli normali e diabetici da allossana.

(*). – I conigli diabetici sono stati mantenuti per 48 ore prima dell'esperimento a dieta priva di carboidrati, per ridurre il glucosio del sangue al livello normale.

Parte sperimentale.

Glucosio–1–fosfato. Venne preparato secondo il metodo di Mc Cready e Hassid [3], adoperando come resina cationica lo « Zeo Karb 215 » invece dell'Amberlite I R 100 e come resina anionica la « De Acidite B » invece dell'Amberlite I R 4.

Gli esperimenti vennero eseguiti su 8 conigli normali e 12 diabetici, ai quali furono iniettati endovena 1,5 g/Kg di glucosio–1–fosfato in soluzione al 15%; venne inoltre utilizzata la dose di 1 g/Kg di glucosio negli esperimenti di controllo.

L'allossana (200 mg/Kg) venne iniettata 4–8 giorni prima dell'esperimento in conigli che erano stati nutriti con una normale dieta di carboidrati (crusca) e verdura, eccetto in quei casi in cui fosse stato necessario ridurre il livello del glucosio nel sangue ad un valore paragonabile a quello dei conigli normali. A tale fine i conigli diabetici venivano mantenuti per 48 ore con dieta priva di carboidrati prima degli esperimenti.

I conigli furono tenuti in gabbie per il metabolismo e i campioni delle urine raccolti 12 ore prima e per un periodo di 24 ore seguenti l'iniezione. In questi campioni il glucosio–1–fosfato veniva determinato analizzando il fosforo inorganico ed il fosforo idrolizzato in dieci minuti in H_2SO_4 N a 100°.

Per l'analisi del glucosio–1–fosfato nel sangue, campioni di 2,5 ml di sangue vennero prelevati direttamente dal cuore (aggiungendo eparina per impedire la coagulazione) immediatamente prima e a intervalli di 3, 15, 20, 60, 120 minuti dopo l'iniezione. 2 ml di acido tricloroacetico 10% vennero aggiunti a 2 ml di sangue e centrifugati. Nel filtrato, libero di proteine, veniva determinato il fosforo inorganico ed il fosforo idrolizzato in dieci minuti in H_2SO_4 N a 100°. Le determinazioni di fosforo sono state eseguite secondo il metodo di Berenblum e Chain [4].

Le determinazioni di glucosio sono state fatte su 0,1 ml di sangue secondo il metodo di Miller e Van Slyke [5].

(3) R. M. Mc Cready e W. Z. Hassid, « Journ. Am. Chem. Soc. », *66*, 560 (1944).
(4) I. Berenblum e E. B. Chain, « Bioch. Journ. », *32*, 295 (1938).
(5) B. F. Miller, e D. D. Van Slyke, « Journ. Biol. Chem. », *114*, 583 (1936).

Biologia. — *Ulteriori esperienze sull'azione degli ormoni steroidi sulla gonade dell'anguilla* (*). Nota (**) del Corrisp. UMBERTO D'ANCONA.

In una Nota precedente (1) ho riferito su un ciclo di esperienze dirette a indagare l'azione di ormoni steroidi sintetici sulle gonadi dell'anguilla.

Avevo allora sperimentato su giovani anguille gialle di 18–27 cm di lunghezza, sulle quali gli ormoni steroidi furono fatti agire in soluzione oleosa, mediante iniezione, per un periodo di oltre 4 mesi. I risultati ottenuti si possono riassumere nei seguenti termini:

a) Il dipropionato di estradiolo ha esercitato una azione stimolante in senso femminile provocando la meiosi e l'auxocitosi.

b) Il propionato di testosterone, l'acetato di desossicorticosterone e il progesterone non hanno svolto una influenza apprezzabile.

Da queste esperienze risultava nel complesso una scarsa suscettibilità degli animali usati di fronte all'azione sperimentale.

Appariva quindi opportuno estendere le ricerche sia prolungando o intensificando l'azione ormonica, sia agendo in differenti fàsi del ciclo biologico dell'anguilla. Ho proceduto quindi all'allestimento di ulteriori esperienze, prendendo in considerazione anguille di diverse grandezze e stadi biologici.

Fra l'altro ho creduto opportuno di provare l'azione degli ormoni steroidi sulle anguille argentine.

È noto che queste presentano normalmente una differenziazione sessuale definita e che sono più o meno prossime alla maturazione. È appunto sotto lo stimolo fisiologico di tale prossima maturità che esse si accingono alla migrazione genetica catadroma.

In alcuni casi è stato però ammesso che anche nelle anguille argentine si possano verificare fatti di sessualità non ben definita con inversioni o presenza di elementi eterosessuali coesistenti. In particolare Mazza ha sostenuto che anche in anguille argentine possa avvenire una trasformazione del tipico organo di Syrski in un ovario (2).

Va ancora ricordato che in acque continentali, come ad esempio nelle valli da pesca adriatiche, si trovano talvolta esemplari particolarmente grandi, che si deve ritenere abbiano soggiornato a lungo nelle acque stesse, anche dopo aver acquisito la livrea argentina. Tutti questi esemplari sono sempre di sesso femminile.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia e Anatomia Comparata dell'Università di Padova col contributo finanziario del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Presentata nella seduta del 14 aprile 1951.

(1) U. D'ANCONA, *Prime osservazioni sull'azione degli ormoni sessuali sullà gonade dell'anguilla*. « Rend. Accad. Lincei », ser. 8ª, vol. V, p. 82 (1948).

(2) F. MAZZA, *Contributo alla conoscenza dello sviluppo degli organi genitali delle Anguille macroftalme o di calata, e delle giallo–verdognole, o microftalme*. « Boll. Pesca Piscicolt. Idrobiol. », anno VIII, p. 600 (1932).

Per cui, mentre si deve presumere che anguille argentine di sesso femminile possano permanere nelle acque continentali anche per più anni, talvolta riprendendo ad alimentarsi, nulla di simile appare verificarsi nei maschi. Potrebbe rimanere quindi il dubbio che i maschi argentini impediti di scendere al mare e trattenuti in acque continentali subiscano una inversione sessuale, in accordo con alcune osservazioni del Mazza.

Perciò ho ritenuto conveniente saggiare l'azione degli ormoni steroidi su un certo numero di maschi argentini. Sono stati impiegati a tale scopo esemplari provenienti da Goro, acquistati vivi sul mercato di Padova il 5 novembre 1949. Avevano tutti l'aspetto argentino con occhio grande.

Nelle nostre acque adriatiche si può distinguere il sesso delle anguille argentine con quasi assoluta certezza basandosi semplicemente sulla loro lunghezza. Dall'osservazione di un notevole numero di esemplari si è potuto infatti accertare che i maschi abitualmente non superano 46–47 cm, mentre le femmine normalmente non misurano meno di 47–48 cm.

Perciò per le mie esperienze ho scelto esemplari che non superavano i 45 cm di lunghezza.

Il 7 novembre furono scelti e sottoposti a una prima iniezione ormonica 4 esemplari per lotto, rimanendo 2 per controllo: avevano rispettivamente le seguenti lunghezze:

Lotto	Ormone	Lunghezze
F *bis* . . .	« Ovociclina P » Ciba	39,5 – 42,2 - 42,2 – 39,5
G *bis* . . .	« Perandren » Ciba	43,2 – 42,5 - 45,0 – 41,0
H *bis* . . .	« Percorten » Ciba	40,5 – 43,0 - 45,1 - 42,3
I *bis* . . .	« Lutociclina » Ciba	40,3 – 40,9 – 42,0 – 43,0
L *bis* . . .	controllo	40,0 – 37,3

La condotta dell'esperienza fu uguale a quella dell'esperienza precedente. Come allora furono usati preparati ormonici della Casa Ciba in soluzione oleosa di 5 mg per cc e precisamente « Ovociclina P » = dipropionato di estradiolo, « Perandren » = propionato di testosterone, « Percorten » = acetato di desossicorticosterone, « Lutociclina » = progesterone. A ciascun esemplare fu iniettato nella massa muscolare dorsale 1/2 cc di soluzione, corrispondente a 2,5 mg di preparato ormonico.

Il 7 marzo 1950, dopo 4 mesi dalla prima, le anguille furono sottoposte a una seconda iniezione di 1/2 cc con 2,5 mg di preparato ormonico.

Un primo gruppo di esemplari fu sacrificato alle date seguenti:

26 giugno 1950	2	del lotto	F *bis*	cm.	42	e 39,5
30 giugno »	2	»	H *bis*	»	41,5	e 40
1 luglio »	2	»	I *bis*	»	42	e 40,5
5 luglio »	2	»	G *bis*	»	41	e 42

Alle anguille rimaste, il 10 luglio fu praticata una terza iniezione di 1/2 cc con 2,5 mg di preparato ormonico

Il 19 ottobre dello stesso anno esse furono infine sacrificate, salvo una del lotto G *bis*, che morì il 30 luglio. Questo secondo gruppo di esemplari all'atto della fissazione presentava le seguenti misure:

lotto F *bis*	cm. 42 e 39,5
» G *bis*	» 43 e 44,7
» H *bis*	» 44 e 43
» I *bis*	» 42 e 49,7

I due esemplari di controllo furono sacrificati il 27 giugno 1950; misuravano 40 e 37 cm.

Durante tutto il periodo delle esperienze gli esemplari, benchè alimentati abbondantemente con cibo variato, hanno mangiato scarsamente; all'autopsia presentavano nello stomaco dei resti alimentari. Fra tutte, mangiavano meno quelle del lotto H *bis* (« Percorten »). Le anguille erano tenute in acqua dolce rinnovata continuamente, che variò da una temperatura minima di 10° C nel gennaio a una massima di 21 $^1/_2$ in luglio.

Di tutti gli esemplari subito dopo l'uccisione le gonadi furono prelevate e fissate in Zenker.

All'esame macroscopico esse presentavano tutte il caratteristico aspetto dell'organo lobato di Syrski. Soltanto l'anguilla di 43 cm del lotto G *bis* morta il 30 luglio 1950 aveva una gonade a nastrino pieghettato di netto aspetto ovarico, larga circa 5 mm.

All'esame istologico esse diedero il seguente reperto:

Esemplari di controllo. Lotto L *bis*. – I due esemplari di controllo presentavano gonadi maschili con cordoni spermatogoniali in riposo separati da abbondante stroma connettivale; deferente ben sviluppato, vascolarizzazione normale. Nella parte basale qualche cordone accennava alla formazione di un tubulo.

Gli spermatogoni, in parte primari, in parte secondari, avevano diametri compresi tra 6,2 e 10,9 μ con nuclei di 4,7–7,8 μ. Avevano i caratteri citologici normali della fase intercinetica di riposo, per i quali rimando alla mia Memoria del 1943 (3). Soltanto alcuni elementi apparivano in profase mitotica.

Esemplari iniettati con « Ovociclina ». Lotto F *bis*. – Tutti e 4 gli esemplari presentavano gonadi di aspetto maschile con spermatogoni in riposo ad ordinamento cordonale; deferente bene sviluppato. A differenza dei controlli, lo stroma connettivale intercordonale appariva meno abbondante. Gli spermatogoni erano inoltre più spesso riuniti in nidi isogeni, in cui si potevano contare fino a 16–18 elementi per sezione; si può quindi presumere che i nidi stessi fossero formati da 32–64 spermatogoni. Gli spermatogoni isolati avevano diametri di 7,8–9,4 μ con nuclei di 4,7–6,2; invece gli spermatogoni riuniti in nidi scendevano a diametri di 4,7–6,2 con nuclei di 3,1–4,7 μ.

In 3 esemplari sui 4 esaminati si notavano inoltre abbastanza frequenti nidi di elementi in lepto–pachitene, per lo più piccoli gruppi di 4–8 elementi per

(3) U. D'Ancona, *Nuove ricerche sulla determinazione sessuale dell'Anguilla*. « Arch. Oceanogr. Limnol. », anno III, p. 159 (1943).

sezione, raramente più numerosi, con diametri di 7,8–10,9 μ e nuclei di 6,2–7,8. Qualche elemento isolato in profase meiotica con cromosomi leptotenici e nucleolo periferico appariva anche in auxocitosi con diametri massimi di 10,9 × 17,2 μ e nuclei di 7,8 × 9,4. Si notavano inoltre delle profasi e metafasi mitotiche isolate. In qualche caso anche piccoli gruppi di 8-10 elementi picnotici.

Esemplari iniettati con « *Perandren* ». *Lotto* G *bis.* – Dei 4 esemplari di questo lotto, i due primi, fissati dopo 8 mesi di allevamento, presentavano gonadi di aspetto maschile normale con spermatogoni in riposo a ordinamento cordonale, stroma connettivale meno abbondante che nei controlli. Gli spermatogoni, prevalentemente secondari, erano leggermente più piccoli, di 4,7–9,4 μ con nuclei di 3,1-6,2. Avevano deferente ben sviluppato, qualche metafase mitotica.

L'esemplare morto il 30 luglio 1950 già all'esame macroscopico aveva, come s'è detto, la gonade di aspetto ovario. All'esame istologico essa appariva costituita da ovociti in secondo periodo di accrescimento con ovoplasma granuloso omogeneo con scarsi vacuoli, nuclei in lepto–pachitene o a cromosomi piumosi, nucleoli più o meno grandi e numerosi. Spesso gli stessi ovociti presentavano grosse zolle siderofile. Essi arrivavano a diametri di 62,2–74,9 μ, con nuclei di 31,2–49,9. I più piccoli ovociti in vitellogenesi scendevano a diametri di 25–28,1 μ con nuclei di 12,5–18,7. Soltanto qualche rarissimo ovocita più piccolo era ancora in primo periodo di accrescimento.

Il 4° esemplare (G *bis* 4), fissato il 19 ottobre 1950, aveva gonadi ad organizzazione maschile con spermatogoni in riposo ad ordinamento cordonale e abbondante stroma connettivale, deferente ben evidente. Nella parte più prossima al deferente alcuni cordoni presentavano dei lumi canalicolari. Gli spermatogoni, non formanti nidi evidenti, avevano diametri di 6,2–10,9 μ con nuclei di 4,7–7,8. Non si notavano nè mitosi, nè stadi di profase meiotica. Un fatto interessante era costituito dalla presenza in alcuni tubuli, nelle parti più marginali della gonade, di qualche ovocita in secondo periodo di accrescimento con tuorlo granulare, dall'aspetto già visto per il precedente esemplare; essi arrivavano a diametri di 31,2–45,2 μ con nuclei di 15,6–23,4 μ.

Esemplari iniettati con « *Percorten* ». *Lotto* H *bis.* – I 4 esemplari di questo lotto presentavano tutti ordinamento cordonale con abbondante stroma connettivale intercordonale, deferente ben sviluppato. Gli spermatogoni in riposo misuravano 6,2–7,8 μ di diametro con nuclei di 3,9–4,7; erano dunque sensibilmente più piccoli che quelli degli esemplari di controllo. In un singolo caso fu notata una metafase mitotica. In tutti e 4 gli esemplari colpiva poi l'attenzione la presenza di aspetti degenerativi degli elementi germinali con fatti di citolisi, degenerazione granulare, picnosi. In taluni tratti estesi territori cordonali apparivano in degenerazione con trasformazione degli elementi spermatogoniali in una massa granulosa amorfa. Il tessuto stromatico adiacente era invece sempre perfettamente integro.

Esemplari inietati con « *Lutociclina* » *Lotto* I *bis.* – Gli esemplari di questo lotto avevano tutti gonadi di tipo testicolare con ordinamento cordonale a spermatogoni in riposo, connettivo intercordonale abbondante, deferente bene sviluppato. In uno di essi qualche cordone più prossimale presentava un inizio di lume tubolare. Gli spermatogoni avevano diametri di 6,2–9,4 μ con nuclei di 3,9-6,2.

In due esemplari, fissati il 10 luglio 1950, si notavano fatti degenerativi degli elementi germinali con istolisi e agglutinazione. Simili fatti degenerativi non si riscontravano invece nelle due anguille fissate il 20 ottobre 1950; in queste si avevano invece delle mitosi spermatogoniali. In una di queste ultime (I *bis* 3) fu poi notato un paio di ovociti in auxocitosi di 15,6–25 μ con nuclei di 9,4–10,9.

Interpretazione e conclusioni. – I risultati di queste esperienze possono essere riassunti nei seguenti termini:

a) Il dipropionato di estradiolo ha provocato una stimolazione della meiosi e forse anche della mitosi.

b) L'acetato di desossicorticosterone, e in minor grado anche il progesterone, hanno determinato processi regressivi degli elementi spermatogoniali.

c) Il propionato di testosterone non ha prodotto effetti sicuramente apprezzabili.

L'esemplare femminile del lotto G *bis* va probabilmente interpretato quale fatto casuale indipendente dall'esperienza; si può trattare di una femmina di dimensioni eccezionalmente piccole. Così pure non ritengo si possa attribuire agli effetti dell'esperienza la presenza di singoli ovociti in auxocitosi nei due esemplari G *bis* 4 e I *bis* 3. È probabile che queste condizioni fossero presenti già inizialmente, indice di quello stato di labilità sessuale e di coesistenza di tendenze maschili e femminili, che sono caratteristiche dell'anguilla. A meno che ulteriori esperienze non portino documenti più sicuri, ritengo quindi che nelle condizioni sperimentali usate l'ormone maschile non abbia esercitato alcuna apprezzabile azione.

Evidente appare invece l'azione meiotico–stimolante dell'ormone femminile, che può essere interpretata come un'azione stimolante in senso femminile, benchè non abbia portato a una sicura differenziazione di ovociti; la comparsa di stadi di profase meiotica in piccoli nidi appare infatti nell'anguilla come un tempo iniziale di femminizzazione.

Altrettanto evidente è stata l'azione inibitrice esercitata dal desossicorticosterone e dal progesterone.

Questi risultati si prestano ad essere confrontati con quelli ottenuti sugli Anfibi dal Vannini (4) Questo autore in una prima approssimazione ritiene che l'estradiolo eserciti un'azione femminizzante e il testosterone una mascolinizzante, l'uno e l'altro mediante stimolazione; il progesterone esercita invece una azione mascolinizzante e il desossicorticosterone una femminizzante mediante inibizione. Un esame più minuzioso dimostra che tali azioni possono variare in dipendenza delle concentrazioni ormoniche usate, e del modo con cui gli ormoni vengono somministrati; da ciò taluni risultati divergenti ottenuti da diversi autori (5). Comunque le rispettive azioni stimolanti o inibenti appaiono, almeno in date condizioni sperimentali, accertate.

(4) E. Vannini, *Ricerche sul differenziamento sessuale nei Vertebrati.* «Ric. Scientif.», Suppl. vol. XVII, 1946; *Organogénèse des gonades et determinisme du sexe chez les Amphibiens et les Amniotes.* Coll. Int. Diff. Sexuelle Vertebrés, Paris 1950 (in corso di stampa).

(5) E. Witschi, *Génétique et physiologie de la différentiation du sexe.* Coll. Int. Diff. Sexuelle Vertebrés, Paris 1950 (in corso di stampa); E. Padoa, *Grenouilles et stérols.* Ibid.

Data la costituzione binaria dello stroma della gonade degli Anfibi, si è portati a ritenere che le azioni stesse si esplichino principalmente attraverso i differenti tessuti stromatici, per cui Vannini ha infatti parlato di azioni cortico– o medullo–stimolanti e inibenti.

Nel caso dell'anguilla, in cui il substrato stromatico della gonade è unitario, si deve ammettere invece che le azioni stimolanti o inibenti vengano esercitate direttamente sugli elementi germinali. Cio appare documentato anche dal fatto che nel caso presente si notano fatti regressivi degli elementi germinali, mentre lo stroma intercordonale appare normale.

Dalle presenti esperienze, confrontate con le mie precedenti del 1948 e con quelle di Lepori [6], si rileva l'importanza che ha lo stadio ontogenetico dell'anguilla per la possibilità di agire con preparati ormonici. Su questa via continuano ulteriori esperienze in atto.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi. — *Sull'estensione delle nozioni di «colle», «nodo» e «fuoco» ai sistemi di due equazioni differenziali periodiche, in tre variabili.* Nota II di LUIGI AMERIO, presentata [*] dal Corrisp. B. FINZI.

4. – *Supponiamo soddisfatta la* (37) *e dimostriamo che la serie* (27) *converge per* $|x| < R$ *abbastanza piccolo.*

Osserviamo dapprima che dalle (31) e (39) segue

$$\frac{|\rho_n|}{n} \geqq \nu > 0 \qquad (n = 1, 2, \cdots). \tag{42}$$

Consideriamo poi l'equazione differenziale ordinaria

$$\Gamma(x, \zeta, x\zeta') = 0 \qquad (\zeta = \zeta(x)), \tag{43}$$

dove $\Gamma(x, \zeta, w)$ è funzione analitica in un intorno del punto $(0, 0, 0)$ e soddisfa alle condizioni

$$\begin{cases} \Gamma\ (0, 0, 0) = 0 \\ \Gamma_\zeta\ (0, 0, 0) = 0 \\ \Gamma_w\ (0, 0, 0) = -\nu < 0, \end{cases} \tag{44}$$

mentre le altre derivate sono date dalle eguaglianze

$$\frac{\partial^{\rho+q+r}\,\Gamma(0,0,0)}{\partial x^\rho\,\partial\zeta^q\,\partial w^r} = \max_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{\partial^{\rho+q+r}\,F(t,0,0,0)}{\partial x^\rho\,\partial z^q\,\partial w^r} \right|. \tag{45}$$

(6) N. G. LEPORI, *Effetti nulli degli ormoni sessuali sulle creste genitali delle ceche.* «Atti Soc. Toscana Sci. Nat.», Mem., vol. LIII, 1946.

(*) Nella seduta del 10 marzo 1951.

L'analiticità di $\Gamma(x, \zeta, w)$ in un intorno dell'origine segue dalle (5).

Per la terza delle (44), la (43) può essere risolta rispetto a $x\zeta'$ e posta nella forma di Briot e Bouquet

$$x\zeta' = L(x, \zeta) \qquad (L(0, 0) = 0). \tag{46}$$

Poichè per le (44) risulta

$$L_\zeta(0, 0) = -\frac{\Gamma_\zeta(0, 0, 0)}{\Gamma_w(0, 0, 0)} = 0,$$

la (46) (e quindi la (43)) ammette [3], come è noto, una e una sola soluzione analitica $\zeta = \zeta(x)$, soddisfacente alla condizione $\zeta(0) = 0$:

$$\zeta(x) = \sum_1^\infty{}_n \frac{\zeta^{(n)}(0)}{n!} x^n, \tag{47}$$

dove la serie converge per $|x| < R$.

Le derivate $\zeta^{(n)}(0)$ si possono calcolare derivando la (43). Si ottiene così:

$$\begin{cases} 0 = \Gamma_x + \Gamma_\zeta \zeta' + \Gamma_w(\zeta' + x\zeta'') = (\Gamma_\zeta + \Gamma_w)\zeta' + \Gamma_x + x\Gamma_w \zeta'' \\ 0 = (\Gamma_\zeta + 2\Gamma_w)\zeta'' + \{(\Gamma_{\zeta x} + \Gamma_{wx}) + (\Gamma_{\zeta^2} + \Gamma_{w\zeta})\zeta' + (\Gamma_{\zeta w} + \Gamma_{w^2})(\zeta' + x\zeta'')\}\zeta' + \\ \quad + \{\Gamma_{x^2} + \Gamma_{x\zeta}\zeta' + \Gamma_{xw}(\zeta' + x\zeta'')\} + \{\Gamma_{wx} + \Gamma_{w\zeta}\zeta' + \Gamma_{w^2}(\zeta' + x\zeta'')\}x\zeta'' + x\Gamma_w\zeta''' \end{cases} \tag{48}$$

e, dopo n derivazioni,

$$0 = (\Gamma_\zeta + n\Gamma_w)\zeta^{(n)} + S_n(x, \zeta, \cdots, \zeta^{(n-1)}) + x S_n^*(x, \zeta, \cdots, \zeta^{(n)}) + x\Gamma_w \zeta^{(n+1)}, \tag{49}$$

dove S, S^* risultano funzioni maggioranti rispetto alle P e P* definite dalla (35), per tutti i valori di t.

Posto poi

$$s_n = S_n(0, \zeta(0), \cdots, \zeta^{(n-1)}(0))$$

si ha, per le (44) e (49),

$$\zeta^{(n)}(0) = \frac{s_n}{n\nu} \qquad (n = 1, 2, \cdots) \tag{50}$$

ed è, per la (42),

$$n\nu \leq |\rho_n|. \tag{51}$$

Poichè è $\zeta(0) = 0$, la (50) permette di determinare successivamente le derivate $\zeta'(0), \zeta''(0), \cdots, \zeta^{(n)}(0), \cdots$.

Si ha poi per le (32), (33), (40)

$$q_1 \leq s_1$$

e quindi dalle (41), (50), (51) segue

$$|z_1(t)| \leq \zeta'(0). \tag{52}$$

(3) Cfr., ad esempio, G. VALIRON, *Équations fonctionelles*, Masson, Paris, vol. II, pp. 269-70 (1945).

Perciò è anche

$$q_2 \leq s_2$$

e quindi

$$|z_2(t)| \leq \zeta''(0).$$

In generale si ha allora

$$q_n \leq s_n, \tag{53}$$

$$|z_n(t)| \leq \zeta^{(n)}(0). \tag{54}$$

Poichè la serie (47) converge per $|x| < R$, lo stesso avverrà per le serie (27) e (19), le quali risulteranno perciò uniformemente convergenti per $|x| \leq R' < R$, $-\infty < t < +\infty$.

Osserviamo ora che, per le (39), (53) e (54), anche la serie

$$\sum_1^\infty{}_n \{-\rho_n z_n(t) + Q_n(t)\} \frac{x^n}{n!}$$

converge uniformemente nella medesima striscia. Lo stesso avviene allora, per la (36), per la serie

$$\sum_1^\infty{}_n z_n'(t) \frac{x^n}{n!}$$

che vale perciò $\partial z(t,x)/\partial x$. La funzione $z(t,x)$ definita dalla (27) soddisfa pertanto alla (28).

In conclusione: *se vale la* (37), *esiste una e una sola soluzione* $y = y(t,x)$ *della* (18), *periodica come funzione di* t *e analitica come funzione di* x (*per* $|x| < R$), *soddisfacente alle condizioni*

$$y(t,0) = 0 \quad , \quad y_x(t,0) = y_1 \ (\text{con } y_1 = y_1^* \text{ o } \bar{y}_1).$$

La superficie di equazione $y = y(t,x)$ così ottenuta si dirà una *superficie principale* relativa all'integrale $\{0,0\}$ del sistema (10).

Analizziamo ora la condizione (37). Per questo osserviamo che, se è

$$y_1 = \frac{D - (n+1)A}{(n+2)B},$$

segue, per la (24),

$$(D - (n+1)A)^2 - (D - A)(D - (n+1)A)(n+2) - CB(n+2)^2 = 0,$$

cioè, per le (12) e (14),

$$\Delta(n+2)^2 - 4(n+1)\lambda^2 = 0.$$

Perciò, *se risulta*

$$\frac{\lambda^2}{\Delta} \neq \frac{(n+2)^2}{4(n+1)} \qquad (n = 1, 2, \cdots) \tag{55}$$

esistono due e due sole superficie principali relative all'integrale $\{0,0\}$ *del sistema* (10).

La (55) *è*, in particolare, *verificata se è* $\Delta < 0$.

Pertanto: *la soluzione* $\{0,0\}$ *del sistema* (10) *ammette, se è di tipo colle, due e due sole superficie principali.*

Se $\{0,0\}$ *è di tipo nodo e se risulta*

$$\lambda^2 > \Delta \tag{56}$$

(cioè se le radici y_1^* e $\bar{y}_1$ sono distinte), *esiste almeno una superficie principale.*

Se infatti si ha, per un valore $\bar{n}$ intero positivo,

$$\frac{\lambda^2}{\Delta} = \frac{(\bar{n}+2)^2}{4(\bar{n}+1)},$$

non è detto che esista la superficie principale corrispondente al valore

$$\bar{y}_1 = \frac{D-(\bar{n}+1)A}{4(\bar{n}+1)}.$$

Non può però essere anche

$$y_1^* = \frac{D-(n^*+1)A}{4(n^*+1)},$$

con n^* intero positivo $\neq \bar{n}$, perchè ne seguirebbe

$$\frac{\lambda^2}{\Delta} = \frac{(\bar{n}+2)^2}{4(\bar{n}+1)} = \frac{(n^*+2)^2}{4(n^*+1)},$$

ciò che è assurdo, essendo

$$\frac{(n+2)^2}{(n+1)} = (n+1) + \frac{1}{n+1} + 2$$

funzione crescente di n, per $n \geqq 1$.

Osservazione. – Se il sistema (2) non è nella forma (10), per ottenere le superficie principali relative a una soluzione periodica $\{x^*(t), y^*(t)\}$, si effettua una trasformazione del tipo (9):

$$\begin{cases} u = p_{11}(t)(x - x^*(t)) + p_{12}(t)(y - y^*(t)) \\ v = p_{21}(t)(x - x^*(t)) + p_{22}(t)(y - y^*(t)) \end{cases} \tag{57}$$

e si ottiene un sistema in $\{u(t), v(t)\}$ della forma (10). Se $v = v(t,u)$ è una superficie principale relativa al sistema trasformato, quella relativa al sistema (2) avrà perciò equazione $G(t,x,y) = 0$, desunta dalla $v = v(t,u)$ esprimendo, mediante le (57), u e v in funzione di t, x, y. Si noti che $G(t,x,y)$ risulta funzione periodica di t, con periodo T.

Osserviamo infine che la nozione di superficie principale relativa a una soluzione periodica è manifestamente *invariante* rispetto alle trasformazioni invertibili, del tipo

$$\begin{matrix} u = \alpha(t,x,y) \\ v = \beta(t,x,y) \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} x = \xi(t,u,v) \\ y = \eta(t,u,v) \end{pmatrix}$$

con α, β funzioni periodiche di t (con periodo T) e analitiche di (x,y).

Si ottiene infatti per u, v il sistema

$$(58) \qquad \begin{cases} u' = \{ \alpha_t + \alpha_x X + \alpha_y Y \}_{(x=\xi, y=\eta)} = U(t, u, v) \\ v' = \{ \beta_t + \beta_x X + \beta_y Y \}_{(x=\xi, y=\eta)} = V(t, u, v) \end{cases}$$

nel quale, per la periodicità, le soluzioni periodiche e le relative superficie principali, risultano le trasformate delle analoghe soluzioni e superficie dell'originario sistema (2).

5. – Il comportamento degli integrali del sistema (2) nell'intorno di una soluzione periodica $\{ x^*(t), y^*(t) \}$ si desume in modo analogo a quanto si fa per le (1).

Supporremo, al solito, verificate le (6), (8), cioè il sistema posto nella forma (10).

a) Sia $\Delta < 0$. In tal caso $\{ 0, 0 \}$ è una soluzione di tipo colle ed esistono due superficie principali

$$y = y_1(t, x) \quad , \quad y = y_2(t, x),$$

passanti per l'asse t e tangenti rispettivamente ai piani

$$y = \bar{y}_1 x \quad , \quad y = y_1^* x.$$

Sia, ad esempio, $\bar{y}_1 \neq 0$. Allora la $y = y_1(t, x)$ può risolversi rispetto a x, ottenendosi

$$x = x_1(t, y),$$

con

$$(59) \qquad x_1(t, 0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial x_1(t, 0)}{\partial y} = \frac{1}{\bar{y}_1}.$$

Facciamo ora il cambiamento di variabili

$$(60) \qquad \begin{cases} u = x - x_1(t, y) = \alpha(t, x, y) \\ v = y - y_2(t, x) = \beta(t, x, y) \end{cases} \qquad (\alpha(t, 0, 0) = \beta(t, 0, 0) = 0).$$

Per le (60), alle due superficie principali vengono a corrispondere, nello spazio (t, u, v), i piani coordinati $u = 0, v = 0$. Poichè si ha, per le (59) e (60),

$$(61) \qquad \left\{ \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right\}_{(x=y=0)} = \begin{vmatrix} 1 & -\dfrac{\partial x_1}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial y_2}{\partial x} & 1 \end{vmatrix}_{(x=y=0)} = 1 - \frac{y_1^*}{\bar{y}_1} \neq 0,$$

la trasformazione (60) è invertibile in tutto un intorno dell'asse t. Inoltre il sistema trasformato (58) ammette come superficie principali i piani $u = 0, v = 0$. Poichè tali superficie sono tutte formate da linee integrali, il sistema stesso avrà la forma

$$'62) \qquad \begin{cases} u' = u U_1(t, u, v) \\ v' = v V_1(t, u, v). \end{cases}$$

Inoltre, poichè le derivate

$$\alpha_x(t,0,0) \quad , \quad \alpha_y(t,0,0) \quad , \quad \beta_x(t,0,0) \quad , \quad \beta_y(t,0,0)$$

sono delle costanti, lo stesso avviene per le funzioni $U_1(t,0,0)$, $V_1(t,0,0)$. Queste hanno allora valori r, $-s$ rispettivamente, coincidenti (come per il sistema (1)) con le radici (reali e di segno opposto) dell'*equazione caratteristica*

$$\tau^2 - 2\lambda\tau + \Delta = 0. \tag{63}$$

Ne segue, per le (62),

$$\begin{cases} u' = u(r + h(t,u,v)) \\ v' = -v(s + k(t,u,v)), \end{cases} \tag{64}$$

con

$$r > 0 \quad , \quad s > 0 \quad , \quad h(t,0,0) = k(t,0,0) = 0. \tag{65}$$

Perciò si ha, in un conveniente intorno $J(|u| < a, |v| < b)$ dell'asse t:

$$|h(t,u,v)| \leq \frac{r}{2} \quad , \quad |k(t,u,v)| \leq \frac{s}{2}. \tag{66}$$

Osserviamo che, essendo $u = 0$ e $v = 0$ superficie principali, una linea integrale che abbia un punto in uno di tali piani vi giace interamente. Sia ora, ad esempio, all'istante iniziale t_0,

$$0 < u(t_0) < a \quad , \quad 0 < v(t_0) < b.$$

È perciò $0 < u(t) < a$, $0 < v(t) < b$ in tutto un intorno $t_1 < t < t_2$ del valore t_0 e quindi, per le (64), (65), (66),

$$\begin{cases} \frac{r}{2}u \leq u' \leq \frac{3r}{2}u \\ -\frac{3s}{2}v \leq v' \leq -\frac{s}{2}v, \end{cases} \tag{67}$$

cioè $u(t)$ è funzione crescente, $v(t)$ decrescente.

Ne segue

$$-\frac{3s}{r}\frac{du}{u} \leq \frac{dv}{v} \leq -\frac{s}{3r}\frac{du}{u},$$

cioè, posto $u_0 = u(t_0)$, $v_0 = v(t_0)$ e integrando tra u_0 e u, con $u_0 < u \leq a$,

$$v_0\left(\frac{u_0}{u}\right)^{3s/r} \leq v \leq v_0\left(\frac{u_0}{u}\right)^{s/3r}.$$

Ne segue, in tutto l'intorno $t_0 \mid\!- t_2$,

$$v(t) \geq v_0\left(\frac{u_0}{a}\right)^{3s/2}$$

e quindi, per la seconda delle (67),

$$v'(t) \leq -\frac{s}{2}v_0\left(\frac{u_0}{a}\right)^{3s/2}.$$

Ragionando allo stesso modo per $t < t_0$, si conchiude che *esistono due valori finiti* t_1 *e* t_2, *con* $t_1 < t_0 < t_2$, *nei quali il punto* $\{u(t), v(t)\}$ *non può appartenere a* J.

Le superficie principali relative a un integrale di tipo colle hanno perciò il carattere di superficie di separazione per gli integrali del sistema (2) (come le linee attraverso i colli, per le (1)). Si comprende di qui l'importanza di tali superficie nello studio asintotico del sistema (2).

Supponiamo, da ultimo, che l'integrale $\{u(t), v(t)\}$ abbia un punto in una superficie principale, e quindi vi appartenga interamente.

Sia, ad esempio,

$$u_0 = 0 \quad , \quad 0 < v_0 < b .$$

Si ha allora per la seconda delle (67),

$$-\frac{3s}{2} \leq \frac{v'}{v} \leq -\frac{s}{2}$$

e quindi, integrando tra t_0 e $t > t_0$,

$$v_0 e^{-3s/2(t-t_0)} \leq v(t) \leq v_0 e^{-s/2(t-t_0)} .$$

Si ha perciò (e lo stesso risultato si trova per $-b < v_0 < 0$)

$$\lim_{t \to +\infty} v(t) = 0 .$$

Supponendo invece

$$v_0 = 0 \quad , \quad 0 < |u_0| < a$$

si ottiene

$$\lim_{t \to -\infty} u(t) = 0 .$$

Perciò, *gli integrali aventi un punto in* J *e appartenenti alla superficie principale* $u = 0$, *sono asintotici, per* $t \to +\infty$, *alla soluzione* $\{0, 0\}$, *gli integrali appartenenti all'altra superficie,* $v = 0$, *sono asintotici alla stessa soluzione per* $t \to -\infty$.

b) Se $\{0, 0\}$ *è una soluzione di tipo nodo, o fuoco, si dimostra,* come [4] per il sistema (1) (passando a coordinate polari $u = \rho \cos \vartheta$, $v = \rho \operatorname{sen} \vartheta$) almeno per le soluzioni $\{u(t), v(t)\}$ aventi un punto in un conveniente intorno J dell'asse t, *che risulta*

$$(68) \qquad \begin{cases} \lim_{t \to +\infty} \rho(t) = 0 & \text{se è } \lambda < 0 \\ \lim_{t \to -\infty} \rho(t) = 0 & \text{se è } \lambda > 0 . \end{cases}$$

Nel primo caso $\{0, 0\}$ si dice un integrale *stabile*, nel secondo *instabile*. Una ulteriore discussione si richiede, nel caso del fuoco, quando sia $\lambda = 0$.

Quanto al modo con cui l'integrale $\{u(t), v(t)\}$ risulta asintotico all'integrale $\{0, 0\}$ si ottiene, nel caso del fuoco (come per le (1)) che è rispettivamente

$$\lim_{t \to \pm\infty} \vartheta(t) = \infty .$$

(4) G. VALIRON, loc. cit. in (3), pp. 343-45.

Se $\{0, 0\}$ è un integrale di tipo nodo si dimostra (come per le (1)) che il sistema (2) può porsi nella forma

$$\begin{aligned} u' &= -ru + \Phi(t, u, v) \\ v' &= -sv + \Psi(t, u, v) \end{aligned} \qquad (\text{per } \lambda^2 > \Delta)$$

oppure nella forma

$$\begin{aligned} u' &= -ru + r'v + \Phi(t, u, v) \\ v' &= -rv + \Psi(t, u, v) \end{aligned} \qquad (\text{per } \lambda^2 = \Delta)$$

dove $-r$, $-s$ sono le radici (reali e di egual segno) dell'equazione (63), Φ e Ψ si annullano per $u = v = 0$ insieme alle loro derivate prime rispetto a u e a v.

Si ricava allora, supponendo ad esempio $\lambda < 0$, che se è $r' \neq 0$, la proiezione sul piano $t = 0$ della linea $\{u(t), v(t)\}$ tende, per $t \to +\infty$ a diventare tangente all'asse u o all'asse v. Se invece è $r' = 0$, il limite

$$\lim_{t \to +\infty} \vartheta(t)$$

esiste finito ma varia dall'una all'altra caratteristica (analogia con il *nodo a stella*).

Risultati molto precisi possono ricavarsi se è verificata la (55), cioè se esistono *due* superficie principali. Il sistema (2) può porsi allora nella forma

$$\begin{cases} u' = -u(r + h(t, u, v)) \\ v' = -v(s + k(t, u, v)) \end{cases} \tag{69}$$

dove supporremo verificate le (65) e (66) (per (u, v) in J).

Sia ad esempio

$$0 < r < s$$

e prendiamo $\varepsilon > 0$ in modo che si abbia

$$s - \varepsilon > r + \varepsilon \quad , \quad r - \varepsilon > 0 . \tag{70}$$

Supponiamo che l'integrale $\{u(t), v(t)\}$ non appartenga a una superficie principale: sia poi, all'istante iniziale t_0,

$$0 < u(t_0) < a \quad , \quad 0 < v(t_0) < b .$$

Per le (66) e (68) $u(t)$ e $v(t)$ sono funzioni decrescenti per $t \geq t_0$: è allora $0 < u(t) < a$, $0 < v(t) < b$ per ogni $t > t_0$ e, per $t \geq \bar{t}$ abbastanza grande, si ricava dalla prima delle (69)

$$\begin{cases} -u(r + \varepsilon) \leq u'(t) \leq -u(r - \varepsilon) \\ -v(s + \varepsilon) \leq v'(t) \leq -v(s - \varepsilon) . \end{cases} \tag{71}$$

Ne segue inoltre

$$\frac{v}{u}\,\frac{s-\varepsilon}{r+\varepsilon} \leq \frac{dv}{du} \leq \frac{v}{u}\,\frac{s+\varepsilon}{r-\varepsilon} \tag{72}$$

e quindi

$$\frac{s+\varepsilon}{r-\varepsilon}\,\frac{du}{u} \geq \frac{dv}{v} \geq \frac{s-\varepsilon}{r+\varepsilon}\,\frac{du}{u} .$$

Posto $\bar{u} = u(\bar{t})$, $\bar{v} = v(\bar{t})$ e integrando tra $u < \bar{u}$ e $\bar{u}$ si ricava allora

$$\bar{v}\left(\frac{u}{\bar{u}}\right)^{s+\varepsilon/r-\varepsilon} \leqq v \leqq \bar{v}\left(\frac{u}{\bar{u}}\right)^{s-\varepsilon/r+\varepsilon}$$

e quindi, per le (70),

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{dv}{du} = 0 .$$

La proiezione sul piano $t = 0$ *dell'integrale* $\{u(t), v(t)\}$ *tende perciò a diventare tangente, per* $t \to +\infty$, *all'asse* u.

In modo del tutto analogo si trova che *se è*

$$0 < s < r$$

la medesima proiezione tende a diventare tangente all'asse v.

OSSERVAZIONE I. – Fissato un istante iniziale t_0, i valori iniziali $\{\alpha, \beta\}$ di un integrale $\{x(t), y(t)\}$ sono legati, come è notissimo, ai valori $\{\alpha_1, \beta_1\}$ all'istante $t_0 + T$ da relazioni del tipo

$$(73) \qquad \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_1(\alpha, \beta) \\ \beta_1 = \beta_1(\alpha, \beta), \end{cases}$$

dove le funzioni α_1, β_1 definiscono una trasformazione piana invertibile del piano (α, β) in sè, la quale ammette come punti uniti i punti $\{\alpha^*, \beta^*\}$, valori iniziali di soluzioni periodiche. Sia $\{\alpha^*, \beta^*\}$ uno di tali punti, corrispondente a una soluzione di tipo colle o nodo. Fatto coincidere il piano (α, β) col piano $t = t_0$ dello spazio (t, x, y) e gli assi α, β con le parallele agli assi x, y condotte dal punto $(t_0, 0, 0)$, *le due superficie principali intersecano allora il piano* (α, β) *secondo due linee analitiche, passanti per* $\{\alpha^*, \beta^*\}$, *le quali risultano trasformate in sè dalle* (73). L'esistenza di un continuo trasformato in sè dalle (73) è stata provata alcuni anni fa dal Levinson [5], nelle stesse ipotesi qui poste per il sistema (2): per quanto precede, tale continuo risulta formato da due linee analitiche, di cui abbiamo dato esplicitamente l'equazione.

OSSERVAZIONE II. – *Quanto è stato dimostrato nei precedenti §§, si estende senza difficoltà al caso in cui le funzioni* X, Y, x^*, y^* *siano limitate, come funzioni di* t, *qualora il sistema alle variazioni associato alle* (2) *sia riducibile.* In tal caso (mediante una sostituzione del tipo (9), con le $p_{ik}(t)$ limitate e con l'inverso del loro determinante di modulo $\geqq l > 0$) il sistema (2) si trasforma in un sistema di tipo (10), ove le φ, ψ sono limitate come funzioni di t e soddisfano alle (11). *Le superficie principali* (19) *della* (18) *si definiscono con le condizioni* $y_1(t) = \text{cost.}$, $y_n(t)$ *limitata ed esistono nelle stesse ipotesi* (su λ e Δ) *del caso periodico.*

Nell'intorno della soluzione $\{x^*(t), y^*(t)\}$ gli integrali $\{x(t), y(t)\}$ hanno poi un comportamento del tutto analogo a quello studiato nel § 5 per il caso periodico.

(5) N. LEVINSON, *Transformation theory of non-linear differential equations of the second order.* « Ann. of Math. », *45*, pp. 723–737 (1944). Vedasi anche: S. LEFSCHETZ, *Contribution to the theory of non-linear oscillations.* « Princ. Univ. », Cap. IV (*Forced oscillations in non-linear sistems*, by M. L. CARTWRIGHT), pp. 153–156 (1950).

Analisi. — *Su alcune successioni di serie i cui termini generali convergono a zero.* Nota di HANS HORNICH, presentata (*) dal Socio E. BOMPIANI.

In un lavoro precedente (1) ho mostrato che data una serie $\sum_n a_n$, con $a_n \to 0$ e $\sum_n |a_n| = +\infty$, e una radice primitiva l–ma ζ dell'unità ($l \geq 3$), si può assegnare una successione di numeri interi $l_1, l_2, \cdots$, tale che la serie $\sum_n a_n \zeta^{l_n}$ converga a un prefissato numero A. Qui viene considerata una successione di tali serie, non convergenti assolutamente e i cui termini tendono verso zero, e viene mostrato come a mezzo dell'introduzione di fattori del tipo ζ^{l_n}, uguali per tutti i termini aventi lo stesso indice, ogni serie della nostra successione converga verso un numero arbitrariamente prescelto.

La convergenza di una tale serie e la sua somma non vengono alterate se da tale serie si toglie una serie parziale assolutamente convergente e la prima si rappresenta come somma di tale serie parziale e dei termini restanti (susseguentisi questi nello stesso ordine di prima). Lo stesso succede naturalmente se si estraggono infinite serie parziali assolutamente convergenti, tali che la serie dei valori assoluti di tutti i termini di tutte queste serie sia convergente.

Sia data ora per ogni $j = 1, 2, \cdots$ una serie $\sum_n a_n^{(j)}$ con $a_n^{(j)} \to 0$ per $n \to \infty$ e $\sum_n |a_n^{(j)}| = +\infty$. Scriviamo ognuna di tali serie $\sum_n a_n^{(j)}$ nella forma $\sum_i \sum_k a_{ik}^{(j)}$, dove per ogni j la serie doppia $\sum_{i \neq j} \sum_k |a_{ik}^{(j)}|$ converga, mentre sia $\sum_k |a_{jk}^{(j)}| = +\infty$ con $a_{jk}^{(j)} \to 0$ per $k \to \infty$. Ognuna delle serie $\sum_n a_n^{(j)}$ è stata così decomposta in una somma di infinite serie parziali assolutamente convergenti la cui somma converge ancora assolutamente, mentre la serie rimanente converge tutt'alpiù condizionatamente. Dico allora che:

Sia $A_1, A_2, \cdots$ *una successione di numeri arbitrari e* ζ *una radice* l*–ma primitiva dell'unità* ($l \geq 3$). *Esiste allora una successione* l_{ik} *di numeri interi tali che è*

$$\sum_i \sum_k a_{ik}^{(j)} \zeta^{l_{ik}} = A_j \qquad (j = 1, 2, \cdots).$$

Per dimostrare l'assunto determineremo i numeri l_{ik} facendo uso dei risultati del lavoro citato in (1). Scegliamo all'uopo una successione di numeri positivi $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$ con $\varepsilon_n \to 0$. La determinazione degli l_{ik} avviene allora in un numero infinito di passi.

In un primo passo si determinano i numeri l_{1k} fino che sia

$$\left| A_1 - \sum_{k=1}^{N_1} a_{1k}^{(1)} \zeta^{l_{1k}} \right| < \varepsilon_1,$$

ove N_1 è il primo indice ≥ 1 per cui la precedente disuguaglianza abbia luogo.

(*) Nella seduta del 10 marzo 1951.

(1) «Monatsh. Math. u. Phys.» *45*, 432–434. Tale risultato è stato generalizzato da K. PRACHAR, in un lavoro pubblicato recentemente: «Monatsh. Math.», *54*, 284–307, a vettori di un generale spazio di Banach.

Con i numeri $l_{11}, \cdots, l_{1N_1}$ così determinati verranno allora formati tutti quegli altri l_{2k} fino a che sia

$$|A_2 - \sum_{k=1}^{N_1} a_{1k}^{(2)} \zeta^{l_{1k}} - \sum_{k=1}^{N_2} a_{2k}^{(2)} \zeta^{l_{2k}}| < \varepsilon_2 ,$$

ove N_2 è il primo indice $> N_1$ per cui abbia luogo questa disuguaglianza. Ciò posto, con i numeri $l_{11}, \cdots, l_{1N_1}, l_{21}, \cdots, l_{2N_2}$ già determinati verranno allora formati in un ulteriore terzo passo tutti quegli altri numeri l_{1k} $(k > N_1)$ fino a che sia verificata l'ulteriore disuguaglianza

$$|A_1 - \sum_{k=1}^{N_3} a_{1k}^{(1)} \zeta^{l_{1k}} - \sum_{k=1}^{N_2} a_{2k}^{(1)} \zeta^{l_{2k}}| < \varepsilon_3 ,$$

N_3 essendo il primo indice $> N_2$ per il quale essa sia verificata. Così procedendo in ognuno di tali passi verrà successivamente considerata una serie; se allora nell' h–mo passo è la serie r–ma che viene considerata, in esso verranno formati, a mezzo dei numeri l_{ik} già determinati, tutti quegli l_{rk} sino a che sia verificata la diseguaglianza

$$|A_r - \sum_{i} \sum_{k} a_{ik}^{(r)} \zeta^{l_{ik}}| < \varepsilon_h ,$$

dove delle somme finite con $a_{ik}^{(r)}$ ed $i \neq r$ sono da scriverne tante quanti sono gli l_{ik} che sono stati determinati nei passi precedenti; se N_l è il primo indice $> N_{l-1}$, per cui la diseguaglianza precedente è verificata, gli l_{rk} che vengono determinati nel corso dell' l–mo passo vanno fino a $k = N_l$.

Nella successione dei passi sono così considerate successivamente le serie aventi i numeri d'ordine $1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \cdots$

Che l' r–ma serie doppia $\sum_{i \neq r} \sum_{k} a_{ik}^{(r)} \zeta^{l_{ik}}$ sia convergente si deduce così: evidentemente si tratta solo di provare la convergenza della $\sum_{k} a_{rk}^{(r)} \zeta^{l_{rk}}$, poichè $\sum_{i \neq r} \sum_{k} |a_{ik}^{(r)}|$ converge. La r–ma serie viene considerata nei passi aventi il numero d'ordine $h_1, h_2, \cdots$; in essi vengono ogni volta determinati gli l_{rk} fino ai numeri $k = N_{h_1}, N_{h_2}, \cdots$; le grandezze da approssimare in questi passi a mezzo della serie $\sum_{k} a_{rk}^{(r)} \zeta^{l_{rk}}$ sono le

$$A_r - \sum_{i \neq r} \sum_{k} a_{ik}^{(r)} \zeta^{l_{ik}}$$

(le sommatorie doppie comprendendo qui i termini, in numero finito, finora fissati); la successione di queste grandezze converge in ogni caso a causa dell'assoluta convergenza della serie doppia $\sum_{i \neq r} \sum_{k} a_{ik}^{(r)}$.

Con notazioni più semplici arriviamo alla seguente formulazione:

Sia $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ una successione convergente ad $\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \cdots$ una successione convergente a zero con $\sum |\gamma_n| = +\infty$.

I numeri interi $l_1, l_2, \cdots$ siano determinati seguendo la costruzione descritta nel lavoro citato in [1], in modo che le somme parziali s_n della serie $\sum_n \gamma_n \zeta^{l_n}$ per $N_{h_i} < n \leq N_{h_{i+1}}$ convergano ad α_{i+1}; per ogni i sia poi

$$| s_{N_{h_i}} - \alpha_i | < \varepsilon_{h_i} .$$

Allora le $s_n - s_{N_{h_i}}$ per $N_{h_i} < n \leq N_{h_{i+1}}$ giacciono [2] all'interno di un circolo di centro $\alpha_{i+1} - s_{N_{h_i}}$, il cui raggio dipende solo da $| \alpha_{i+1} - s_{N_{h_i}} |$ e dal massimo dei $| \gamma_n | (n > N_{h_i})$ e può essere arbitrariamente piccolo, non appena queste due grandezze siano sufficientemente piccole. Difatti è ora

$$\alpha_{i+1} - s_{N_{h_i}} = (\alpha_{i+1} - \alpha_i) + (\alpha_i - s_{N_{h_i}}) \to 0$$

per $i \to \infty$ e perciò anche con $N_{h_i} < n \leq N_{h_{i+1}}$ è

$$s_n - s_{N_{h_i}} \to 0$$

e inoltre

$$s_n \to \alpha \qquad \text{per} \quad n \to \infty$$

Tutto ciò vuol dire nelle nostre precedenti notazioni che è stata stabilita la convergenza della serie $\sum_k a_{rk}^{(r)} \zeta^{l_{rk}}$ e quindi anche che sussiste l'eguaglianza

$$A_r = \sum_i \sum_k a_{ik}^{(r)} \zeta^{l_{ik}} .$$

Matematica (*Equazioni differenziali*). — *Sulla maggiorazione dell'integrale di una equazione differenziale lineare ordinaria del secondo ordine* [*]. Nota di Carlo Pucci, presentata [**] dal Socio M. Picone.

Il problema della determinazione di numeri che siano maggiori in un dato intervallo del modulo di un integrale di una equazione differenziale lineare ordinaria del secondo ordine è stato in più modi risolto da M. Picone nel caso che l'integrale soddisfi particolari condizioni ai limiti [1]. In tale trattazione mancano formule di maggiorazione dell'integrale nel caso che sia noto il valore assunto dalla sua derivata agli estremi dell'intervallo e la ricerca di tali maggiorazioni ci è stata proposta dal ch.mo professore Picone ed è l'oggetto della presente Nota.

In questa Nota, per semplicità di esposizione, ci limitiamo a maggiorare l'integrale $y(x)$ dell'equazione differenziale

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + A(x)\, y(x) = f(x), \tag{1}$$

(2) Cfr. il lemma contenuto a p. 268 del « Monatsh. Math. Phys. » *46*.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta del 10 marzo 1951.

(1) M. Picone, *Sulle autosoluzioni e sulle formule di maggiorazione per gli integrali delle equazioni differenziali ordinarie autoaggiunte* « Math. Zeitschr. » *28*, (pp. 519-555) (1928).

($A(x), f(x)$ funzioni continue in (a, b)), soddisfacente alle condizioni ai limiti

$$y'(a) = y'(b) = 0 \tag{2}$$

In uno studio più dettagliato di prossima pubblicazione tali maggiorazioni sono perfezionate e riferite all'equazione differenziale

$$\frac{d}{dx}\left[\theta(x)\frac{dy(x)}{dx}\right] + A(x)\,y(x) = f(x)$$

e alle più generali condizioni ai limiti

$$\alpha_1 y(a) - \alpha y'(a) = \gamma \quad , \quad \beta_1 y(b) + \beta y'(b) = \gamma_1 .$$

1. – ALCUNE DISUGUAGLIANZE PREPARATORIE.

a) Indicato con $y(x)$ un integrale dell'equazione differenziale (1) *che soddisfa alle condizioni ai limiti* (2), *posto*

$$M = \max[|A|]\ ^{(2)},$$

se è

$$\int_a^b A\,dx \neq 0$$

sussiste la disuguaglianza

$$\max[|y|] < \left|\frac{\int_a^b f\,dx}{\int_a^b A\,dx}\right| + \frac{(b-a)M}{\left|\int_a^b A\,dx\right|}\,\text{osc.}[y]. \tag{3}$$

Integrando tra a e b la (1) per le (2) è

$$\int_a^b A\,y\,dx = \int_a^b f\,dx.$$

È quindi

$$|\max[y]| \cdot \left|\int_a^b A\,dx\right| - \left|\int_a^b f\,dx\right| = |\max[y]| \cdot \left|\int_a^b A\,dx\right| - \left|\int_a^b A\,y\,dx\right| \leq$$

$$\leq \int_a^b |A| \cdot |\max[y] - y|\,dx < (b-a)M\,\text{osc.}[y],$$

$$|\max[y]| \cdot \left|\int_a^b A\,dx\right| < \left|\int_a^b f\,dx\right| + (b-a)M\,\text{osc.}[y]. \tag{4}$$

(2) Indichiamo con max $[y]$, min $[y]$ rispettivamente il massimo e il minimo valore della funzione $y(x)$ in (a, b). Usiamo la notazione osc. $[y]$ per indicare l'oscillazione di $y(x)$.

Analogamente si prova

$$(5) \qquad -|\min[y]|\left|\int_a^b A\,dx\right| < \left|\int_a^b f\,dx\right| + (b-a)\,M\,\text{osc.}[y],$$

ed essendo

$$\max[|y|] = \max[|\max[y]|, |\min[y]|]$$

dalle (4), (5) segue la (3).

b) Indicato con $y(x)$ un integrale dell'equazione differenziale (1) *che soddisfa alle condizioni ai limiti* (2), *posto*

$$F = \max[|f_1|],$$

se è

$$\int_a^b A\,dx > 0$$

vale la seguente limitazione

$$(6) \qquad \min[|y|] \leq \frac{(b-a)\,F}{\int_a^b A\,dx} \text{ (3)}.$$

La (6) è vera se $y(x)$ si annulla in (a,b) essendo in tal caso $\min[|y|] = 0$. Proviamo che la (6) sussiste pure nell'ipotesi che $y(x)$ non si annulli mai in (a,b).

Moltiplicando il primo e il secondo membro della (1) per $1/y(x)$ ed integrando da a a b si ottiene

$$\int_a^b \frac{y''}{y}\,dx + \int_a^b A\,dx = \int_a^b \frac{f}{y}\,dx,$$

ed integrando per parti il primo integrale si ha

$$\left[\frac{y'}{y}\right]_a^b + \int_a^b \left(\frac{y'}{y}\right)^2 dx + \int_a^b A\,dx = \int_a^b \frac{f}{y}\,dx,$$

e per le (2)

$$\int_a^b \left(\frac{y'}{y}\right)^2 dx + \int_a^b A\,dx = \int_a^b \frac{f}{y}\,dx,$$

$$\int_a^b A\,dx \leq \int_a^b \frac{f}{y}\,dx.$$

(3) Dalla (6) segue che è nullo l'autovalore λ_0 relativo all'equazione differenziale

$$(1_\lambda) \qquad y''(x) + \lambda\,A(x)\,y(x) = 0$$

e alle condizioni ai limiti (2) se è $\int_a^b A\,dx > 0$. Infatti in tal caso una autosoluzione, corrispondente a un autovalore positivo, per la (6) ha almeno uno zero in (a,b). Tale proposizione è già stata stabilita da M. Picone, *Sui valori eccezionali di un parametro da cui dipende una equazione differenziale lineare ordinaria del secondo ordine*. « Annali della Sc. Norm. Sup. di Pisa », (1) XI (pp. 1–141). § 3 (1910). (Per la definizione di λ_0 cfr. ad esempio n. 2 di questa Nota).

Esssendo

$$\left| \int_a^b \frac{f}{y}\, dx \right| \leq \frac{(b-a)\,F}{\min\,[\,|y|\,]},$$

ne segue

$$\int_a^b A\, dx \leq \frac{(b-a)\,F}{\min\,[\,|y|\,]}$$

e la (6).

c) Indicato con $y(x)$ un integrale dell'equazione differenziale (1) *che soddisfa alle condizioni ai limiti* (2), *posto*

$$M = \max\,[\,|A|\,] \quad , \quad F = \max\,[\,|f|\,],$$

si ha

$$\text{osc.}\,[y] \leq \frac{(b-a)^2}{2}\,\{F + M \max\,[\,|y|\,]\}. \tag{7}$$

Integrando il primo e secondo membro della (1) da a ad x si ottiene

$$y'(x) + \int_a^x A(\xi)\, y(\xi)\, d\xi = \int_a^x f(\xi)\, d\xi.$$

Indicato con c e d due punti ove $y(x)$ assume rispettivamente il massimo e il minimo in (a, b) è

$$\text{osc.}\,[y] = \left| \int_c^d y'(x)\, dx \right| = \left| \int_c^d \int_a^x [f(\xi) - A(\xi)\, y(\xi)]\, d\xi\, dx \right| \leq$$

$$\leq \{F + M \max\,[\,|y|\,]\} \int_a^b \int_a^x d\xi\, dx$$

da cui segue la (7).

2. MAGGIORAZIONI DIPENDENTI DAGLI AUTOVALORI.

Supponiamo ora che la funzione $A(x)$ assuma anche valori positivi nell'intervallo (a, b). Allora è noto che in corrispondenza all'equazione differenziale

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + \lambda\, A(x)\, y(x) = 0 \tag{1$_\lambda$}$$

e alle condizioni ai limiti (2) esiste una infinità numerabile di autovalori non negativi

$$\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n, \cdots, \lambda_n < \lambda_{n+1},$$

tali che all'autovalore λ_n corrisponde l'autofunzione $u_n(x)$ che si annulla n volte internamente ad (a, b) [4].

(4) M. PICONE, loc. cit. (3).

a) *Indicato con* $y(x)$ *un integrale dell'equazione differenziale* (1) *soddisfacente le condizioni ai limiti* (2), *se è maggiore di uno l'autovalore* λ_0 *relativo all'equazione differenziale omogenea* (1_λ) *e alle condizioni ai limiti* (2) *e se è*

$$\int_a^b A\,dx < 0$$

sussiste la limitazione

$$(I) \qquad \max[|y|] < \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} \frac{(b-a)^3 MF}{\left|\int_a^b A\,dx\right|} \left(1 + \frac{(b-a)M}{\left|\int_a^b A\,dx\right|}\right) + \left|\frac{\int_a^b f\,dx}{\int_a^b A\,dx}\right| \text{ (5)},$$

ove si è posto

$$M = \max[|A|] \quad , \quad F = \max[|f|].$$

Nelle ipotesi del teorema M. Picone ha provato (6)

$$(8) \qquad \text{osc.}[y] < \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} (b-a)^2 F \left(1 + \frac{(b-a)M}{\left|\int_a^b A\,dx\right|}\right).$$

Da tale disuguaglianza e dalla (3) segue la (I).

b) *Sia* $y(x)$ *un integrale dell'equazione differenziale* (1) *che soddisfa le condizioni ai limiti* (2) *e sia*

$$\lambda_{r-1} < 1 < \lambda_r,$$

ove λ_{r-1}, λ_r *indicano autovalori relativi all'equazione differenziale* (1_λ) *e alle condizioni ai limiti* (2). *Posto*

$$M = \max[|A|] \quad , \quad F = \max[|f|],$$

se è

$$\int_a^b A\,dx \neq 0$$

sussiste la limitazione:

$$(II) \qquad \max[|y|] < \left(\frac{\lambda_0}{1-\lambda_0} + \cdots + \frac{\lambda_{r-1}}{1-\lambda_{r-1}} + \frac{\lambda_r}{\lambda_r - 1}\right) \frac{(b-a)^3 MF}{\left|\int_a^b A\,dx\right|} \left(1 + \frac{(b-a)M}{\left|\int_a^b A\,dx\right|}\right) + \left|\frac{\int_a^b f\,dx}{\int_a^b A\,dx}\right|$$

in particolare, se è

$$\int_a^b A\,dx > 0$$

(5) Sostituendo a λ_0 un suo valore per difetto la (I) vale a maggior ragione. Per espressioni per difetto di λ_0 cfr. M. Picone, loc. cit. (3) n. 30, 31.

(6) Loc. cit. (1) pag. 548.

sussiste anche la seguente limitazione:

$$\text{(III)} \qquad \max[|y|] < \left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_1} + \cdots + \frac{\lambda_{r-1}}{1-\lambda_{r-1}} + \frac{\lambda_r}{\lambda_r - 1}\right)\left(\frac{(b-a)\,M}{\int_a^b A\,dx} + 1\right)(b-a)^2 F + \frac{(b-a)\,F}{\int_a^b A\,dx}.$$

Con immediate generalizzazioni di tre teoremi di M. Picone [7] si può provare la seguente disuguaglianza analoga alla (8)

$$\text{(9)} \qquad \text{osc.}[y] < \left(\frac{\lambda_0}{1-\lambda_0} + \cdots + \frac{\lambda_{r-1}}{1-\lambda_{r-1}} + \frac{\lambda_r}{\lambda_r - 1}\right)(b-a)^2 F \left(1 + \frac{(b-a)\,M}{\left|\int_a^b A\,dx\right|}\right).$$

Dalla (3) e dalla (9) segue immediatamente la (II) e dalla (6) e dalla (9) la (III).

3. ALTRE MAGGIORAZIONI.

a) *Indicato con* $y(x)$ *un integrale dell'equazione differenziale* (1) *che soddisfa le condizioni ai limiti* (2) *se è*

$$A(x) < 0 \quad \text{per} \quad x \in (a, b)$$

sussiste la limitazione

$$\text{(IV)} \qquad \min\left[\frac{f(x)}{A(x)}\right] \leq y(x) \leq \max\left[\frac{f(x)}{A(x)}\right] \quad \text{per} \quad x \in (a, b).$$

Indichiamo con c il punto di (a, b) ove $y(x)$ assume il valore massimo. Si ha necessariamente in tal punto per la (2)

$$y''(c) \leq 0$$

e per la (1), essendo $A(x) < 0$, è

$$y(c) = \frac{f(c)}{A(c)} - \frac{y''(c)}{A(c)} \leq \frac{f(c)}{A(c)} \leq \max\left[\frac{f(x)}{A(x)}\right].$$

Indicato con d il punto di (a, b) ove $y(x)$ assume il suo valore minimo si prova analogamente

$$y(d) \geq \frac{f(d)}{A(d)} \geq \min\left[\frac{f(x)}{A(x)}\right].$$

b) *Indicato con* $y(x)$ *un integrale dell'equazione differenziale* (1) *che soddisfa le condizioni ai limiti* (2), *posto*

$$M = \max[|A|] \quad , \quad F = \max[|f|],$$

se è

$$\int_a^b A\,dx > 0 \quad , \quad 2 > (b-a)^2 M,$$

(7) Loc. cit. (1) § 1, 2, 3. Le maggiorazioni (II) e (III) saranno rigorosamente dimostrate in un caso più generale in uno studio di prossima pubblicazione.

sussiste la limitazione:

$$\text{(V)} \qquad \max[|y|] \leq \frac{(b-a)F}{2-(b-a)^2 M}\left[\frac{2}{\int_a^b A\,dx} + b - a\right].$$

È infatti

$$\max[|y|] \leq \min[|y|] + \text{osc.}[y]$$

e dalle (6), (7) segue

$$\max[|y|] \leq \frac{(b-a)F}{\int_a^b A\,dx} + \frac{(b-a)^2}{2}F + \frac{(b-a)^2}{2}M \max[|y|],$$

$$\max[|y|](2-(b-a)^2 M) \leq (b-a)F\left[\frac{2}{\int_a^b A\,dx} + b - a\right]$$

e da questa la (V).

c) *Indicato con* $y(x)$ *un integrale dell'equazione differenziale* (1) *che soddisfa alle condizioni ai limiti* (2), *posto*

$$M = \max[|A|] \quad , \quad F = \max[|f|],$$

se è

$$2\left|\int_a^b A\,dx\right| > (b-a)^3 M^2$$

sussiste la seguente limitazione

$$\text{(VI)} \qquad \max[|y|] < \frac{2\left|\int_a^b f\,dx\right| + (b-a)^3 FM}{2\left|\int_a^b A\,dx\right| - (b-a)^3 M^2}.$$

Dalle (3), (7) segue

$$\max[|y|] < \left|\frac{\int_a^b f\,dx}{\int_a^b A\,dx}\right| + \frac{(b-a)M}{\left|\int_a^b A\,dx\right|}\frac{(b-a)^2}{2}\{F + M \max[|y|]\},$$

$$\max[|y|]\left[2\left|\int_a^b A\,dx\right| - (b-a)^3 M^2\right] < 2\left|\int_a^b f\,dx\right| + (b-a)^3 MF$$

e da questa la (VI).

Geodesia. — *Su alcune proprietà integrali delle rappresentazioni conformi di superfici su superfici.* Nota di ANTONIO MARUSSI, presentata (*) dal Socio P. DORE.

1. È ben noto il teorema di Gauss-Bonnet (1) per una superficie (S) regolare, che esprime la curvatura tangenziale integrale lungo un circuito chiuso (c) privo di nodi, anche angoloso in un numero discreto di punti, mediante la curvatura integra dell'area (A) compresa entro (c), e mediante la somma degli angoli formati dalle tangenti al circuito nelle sue cuspidi; esso è una generalizzazione del teorema di Gauss che fornisce l'eccesso angolare di un triangolo geodetico tracciato su di una superficie qualunque, mediante la sua curvatura integra, e che si riduce al teorema di Cavalieri nel caso del triangolo sferico.

Rappresentando ora conformemente la (S) su di un'altra superficie (S'), con che il circuito (c) si trasformerà nel circuito (c'), ed essendo la curvatura tangenziale di (c') legata a quella di (c) dal teorema di Schols che introduce, oltre al modulo di deformazione, anche le sue derivate prime, dal confronto fra le due espressioni della curvatura tangenziale integrale si ottiene intanto subito che l'alterazione di questa uguaglia il flusso totale del *gradiente di deformazione* attraverso il circuito od anche, per le formule di Green, l'integrale superficiale su (A) della divergenza di questo gradiente.

Il teorema di Gauss–Bonnet applicato poi alternativamente alle due superfici (S) ed (S') permette di ritrovare per altra via l'equazione differenziale che vincola il modulo di deformazione alle curvature totali delle due superfici.

2. Sia rispettivamente, sulle assegnate superfici (S) ed (S') entrambi regolari

$$(1) \qquad \begin{cases} ds^2 = a_{ij}\, dx^i\, dx^j \\ ds'^2 = a'_{ij}\, dx^i\, dx^j \end{cases} \qquad (i, j = 1, 2).$$

l'espressione del quadrato dell'elemento lineare, in cui è sottintesa, secondo le convenzioni del calcolo tensoriale, la sommazione rispetto agli indici che figurano due volte nel medesimo monomio, una in alto ed una in basso.

Supponendo le due superfici in rappresentazione conforme, e riferite alle medesime coordinate x^i, sarà:

$$(2) \qquad a'_{ij} = e^{2\mu}\, a_{ij} \quad ; \quad a'^{ij} = e^{-2\mu}\, a^{ij}$$

in cui μ, funzione delle sole x^i (e non delle loro derivate), è il logaritmo naturale del modulo di deformazione, ed a^{ij} è il tensore a_{ij} in forma controvariante.

Diremo altresì K e K' le curvature totali delle due superfici in punti che si corrispondono nell'assegnata rappresentazione.

(*) Nella seduta del 14 aprile 1951.

(1) O. BONNET, *Mémoire sur la théorie générale des surfaces.* « Journal de l'Ecole Polytechnique », vol. 32, p. 131, (1848).

3. Ciò premesso, consideriamo su (S) una curva (c) chiusa, priva di nodi, che limiti la porzione (A) regolare di superficie al suo interno; non escluderemo che la curva (c) possa presentare un numero n finito di cuspidi. Indicando in quest'ultimo caso con θ_α ($\alpha = 1, 2, \cdots, n$) gli angoli esterni formati dalle normali nelle cuspidi, e con γ la curvatura tangenziale di (c) (positiva quando la curva volge la convessità verso l'interno), regge il teorema di Gauss–Bonnet [2]

$$(3) \qquad \iint_{(A)} K\, dS = 2\pi - \sum_{\alpha=1}^{n} \theta_\alpha + \int_{(c)} \gamma\, ds = 2\pi - \sum_{\alpha=1}^{n} \theta_\alpha - \Gamma$$

in cui il primo integrale superficiale rappresenta la curvatura integra dell'area (A), Γ la curvatura tangenziale integrale del circuito percorso lasciando l'area (A) a destra, e $dS = \sqrt{\Delta}\, dx^1\, dx^2$ l'elemento d'area, essendo Δ il determinante delle a_{ij}.

Se ora la μ è a sua volta regolare entro l'area considerata, una formula del tutto analoga vale su (S′) per la curva (c') trasformata della (c) nell'assegnata rappresentazione conforme. Notiamo che per la conformità della rappresentazione sarà $\theta'_\alpha = \theta_\alpha$, e che per il teorema di Schols che fornisce l'alterazione di curvatura tangenziale si ha

$$(4) \qquad \gamma' = e^{-\mu}\gamma - \frac{d\mu}{dn}$$

dove con γ' si è indicata la curvatura tangenziale di (c'); $d\mu/dn$ rappresenta poi la derivata di μ presa nei punti di (c') in direzione della normale $\boldsymbol{n}'$ alla curva stessa, con $\boldsymbol{n}'$ tale che la coppia di versori $(\boldsymbol{n}', \boldsymbol{t}')$ sia destrorsa ($\boldsymbol{t}'$ è il versore della tangente); se ν^i sono le componenti controvarianti di $\boldsymbol{n}'$ si ha dunque

$$(5) \qquad \frac{d\mu}{dn} = \operatorname{grad}\mu \times \boldsymbol{n}' = \frac{\partial \mu}{\partial x^i}\nu^i$$

e tenuto conto che $ds' = e^{\mu}\, ds$ si ha anche ($\mu_i = \partial\mu/\partial x^i$)

$$(6) \qquad \int_{(c')} \gamma' ds' = \int_{(c)} \gamma\, ds - \int_{(c')} \mu_i \nu^i\, ds'$$

e cioè

$$(7) \qquad \Gamma' = \Gamma - \int_{(c')} \operatorname{grad}\mu \times \boldsymbol{n}'\, ds' = \Gamma - \int_{(c')} \mu_i \nu^i\, ds'.$$

Chiameremo per semplicità *gradiente di deformazione* il vettore grad μ, le cui componenti covarianti sono, sia su (S) che su (S′), le μ_i; ed avremo dunque che *l'alterazione della curvatura tangenziale integrale di un circuito chiuso uguaglia, in una rappresentazione conforme, il flusso del gradiente di deformazione attraverso il circuito stesso.*

Per il carattere invariantivo delle operazioni considerate, e per la conformità della rappresentazione, è indifferente se questo flusso viene calcolato sulla (S) o sulla (S′).

(2) Vedi ad esempio L. P. Eisenhart, *An Introduction to Differential Geometry*. Princeton University Press, p. 191, (1947).

4. Se ora si osserva che nell'ipotesi ammessa in cui μ sia regolare nell'area considerata, l'integrale di linea che fornisce detto flusso può essere trasformato, con le formule di Green, in un integrale di superficie esteso a tutta l'area racchiusa dal circuito, secondo la formula [3]

$$(8) \qquad \int_{(c')} \mu_i \nu^i \, ds' = \iint_{(A')} \mu'^i{}_{/i} \, dS'$$

in cui $\mu'^i{}_{/i}$ rappresenta il secondo parametro differenziale $(\Delta_2 \mu)_{S'} = \operatorname{div} \operatorname{grad}_{S'} \mu$, di μ su (S'); onde osservando che, indicato con Δ' il determinante delle a'_{ij} si ha

$$(9) \qquad \Delta' = e^{4\mu} \Delta \quad ; \quad a'^{ij} = e^{-2\mu} a^{ij}$$

e quindi

$$(10) \qquad \mu'^i{}_{/i} = \frac{1}{\sqrt{\Delta'}} \frac{\partial (\sqrt{\Delta'} a'^{ij} \mu_j)}{\partial x^i} = e^{-2\mu} \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \frac{\partial (\sqrt{\Delta} a^{ij} \mu_j)}{\partial x^i} = e^{-2\mu} \mu^i{}_{/i},$$

si può scrivere anche

$$(11) \qquad \Gamma' - \Gamma = - \iint_{(A')} (\Delta_2 \mu)_{S'} \, dS' = - \iint_{(A)} (\Delta_2 \mu)_S \, dS$$

perchè ovviamente $dS' = e^{2\mu} dS$.

Si ha dunque: *l'alterazione della curvatura tangenziale integrale di un circuito chiuso uguaglia altresì, in una rappresentazione conforme, l'integrale superficiale della divergenza del gradiente di deformazione esteso all'area interna al circuito.*

5. Poichè per le cose dette e dalle (3) risulta

$$(12) \qquad \Gamma' - \Gamma = - \iint_{(A)} K \, dS + \iint_{(A)} e^{2\mu} K' \, dS = - \iint_{(A)} (\Delta_2 \mu)_S \, dS =$$

$$= - \iint_{(A')} e^{-2\mu} K \, dS' + \iint_{(A')} K' \, dS' = - \iint_{(A')} (\Delta_2 \mu)_{S'} \, dS'$$

segue, per l'arbitrarietà del circuito considerato,

$$(13) \qquad \begin{cases} \mu^i{}_{/i} = (\Delta_2 \mu)_S = K - K' e^{2\mu} \\ \mu'^i{}_{/i} = (\Delta_2 \mu)_{S'} = K e^{-2\mu} - K'. \end{cases}$$

Queste formule furono già trovate per altra via [4] e vengono messe ora in nuova luce dalle considerazioni svolte, che forniscono una relazione fra il teorema di Schols e l'equazione differenziale che lega il modulo di deformazione alle curvature totali delle due superfici in rappresentazione conforme.

(3) L. P. EISENHARD, loc. cit.; vedi anche P. BURGATTI, *I teoremi del gradiente, della divergenza, della rotazione sopra una superficie, ecc.* « R. Acc. delle Scienze dell'Ist. di Bologna », ser. VII, t. IV, 1916-17, pp. 3-12; e *Memorie Scelte*, pp. 201-212, Zanichelli, 1951.

(4) A. MARUSSI, *Su alcune proprietà fondamentali delle rappresentazioni conformi fra superfici qualunque.* « Boll. di Geod. », n. 2, 1951.

6. Scende come corollario che quando la superficie (S′) è piana (teoria delle carte geografiche), e cioè $K' = 0$, l'alterazione della curvatura tangenziale, integrale di un circuito uguaglia la curvatura integra dell'area obbiettiva in esso racchiusa su (S) e cioè l'eccesso angolare rispetto a 2π del suo contorno; eccesso che risulta altresì misurato dal flusso totale del gradiente di deformazione attraverso il circuito.

Nel caso ancor più particolare che il circuito (c) su (S) sia quello di un triangolo geodetico ($\Gamma = 0$), si ha dunque per l'eccesso angolare

$$(14) \qquad 2\pi - \sum_{\alpha=1}^{3} \theta_\alpha = \iint_{(A')} (\Delta_2 \mu)_{S'} \, dS' = \int_{(c')} \operatorname{grad} \mu \times \boldsymbol{n}' \, ds'$$

e cioè *l'eccesso angolare di un triangolo geodetico uguaglia il flusso totale del gradiente di deformazione della sua immagine in una qualsiasi rappresentazione conforme sul piano, od anche l'integrale della divergenza di questo gradiente, esteso a tutta l'area interna a detta immagine.*

Se poi ambedue le superfici S ed S′ fossero piane, si avrebbe

$$(15) \qquad \Gamma = \Gamma'$$

e quindi: *in qualsiasi rappresentazione conforme del piano in sè, l'alterazione della curvatura tangenziale integrale è nulla per qualsiasi circuito*; ciò che è conseguenza immediata dell'essere armonico, in questo caso, il logaritmo del modulo di deformazione.

Fisica. — *Diffrazione di raggi X nei miscugli benzolo-tetracloruro di carbonio.* Nota di Francesco Cennamo, presentata (*) dal Socio A. Carrelli.

In questa Nota si espongono i risultati ottenuti nello studio della diffrazione dei raggi X nei miscugli benzolo-tetracloruro di carbonio. In una Nota precedente (1) sono stati presentati i risultati relativi ai miscugli benzolo–alcool etilico: si è studiato cioè il comportamento del benzolo in presenza di un liquido polare, e si è mostrato che l'intensità dei raggi diffratti, misurata in corrispondenza del massimo, non varia secondo una legge lineare al variare della concentrazione molecolare, ma presenta un massimo in corrispondenza del miscuglio al 66, 66% di benzolo.

Si è ora voluto studiare invece il comportamento dell'anello di diffrazione caratteristico del benzolo in miscugli nei quali l'altro componente sia un liquido non polare.

La lunghezza d'onda adoperata è anche in questo caso la K_α del Cu ed il fascetto di raggi X è reso monocromatico con un filtro di Ni.

(*) Nella seduta del 10 marzo 1951.

(1) F. Cennamo, *Diffrazione dei raggi X nei miscugli Benzolo-Alcool etilico.* «Rend. Acc. Lincei», vol. IX, 2° semestre, p. 339 (1950).

Sono state eseguite due serie di misure, ciascuna con camera di diffrazione diversa: in una la lastra fotografica era posta a 41 mm. dalla vaschetta contenente il liquido ed il fascio incidente utilizzato aveva un diametro di 1,8 mm.; nell'altra la lastra fotografica era disposta a 24 mm. dalla vaschetta ed il fascetto incidente aveva un diametro di 0,8 mm.

Tutte le fotografie sono state ottenute con la stessa posa (1 ora), e nelle stesse condizioni di funzionamento del tubo a raggi X: in ogni modo un dispositivo che sarà altrove descritto permetteva su ciascuna lastra di registrare, contemporaneamente agli aloni di diffrazione, marche d'intensità; sicchè dagli annerimenti, misurati al solito col microfotometro, si poteva passare alla distribuzione delle intensità ed in modo che i risultati ottenuti con le diverse lastre risultassero fra di loro confrontabili.

Sono state adoperate per l'una serie di misure le pellicole radiografiche Tipo U della Ferrania e per l'altra serie le pellicole Tipo N della stessa Casa.

Sono stati studiati i miscugli con le seguenti concentrazioni molecolari:

$f_1 = 100$; $f_2 = 0 \div f_1 = 95{,}3$; $f_2 = 4{,}7 \div f_1 = 94{,}5$; $f_2 = 5{,}5 \div f_1 = 92{,}8$; $f_2 = 7{,}2 \div f_1 = 89{,}8$; $f_2 = 10{,}2 \div f_1 = 84{,}5$; $f_2 = 15{,}5 \div f_1 = 82{,}0$; $f_2 = 18{,}0$,

in cui f_1 ed f_2 rappresentano rispettivamente il percento di molecole di benzolo e di tetracloruro di carbonio presenti nel miscuglio.

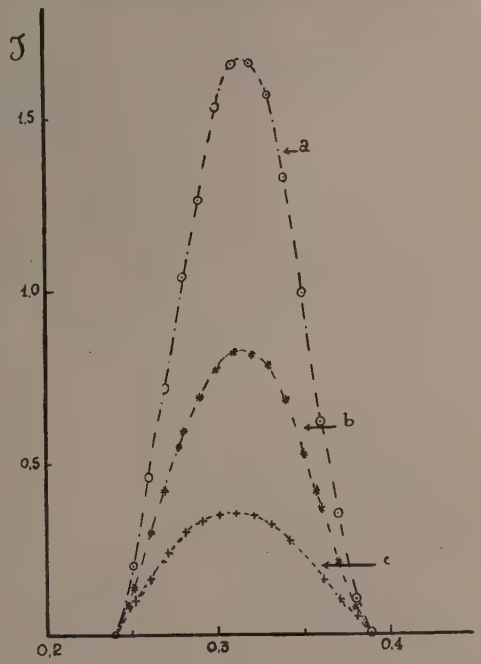


Fig. 1.

Le microfotometrie relative alle varie lastre, eseguite lungo un diametro dell'alone, venivano dapprima trasformate in intensità, i valori così ottenuti per le intensità misurate in corrispondenza dei diversi angoli di diffrazione θ erano poi moltiplicati per $1/\cos^3\theta$ in modo da rendere paragonabili le intensità misurate in corrispondenza dei diversi punti della lastra piana, usata nel nostro caso.

Ottenuta così la distribuzione delle intensità in funzione degli angoli di diffrazione, veniva detratto per ciascuna curva il continuo prodotto della diffusione dei raggi X che deriva da cause varie. In fig. 1 sono riportate alcune delle curve così ottenute: la curva *a*) rappresenta la distribuzione delle intensità relativamente al benzolo, le curve *b*) e *c*) dànno invece le distribuzioni d'intensità relative rispettivamente ai miscugli con $f_1 = 95{,}3$ ed $f_1 = 92{,}0$ (per cento di benzolo); le intensità, segnate sulle ordinate, sono riportate in funzione degli

angoli di diffrazione espressi in radianti e riportate sulle ascisse e sono paragonabili fra di loro per le varie curve.

In fig. 2 è riportato l'andamento del massimo di intensità dell'alone caratteristico del benzolo in funzione di f_2 e cioè del numero di molecole di tetracloruro di carbonio presenti nel miscuglio.

Come si vede vi è una rapidissima diminuzione della intensità del massimo caratteristico del benzolo col crescere della diluizione. È da osservare inoltre che nei vari miscugli la posizione di detto massimo, per lo meno entro i limiti degli errori sperimentali, è indipendente dal numero di molecole di tetracloruro disciolte nel benzolo, e che con il tempo di posa impiegato l'intensità dei raggi diffratti dal tetracloruro, in corrispondenza degli angoli per cui col benzolo si ha il caratteristico alone, è trascurabile.

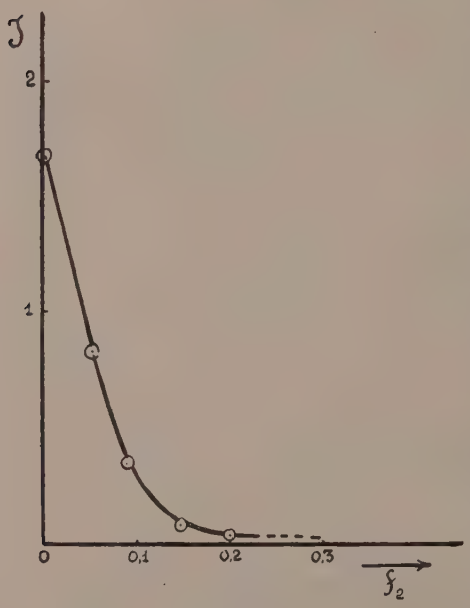


Fig. 2.

I risultati ottenuti possono evidentemente interpretarsi ammettendo che la presenza di molecole di tetracloruro, anche in piccolo numero (20 %), elimina, nell'interno della massa liquida quelle « speciali condizioni » che producono la comparsa dell'anello di diffrazione caratteristico del benzolo corrispondente ad una distanza reticolare di 4,87 Ä (distanza calcolata con la nota formula di Bragg: $\lambda = 2\,d\,\mathrm{sen}\,\theta/2$). Dallo studio delle curve che dànno, per i diversi miscugli, la distribuzione delle intensità in funzione degli angoli di diffrazione, si è potuto inoltre stabilire che, in corrispondenza della notevole diminuzione della intensità del massimo, si nota un cospicuo aumento della larghezza dell'alone. In fig. 3 sono riportati, in funzione di f_2 e cioè della concentrazione molecolare del tetracloruro, i valori della larghezza dell'anello definita dall'espressione: $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$ essendo θ_1 e θ_2 gli angoli di diffrazione nelle cui direzioni l'intensità assume il valore $I_0/2$, e cioè metà del valore dell'intensità I_0 del massimo.

Tra le diverse teorie che sono state proposte allo scopo d'interpretare la distribuzione dell'intensità dei raggi X diffratti dai liquidi e la posizione dei massimi, quella di C. V. Raman e K. R. Ramanathan [2] considera le molecole di un liquido come centri di diffrazione orientati a caso e distribuiti in media uniformemente a distanza d_0. Un tal mezzo, attraversato da un fascetto monocromatico di raggi X con $\lambda < d_0$ deve dar luogo ad un anello

(2) C. V. Raman e K. R. Ramanathan, « Proc. Ind. Ass. Cultiv. Sc. », *8*, p. 127 (1923).

di diffrazione dalle cui dimensioni si può, con la formula di Bragg risalire al valore di d_0.

Gli Autori, basandosi sulle fluttuazioni delle distanze tra le molecole, che calcolano in funzione del coefficiente di compressibilità isotermica del liquido, stabiliscono l'andamento teorico della intensità dei raggi diffratti nelle diverse direzioni in funzione di d che è una grandezza che soddisfa alla relazione: $\lambda = 2d \operatorname{sen} \theta/2$ [3]. In base alla formula proposta da Raman e Ramanathan si ricava per la larghezza dell'alone la seguente espressione:

$$(1) \qquad \Delta d = d_2 - d_1 = d_0 \left[\sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{16 k T \beta}{d_0^3}} \log_e 2} - \sqrt[3]{1 - \sqrt{\frac{16 k T \beta}{d_0^3}} \log_e 2} \right]$$

nella qualle k è la costante di Boltzmann, T la temperatura assoluta, β come si è detto il coefficiente di compressibilità del liquido e d_1 d_2 rappresentano i valori assunti dalla $d = \lambda/2 \operatorname{sen} \theta/2$ per gli angoli di diffrazione θ_1 e θ_2, in corrispondenza dei quali l'intensità assume il valore: $I = I_0/2$.

Supponendo di poter estendere la teoria citata anche al caso dei miscugli, si è proceduto al calcolo della larghezza Δd dell'alone per i miscugli studiati in base alla formula dianzi citata.

I valori dei coefficienti di compressibilità sono stati dedotti dalla curva sperimentale di Parshad [4], determinata con gli ultrasuoni; tali valori sono relativi ai coefficienti di compressibilità adiabatica ma per i liquidi tale coefficiente può, per lo meno in prima approssimazione, considerarsi proporzionale a quello di compressibilità isotermico.

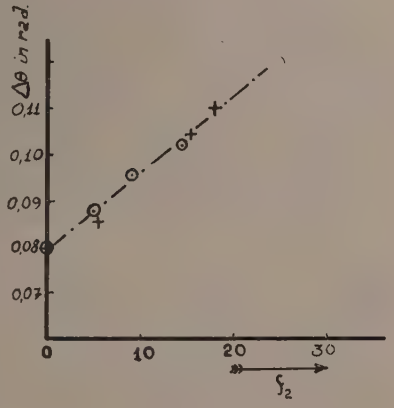


Fig. 3.

Nella tabella I sono riportati, in corrispondenza di alcuni miscugli, i valori di tali coefficienti di compressibilità e, rispettivamente nella terza e quarta colonna i valori di Δd calcolati in base alla formula citata ed i valori di $\Delta d'$ ricavati dalle nostre curve sperimentali, valori che evidentemente dovrebbero risultare proporzionali a Δd.

In fig. 4 sono riportati i quozienti $\Delta d/\Delta d'$ in funzione di f_2; come si vede, tali rapporti non sono, al crescere di f_2, costanti il che significa che l'andamento sperimentale di $\Delta d'$ in funzione di f_2 è notevolmente diverso dall'andamento che si può prevedere in base alla citata teoria.

Si ricava perciò dai nostri risultati che già il 20% di molecole di un liquido non polare riduce moltissimo l'intensità dell'anello del benzolo (fig. 2) e che

(3) Gli Autori hanno calcolato la curva di distribuzione dell'intensità dei raggi diffratti dal benzolo in base alla formula da loro proposta ed hanno confrontato tale curva con quella relativa ai risultati sperimentali ottenuti da C. W. HEWLETT, «Phys. Rev.», 20, 688 (1922) per lo stesso liquido. L'accordo sembra soddisfacente.

(4) R. PARSHAD, «Jndian J. of Phys.», Bd. 16 (1942) p. 1.

l'aumento riscontrato nella larghezza della banda al crescere di f_2 non può essere giustificato pienamente con l'andamento del coefficiente di compressibilità secondo quanto previsto dalla teoria di Raman e Ramanathan.

Tabella I.

Miscuglio		$\beta \cdot 10^{12}$ cm²/dine	$\Delta d \cdot 10^8$ calc.	$\Delta d' \cdot 10^8$ oss.
f_1	f_2			
100	0	64,9	1,73	1,27
95	5	66,2	1,75	1,45
90	10	67,2	1,77	1,62
85	15	68,0	1,78	1,87
80	20	68,7	1,79	2,12

Interpretando invece l'anello del benzolo secondo l'ipotesi cibotattica e cioè come dovuto a raggruppamenti di molecole orientate in seno al liquido, si può per ora concludere che, mentre un liquido polare come l'alcool etilico favorisce, come si è visto, la formazione di tali raggruppamenti producendo così un aumento della intensità del massimo, un liquido non polare come il tetracloruro di carbonio distrugge invece tali raggruppamenti i quali diminuiscono di numero al crescere della sua concentrazione (vedi fig. 2 notevole diminuzione dell'intensità del massimo al crescere di f_2) e diminuiscono probabilmente anche di grandezza. Riservandoci di tornare in modo più completo sull'argomento ricordiamo infatti che la larghezza dell'alone in una figura di Debye dipende dalle dimensioni del granulo cristallino nel senso che al decrescere di tali dimensioni aumenta la larghezza dell'alone stesso.

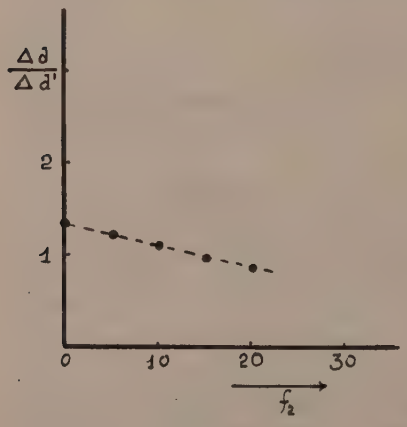


Fig. 4.

Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica Sperimentale dell'Università degli Studi di Napoli. Si ringrazia vivamente il prof. Antonio Carrelli, Direttore dell'Istituto, per i mezzi messi a disposizione.

Mineralogia. — *I minerali del gruppo dell'Ortler.* - II. *Actinolite di Malga Mont in Val di Rabbi e di Celledizzo in Val di Peio.*(*). Nota di ROSSANA PIRANI, presentata(**) dal Corrisp. C. ANDREATTA.

Nella Valle di Cercen, lungo il torrentello che scende dal Monte Sole fra Malga Fasa e Malga Mont Alta, si estende una vasta placca di detriti di falda e sedimenti morenici che coprono buona parte del versante settentrionale della stessa valle. Sotto questa vasta coltre è nascosto il maggior tratto dell'affioramento della nota « Linea di Peio »(1). Poco a nord della grande dislocazione in prossimità della Malga Mont nel solco scavato dal torrentello suddetto, una sottile lama di calcare saccaroide si trova a contatto con ortogneis pegmatitici.

Il calcare è quasi ovunque trasformato, per azione di contatto pneumatolitica fino ad idrotermale, in calcefiro a chiazze bianche e verdi molto caratteristico; le chiazze verdi sono precisamente formate da actinolite in cristalli prismatici della lunghezza media di parecchi centimetri, che possono raggiungere anche un decimetro, riuniti in associazioni raggiate o subparallele, associati a calcite bianca–azzurrina in grossi cristalli che riempiono gli interstizi fra i singoli prismi.

Microscopicamente si nota che l'actinolite è accompagnata, oltre che da calcite, anche da piccole quantità di titanite, epidoto, pirite e biotite.

La *calcite* in aggregati di cristalli è abbondantemente diffusa in tutta la roccia penetrando anche entro le fratture di actinolite. I cristalli più grossi al microscopio appaiono incolori, di lucentezza vitrea, costantemente geminati, includenti spesso cristalli di titanite. Si trova pure una calcite a struttura nettamente milonitica, triturata e sbriciolata, che sutura le fratture e gli scivolamenti fra i cristalli di actinolite.

La *titanite* è di colore bruno, di lucentezza resinosa, ora in forma di minuti granuli, ora di aghetti, isolati o anche in piccoli aggregati di cristalli.

L'*epidoto* si trova distribuito in forma di fini granulazioni nella calcite e associato, in grossi elementi fortemente cribrosi e deformati, ai cristalli di actinolite. La forma prismatica, la lucentezza vitrea tendente alla madreperlacea, il rilievo alto e la birifrazione bassa, assieme ai colori anomali di interferenza e al colore giallino appena accennato, fanno attribuire il minerale alla clinozoisite.

La *pirite* si trova diffusa un po' ovunque e deriva evidentemente dall'azione idrotermale di soluzioni di media e bassa termalità.

La *biotite*, infine, presente esclusivamente entro le masse di calcite, è frequentemente cloritizzata.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia e Petrografia dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 14 aprile 1951.

(1) CIRO ANDREATTA, *La « Linea di Peio » nel massiccio dell'Ortler e le sue miloniti.* « Acta Geologica Alpina », I, Bologna 1948.

L'*actinolite* di colore verde o verde–giallo si presenta talora in associazioni fibroso–raggiate di elementi minuti e sottili come quelli delle varietà di amianto, oltre che in elementi colonnari prismatici lunghi diversi centimetri con disposizione subparallela. Essi non presentano terminazioni nette e non si prestano a misurazioni goniometriche.

Spesso i cristalli di actinolite sono, come dissi, associati e compenetrati variamente con la calcite. Il pleocroismo è visibile sebbene i cristalli appaiano poco colorati in sezione sottile. L'estinzione è quasi sempre ondulata causa deformazioni e fratturazioni subìte dai cristalli.

L'angolo massimo di estinzione $z - \gamma$ è di circa 20°.

Gli indici di rifrazione determinati con la luce monocromatica ottenuta con filtro Lifa n. 395 per la linea D = 586, risultano:

$$\alpha = 1{,}605 \pm 0{,}002$$
$$\beta = 1{,}623 \pm 0{,}002$$
$$\gamma = 1{,}636 \pm 0{,}002$$

con una birifrazione calcolata di:

$$\gamma - \alpha = 0{,}023.$$

L'angolo tra gli assi ottici misurato al tavolino di Fedoroff è sempre negativo:

$$2V = 81° -.$$

Per la determinazione del peso specifico e della composizione chimica è stato usato materiale puro scelto accuratamente con l'aiuto del microscopio binoculare.

Il peso specifico medio è:

$$\text{p. s.} = 3{,}09.$$

L'analisi chimica ha dato i seguenti risultati:

	% in peso		Quoz. atom.			
SiO_2	54,81	Si	0,9126		7,332	$z = 8{,}000$
					0,668	
Al_2O_3	5,68	Al	0,1114	0,901		
					0,233	
TiO_2	0,12	Ti	0,0015		0,012	
Cr_2O_3	0,02	Cr	0,0002		0,001	
MnO	0,26	Mn	0,0037		0,029	$y = 5{,}683$
FeO	0,12	Fe	0,0017		0,013	
MgO	27,08	Mg	0,6716		5,395	
CaO	8,75	Ca	0,1560		1,253	
Na_2O	0,72	Na	0,0232		0,186	$x = 1{,}492$
K_2O	0,31	K	0,0066		0,053	
H_2O+	1,90	OH	0,2110		1,695	
H_2O-	0,30	O	2,6325		22,000	
	100,07					

Per la determinazione della formula sono state seguìte le stesse modalità che per l'anfibolo di Val Madriccio trattato nella precedente Nota [2]; e cioè riunendo i diversi elementi vicarianti nei tre aggruppamenti x, y, z.

In tal modo, a questa actinolite va attribuita la seguente formula

$$x_{1,5}\ y_{5,7}\ z_{8,0}\ O_{22,0}\ (OH)_{1,7}.$$

I valori dei singoli aggruppamenti appaiono non perfettamente corrispondenti ai teorici, tuttavia l'eccesso che si può notare nell'aggruppamento y compensa quasi esattamente la deficienza dell'aggruppamento x. Il calcolo delle valenze positive e negative ha dimostrato la perfetta compensazione reciproca.

Nella Val di Peio, entro una formazione di micascisti e paragneis di catazona, si estendono lame di marmo saccaroide associato a filoncelli e intercalazioni di ortogneis pegmatitico. Tali marmi ed ortogneis sono diffusi nella formazione di questi paragneis e micascisti, lungo una fascia che fu distinta col nome di « serie del Tonale ».

Le lenti di calcare presentano frequentemente azioni metamorfiche di contatto di tipo pneumatolitico, sia dove esse sono a diretto contatto con le rocce pegmatitiche, sia anche quando tale contatto non esiste. Una delle più notevoli conseguenze di queste azioni di contatto è stata l'origine di una mineralizzazione a magnetite e pirrotina, mineralizzazione che ha provocato in diverse epoche una più o meno intensa coltivazione minerale; per più precise notizie su questi giacimenti rimando al lavoro di C. Andreatta [3].

Nel ripido canalone denominato Tof della Cagnola, assieme a più o meno vaste chiazze di mineralizzazione, si trovano anche frequenti calcefiri di contatto, ricchi di noduli di actinolite, di enstatite e di vari altri silicati calciferi di contatto.

Un'analisi microscopica ha permesso di osservare che i noduli di actinolite sono costituiti, oltre che dall'anfibolo monoclino, da calcite, muscovite, clorite, titanite, rutilo, pirite, magnetite e idrossidi vari di ferro.

La *calcite* bianco-lattea ha struttura saccaroide, grana variabile da media a piccola, struttura da nettamente milonitica fino a cataclastica con le cataclasi suturate da minute cristallizzazioni posteriori.

La *muscovite* è distribuita in mezzo alle masse spatiche di calcite; è incolora, con pleocroismo lievissimo, lucentezza madreperlacea, rilievo debole, colori di interferenza vivaci e iridescenti.

(2) CIRO ANDREATTA e ROSSANA PIRANI, *I Minerali del gruppo dell'Ortler – I. Actinolite e biotite di Val Madriccio.* Dai « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », vol. IX, 2° sem. 1950.

(3) CIRO ANDREATTA, *I giacimenti ferriferi della regione Boai–Comasine in Val di Peio (Trentino)*, da « La Ricerca scientifica », anno X, n. 6 (giugno 1939), p. 515.

La *clorite* in lamelle irregolari, fortemente stirate, è concresciuta con la mica dalla quale deriva con ogni probabilità; il pleocroismo è sensibile:

$$\alpha = \beta = \text{verde molto pallido}$$

$$\gamma = \text{incoloro.}$$

L'estinzione è molto ondulata e inclinata su s di un angolo di circa 10°. Per tale proprietà e per lo scoloramento delle lamelle, tale clorite si deve ascrivere al tipo delle amesiti.

È inoltre frequente nelle lamine un'impregnazione di aghetti di *rutilo*, ora in disposizione raggiata, ora geminati con la tipica associazione sagenitica.

Anche in questa roccia le fratture appaiono suturate da sostanze varie di origine idrotermale; così *pirite* in parte alterata in ossidi e idrossidi, che però non possono essere distinti microscopicamente gli uni dagli altri causa la struttura molto finemente granulare.

L'*actinolite*, anche questa di colore verdastro, presenta una disposizione prevalentemente subparallela dei cristalli prismatici che appaiono stirati e quasi laminati con le terminazioni impiantate nei grossi cristalli di calcite. Presenta una estinzione inclinata con angolo massimo di 21°. A luce monocromatica (filtro Lifa n. 395 linea D = 586), gli indici sono risultati:

$$\alpha = 1{,}615 \pm 0{,}002$$

$$\beta = 1{,}618 \pm 0{,}002$$

$$\gamma = 1{,}634 \pm 0{,}002.$$

La birifrazione sempre negativa è abbastanza alta:

$$\gamma - \alpha = 0{,}019.$$

Il pleocroismo è:

α = incoloro–brunastro,

β = verde pallidissimo, giallo–bruno,

γ = verde pallido.

L'angolo degli assi ottici determinato al tavolino universale su cinque individui è in media:

$$2V = 81° —.$$

Il peso specifico calcolato col picnometro è:

$$\text{p. s.} = 3{,}14.$$

La composizione chimica di tale actinolite non differisce molto da quella di Malga Mont, ed è precisamente la seguente:

	% in peso		Quoz. atom.			
SiO_2	54,27	Si	0,9036		7,3476	$z = 8,0000$
				0,7855	0,6524	
Al_2O_3	4,92	Al	0.0966		0,1331	
Cr_2O_3	0,03	Cr	0,0004		0,0033	
FeO	0,22	Fe	0,0031		0,0252	$y = 5,3089$
MnO	0,18	Mn	0,0025		0,0203	
MgO	25,42	Mg	0,6305		5,1270	
CaO	11,31	Ca	0,2017		1,6400	
Na_2O	1,20	Na	0,0388		0,3155	$x = 2,0092$
K_2O	0,31	K	0,0066		0,0537	
H_2O+	1,94	OH	0,2154		1,7515	
H_2O-	0,26	O	2,7055		22,0000	
	100,06					

La formula del minerale determinata uguagliando il quoziente atomico dell'ossigeno a 22,0000 è la seguente:

$$x_{2,0}\ y_{5,3}\ z_{8,0}\ O_{22,0}\ (OH)_{1,8}.$$

L'eccedenza che si osserva nell'aggruppamento y compensa la deficienza apportata dall'Al''' che sostituisce il Si^{IV}: d'altra parte l'esattezza della formula è convalidata dal fatto che le somme totali delle valenze dei cationi e degli anioni si corrispondono perfettamente.

Biologia. — *L'andamento dell'ipertrofia reattiva in alcuni aspetti della cromatolisi della cellula nervosa*(*). Nota di GIORGIO M. BAFFONI, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

L'ipertrofia cellulare è un fenomeno reattivo che si verifica in numerosi tessuti nel corso di alterazioni varie; è stata da tempo descritta in elementi epiteliali e connettivali (Ranvier 1897) o infiammatori, sia di origine infettiva (Dominici 1920) che di origine irritativa (Lacaste 1913); elementi ipertrofici inoltre sono stati osservati in numerosi tessuti cancerigni (Sokoloff 1922) e nei blastemi rigenerativi (Maximov 1906); l'ipertrofia cellulare è caratterizzata da una diminuzione del rapporto nucleo–plasmatico (N/P), fenomeno che da alcuni Autori è stato messo in rapporto causale con l'attività mitotica dei tessuti (Hertwig 1909); l'aver riscontrato abbassamenti del rapporto nucleo–plasmatico anche in elementi in degenerazione (Wendelstadt 1904) ed in tessuti differenziati,

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia dell'Università di Cagliari diretto dal prof. A. Stefanelli.

(**) Nella seduta del 10 marzo 1951.

indipendentemente da ogni attività mitotica (Unna 1894, Morpurgo 1898), hanno limitato la portata di tale analogia [1].

Fenomeni di ipertrofia, infatti, sono stati spesso descritti nella cellula nervosa differenziata, elemento tipicamente *perenne* [2] e perciò priva affatto di attività mitotica; tale ipertrofia è un aspetto reattivo che si nota nel neurone durante i suoi processi riparativi o le sue modificazioni fisiologiche; essa è stata descritta:

a) durante la rigenerazione dell'assone (reazione retrograda) (Nissl 1892, Lugaro 1895, Ballet e Dutil 1897, Marinesco 1897, Van Gehuchten 1897, Schafferer 1912, Spatz 1920, Terni 1920, Zannone 1947, ecc.);

b) negli stati di iperfunzione, quale quello determinato da moderata stimolazione elettrica (Lugaro 1895, Van Gehuchten 1897, Pugnat 1898–1901);

c) nelle alterazioni primarie, provocate da eccessivo affaticamento (Holmes 1903, Dolley 1913), da vari agenti tossici (Nissl 1895, Lugaro 1897, Ewing 1898, Goldschneider e Flatau 1898, Chantemesse e Marinesco 1898, Sjöwall 1903, Minassian 1904, Mourre 1904) e nel corso di alterazioni patalogiche di diversa natura (Lugaro 1898, Goldschneider e Flatau 1898, Mott 1902, Marinesco 1909, Rossi 1912, ecc.).

In tutti questi casi all'ipertrofia si accompagnano però alterazioni caratteristiche della tigroide: nel primo caso si ha costantemente la cromatolisi perinucleare (Nissl 1892, Lugaro 1895, Ballet e Dutil 1897, Van Gehuchten 1897, Marinesco 1897, Hydén 1943, Turner 1943, Bodian 1947, Zannone 1947, ecc.), nel secondo caso la cromatofilia (Lugaro 1895, Hydén 1943, ecc.) e nel terzo caso la cromatolisi diffusa (Mann 1894, Van Gehuchten 1897, Goldschneider e Flatau 1898, Holmes 1903, Sjöwall 1903, Spielmeyer 1922, Bielschowscky 1935, Kimura e Niimi 1940, Hydén 1943, Follis e Wintrobe 1945, Spiegel E. A., Spiegel A. M. e Wyeis 1947 ecc.); è comunque interessante constatare che gli elementi nervosi reagiscono a determinati stimoli con variazioni volumetriche del pirenoforo e con particolari modificazioni morfologiche della tigroide; ciò è oggi comprensibile essendo nota l'importanza della tigroide (contenente notevoli quantità di ribo–nucleotidi) nei processi di sintesi proteica del neurone (Hydén 1943, Bodian e Mellors 1944, Howe e Mellors 1945, Scharrer, Palay e Nilges 1945, Howe e Flexner 1947, Bodian 1947) [3].

Alcuni Autori (Nissl, Marinesco, Spatz, Spielmeyer) hanno interpretato la cromatolisi come un semplice effetto di diluizione della tigroide dovuta all'aumentato stato di imbibizione del citoplasma (ipertrofia) della cellula nervosa, ma le ricerche più moderne (Hydén, Bodian, ecc.) dimostrano la reale trasformazione chimica e la distruzione della sostanza cromofila.

(1) Ved. E. Fauré–Fremiet, *La cinétique du développement* (Paris 1925).

(2) Alberto Stefanelli (in c. st. in questi «Rendiconti», 1951) ha potuto dimostrare, con osservazioni su larve di Anfibi e su embrioni di pollo, l'esistenza di *neuroni a ciclo larvale* e di *neuroni a ciclo embrionale* i quali, distruggendosi fisiologicamente prima della morte dell'organismo, limitano il concetto di *perennità* attribuito agli elementi nervosi da Bizzozzero (1893).

(3) Ved. bibl. in: G. Marinesco, *La Cellule Nerveuse* (Paris 1909); H. Hydén, «Acta Physiol. Scandinava», vol. 6°, suppl. XVII (1943); «Symp. Soc. Experim. Biol.», vol. 1° (Nucleic Acid) p. 152 (1947); D. Bodian, «Symp. Soc. Experim. Biol.», vol. 1°, p. 163 (1947).

La presente ricerca fa parte di una serie di lavori impostati da Stefanelli [4] (1947–51) sui problemi della determinazione e del differenziamento istologico del neurone, intesi a mettere in evidenza col metodo sperimentale e morfo-ecologico le modificazioni strutturali e biochimiche che sono strettamente collegate con la funzionalità specifica; a tal proposito ricordo che un'allieva di Stefanelli (Zannone [5] 1947), esaminando dopo 10 giorni dalla provocata autotomia i fenomeni della rigenerazione del midollo spinale di un geko, ha dimostrato la ipertrofia reattiva delle cellule delle corna anteriori ed ha descritto in esse il quadro della cromatolisi perinucleare.

In una precedente Nota (Baffoni [6] 1950), sperimentando sui fenomeni reattivi delle cellule del midollo spinale, eseguendo l'asportazione della coda con opportuni accorgimenti in maniera da impedire i processi rigenerativi, ho notato che nei primi trenta giorni dall'operazione avviene la degenerazione dei centri nervosi del midollo del moncone che innervavano i metameri più prossimali della coda asportata e che avrebbero altrimenti provveduto all'innervazione di tutta la muscolatura della coda rigenerata (Terni); la degenerazione degli elementi cellulari nervosi insorge con l'ipertrofia e culmina col tipico quadro della cromatolisi diffusa. Ho voluto eseguire pertanto uno studio comparativo tra l'andamento dell'ipertrofia e del quadro citologico della cellula nervosa nel processo rigenerativo (in seguito a provocata autotomia) e in quello degenerativo allo scopo di:

1) precisare se vi è una relazione tra l'andamento della reazione retrograda e quello dell'ipertrofia;

2) stabilire se ed in qual maniera differisce l'ipertrofia cellulare che si accompagna con la cromatolisi perinucleare caratteristica delle cellule che rigenerano l'assone da quella che si verifica durante la cromatolisi diffusa (caratteristica di quegli elementi che nelle mie esperienze non rigenerano la fibra e che successivamente degenerano).

Allo scopo ho allestito due lotti di *Tarentola mauritanica* L. (lunghezza del corpo di mm. 65-71); negli animali di un lotto (35 esemplari) ho provocato l'autotomia della coda al livello più prossimale possibile; in quelli dell'altro lotto (20 animali) fu invece impedito il processo rigenerativo eseguendo tagli anteriormente alla zona di autotomia, nel modo che è stato descritto precedentemente (Baffoni op. cit.). A vari tempi dall'operazione furono sacrificati quattro animali di ogni lotto i cui monconi caudali furono fissati nel liquido di Helly; i midolli, isolati al binoculare, furono inclusi, sezionati (10 μ di spessore) e colorati col metodo di Nissl (al bleu di toluidina).

Di ogni midollo furono misurati dieci elementi delle corna anteriori (su cui erano state seguite le modificazioni della tigroide); il raggio del pirenoforo e del loro nucleo fu ricavato dalla somma dei diametri (massimo e minimo); le cellule misurate furono scelte tra quelle di maggiori dimensioni, comprese tra la settan-

(4) AL. STEFANELLI, «Memorie Acc. Naz. Lincei», vol. 1° (2) (1947); «Quart. Review of Biology» (in c. st. 1951).

(5) L. ZANNONE, «Ricerche di Morfologia», vol. 22°, p. 3 (1947).

(6) G. M. BAFFONI, «Rend. Acc. Naz. Lincei», vol. 8°, p. 389 (1950).

tesima e la ventesima sezione dalla superficie del taglio: ciò onde avere un criterio di valutazione il più esatto possibile per la comparazione.

Le cellule motorie delle corna anteriori del midollo caudale di individui di diversa grandezza (mm. 65, 67, 69, 72), immediatamente dopo la provocata autotomia o il taglio, si presentano di forma allungata; la tigroide in esse è a zolle regolari, ben distinte e quasi uniformemente distribuite nel pirenoforo, un po' più abbondanti in prossimità del nucleo; nel nucleo la cromatina è scarsissima, ma è ben evidente il nucleolo, colorato intensamente dalla toluidina; il diametro massimo del pirenoforo è in media 17,6 μ e il minimo 12 μ; il nucleo misura in media 9,8 μ per 8,6 μ; le differenze dimensionali tra gli individui esaminati, come pure il diverso livello del taglio (dovuto alle due modalità delle operazioni) non influiscono significativamente sulle medie dei diametri dei pirenofori e dei

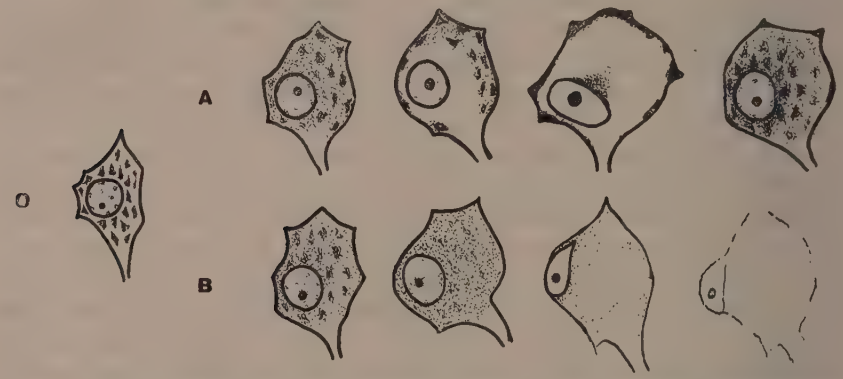


Fig. 1. – Cellule motorie delle corna anteriori del midollo spinale di *Tarentola*: O) controlli; A) aspetti reattivi nella rigenerazione del neurite (cromatolisi perinucleare); B) aspetti reattivi in assenza di fenomeni rigenerativi (cromatolisi diffusa). (Ingrandimento × 600).

nuclei; la variabilità tra gli elementi misurati in uno stesso individuo, infatti, presenta scarti maggiori; perciò i valori surriferiti, come pure quelli del raggio medio (ved. tabella), sono ricavati da misurazioni eseguite ognuna su una quarantina di elementi nervosi.

Nel corso dei fenomeni reattivi conseguenti a provocata autotomia, ho notato, già dopo 40 ore dal fatto traumatico, un arrotondamento di forma ed un lieve aumento volumetrico del pirenoforo, benchè non siano ancora visibili modificazioni a carico della tigroide, a parte qualche sporadico elemento in prossimità della superficie del taglio che si rinviene in cromatofilia diffusa. La cromatolisi perinucleare compare evidente dopo 5 giorni dall'autotomia (fig. 1 *a*); essa raggiunge il suo acme tra il settimo e il decimo giorno: a tale stadio l'elemento motorio ha una forma quasi sferica, il suo diametro è divenuto del 200 % maggiore di quello dei controlli, mentre quello del nucleo (che è eccentrico e di forma allungata) non si è accresciuto che del 65 %; il nucleolo è ingrossato più del doppio rispetto ai controlli ed è ancor più intensamente colorato; a dieci giorni inizia il processo di sintesi di nuova tigroide, come lo si può arguire dal

formarsi di un alone basofilo nel citoplasma, attorno a un settore della membrana nucleare (fig. 1 *a*). Dopo 15 giorni l'ipertrofia decresce; attorno al nucleo la tigroide si presenta di nuovo in zolle; in qualche caso si rinvengono ancora tracce degli ammassi di tigroide alla periferia dell'elemento. A trenta giorni la tigroide è completamente ricostituita, anzi, come ha fatto già notare la Zannone (op. cit.), essa è più abbondante che nei controlli. Dopo 45 giorni dall'autotomia il diametro medio dell'elemento è ancora ulteriormente ridotto, ma è sempre maggiore di quello dei controlli del 68 %; quello del nucleolo è del 25 %. Il mantenersi dell'ipertrofia (anche dopo tre mesi dall'operazione – Zannone op. cit.) va messo in rapporto con il particolare processo rigenerativo del midollo spinale della coda dei rettili: è stato dimostrato infatti che questo, dopo un tentativo rigenerativo (saldatura dell'ependima e formazione di un ampolla rigenerativa), subisce un processo involutivo (Stefanelli [7] 1951, Marotta [8] 1947, Zannone op. cit.); all'innervazione della coda rigenerata provvedono i gangli e le radici motorie degli ultimi tre nervi spinali del moncone (Terni [9] 1920).

In breve: nel processo rigenerativo le osservazioni ed i dati citometrici ottenuti dalle cellule delle corna anteriori del midollo spinale dimostrano:

a) che l'ipertrofia cellulare inizia immediatamente dopo la resezione dell'assone ed è perciò il primo aspetto reattivo del neurone in rigenerazione;

b) che l'ipertrofia raggiunge il massimo valore quando la cromatolisi perinucleare è nella sua fase culminante; l'aspetto cromofilo assunto dal pirenoforo dopo la reintegrazione della tigroide, è indice di una maggior attività di sintesi proteiche, dovuta alle esigenze della rigenerazione della fibra; il persistere dell'ipertrofia, invece, è da mettersi in rapporto all'aumentato territorio di innervazione;

c) le variazioni del rapporto nucleo-plasmatico (tabella) dimostrano che l'ipertrofia avviene a carico prevalentemente del citoplasma (le variazioni di grandezza del nucleo sono meno pronunciate); mentre però l'abbassamento dei valori del N/P avviene rapidamente (nei primi dieci giorni) il suo ritorno alle condizioni di partenza, se avviene, procede molto lentamente: dopo 45 giorni è ancor lungi dal suo ristabilimento.

Per ciò che concerne i fenomeni consecutivi al taglio della coda eseguita in maniera da impedire i processi di rigenerazione, nelle cellule nervose motorie del midollo del moncone ho osservato anche in questo caso che l'ipertrofia si instaura presto: dopo 15 ore dal trauma gli elementi si presentano lievemente ingrossati e con contorni un pò arrotondati; la differenza tra i diametri medi dei pirenofori reattivi, rispetto a quelli dei controlli, però, diventa statisticamente significativa a 5 giorni dall'operazione; le misurazioni citometriche, sia in valori assoluti che in valori relativi (N/P) risultano molto simili a quelle riscontrate cinque giorni dopo l'autotomia; per ciò che riguarda la tigroide, invece, gli elementi nervosi si presentano in cromatofilia diffusa. A dieci giorni dall'opera-

(7) AL. STEFANELLI, *Genetic Neurology*, p. 210 (University Chicago Press, 1951).
(8) M. MAROTTA, «Rend. Acc. Naz. Lincei», vol. I, p. 1367 (1946).
(9) T. TERNI, «Arch. It. Anat. Embriol.», vol. 17°, p. 507 (1920).

zione l'ipertrofia è notevolmente accentuata: anche in questo caso i valori citometrici dei pirenofori sono molto simili a quelli riscontrati nel lotto precedente; all'ipertrofia si accompagnano due quadri tigrolisici caratteristici: quello della cromatofilia e quello della cromatolisi diffusa. Dopo trenta giorni dall'operazione il midollo non raggiunge più la superficie del taglio, ma si rinviene retratto 2–3 mm. entro lo speco vertebrale (Baffoni op. cit.) poichè è degenerata quella porzione di midollo contenente i centri che partecipavano all'innervazione degli ultimi metameri della coda asportata: gli elementi nervosi delle corna anteriori esaminati presentano valori eguali a quelli osservati dopo 10 giorni dal taglio (anche il N/P è immutato) ed aspetti morfologici uniformi della sostanza basofila (cromatolisi diffusa – fig. 1 *b*); ciò comprova che gli elementi esaminati appartengono a una porzione più prossimale del midollo che è stata coinvolta più tardivamente dall'avanzare dei processi degenerativi; dopo trenta giorni non ho più osservato elementi cromatofili: in questo caso, perciò, la cromatofilia va interpretata come la prima modificazione reattiva della tigroide che precede il processo cromatolisico.

TABELLA

Ipertrofia reattiva dei neuroni motori del midollo spinale di Tarentola

(1. – dopo la provocata autotomia; 2. – in assenza di fenomeni rigenerativi).

Tempi dall'operazione	Pirenoforo	Nucleo	N/P
	MLu. $r \pm \sigma$	MLu. $r \pm \sigma$	$r_N^3 \cdot 100 / r_P^3$
1. – Tempo 0 (controlli)	7,4 ± 0,24	4,6 ± 0,073	24
dopo 40 ore	8,15 ± 0,17	4,92 ± 0,139	21,7
dopo 5 giorni	11,75 ± 0,25	5,87 ± 0,285	12,5
dopo 7 giorni	12,25 ± 0,31	6,12 ± 0,197	11,3
dopo 9 giorni	14,35 ± 0,35	6,80 ± 0,255	10,9
dopo 10 giorni	15,42 ± 0,50	7,17 ± 0,261	10
dopo 15 giorni	13,50 ± 0,38	6,42 ± 0,401	10
dopo 30 giorni	12,10 ± 0,31	6,12 ± 0,223	12,85
dopo 45 giorni	11,25 ± 0,27	5,70 ± 0,201	13
2. – Tempo 0 (controlli) . . .	7,5 ± 0,27	4,67 ± 0,080	24
dopo 15 ore	8,00 ± 0,32	4,80 ± 0,215	22
dopo 5 giorni	11,30 ± 0,23	5,62 ± 0,282	12,9
dopo 9 giorni	13,80 ± 0,34	6,32 ± 0,272	10
dopo 30 giorni	14,62 ± 0,21	6,75 ± 0,182	10

CONCLUDENDO. – I risultati conseguiti dai dati citometrici rilevati sugli elementi motori del midollo spinale della coda di *Tarentola* (ved. tabella) dimostrano che:

1° l'ipertrofia cellulare è la prima manifestazione reattiva del neurone; la cromatofilia è il primo aspetto della modificazione della tigroide;

2° l'ipertrofia cellulare si accentua presentando lo stesso andamento sia che alla cromatofilia succeda la cromatolisi perinucleare, sia che invece ad essa succeda la cromatolisi diffusa;

3° il massimo aumento dimensionale del pirenoforo del neurone motorio coincide con gli aspetti più tipici della cromatolisi reattiva; questa si presenta però con un duplice aspetto secondo che il neurone rigeneri l'assone (cromatolisi perinucleare) o in assenza di fenomeni rigenerativi (cromatolisi diffusa).

Tali relazioni, tra ipertrofia e cromatolisi, però, non possono essere generalizzate, poichè possono rinvenirsi aspetti cromatolisici in assenza assoluta di fenomeni di ipertrofia: tale è, ad esempio, il caso che si verifica nell'involuzione fisiologica delle cellule di Mauthner degli Anfibi anuri, dopo la metamorfosi (Stefanelli [10] 1949), dove il graduale rimpiccolimento del pirenoforo è accompagnato da una cromatolisi tipicamente periferica (Baffoni e Catte [11] 1950).

Fisiologia. — *Comportamento del potassio dopo trattamento con acetato di desossicorticosterone in cani dei due sessi* [*]. Nota di PAOLO ROWINSKI e GIOVANNI MANUNTA, presentata [**] dal Socio G. LEVI.

In precedenti ricerche è stato osservato che l'acetato di desossicorticosterone (D. C. A.) in dose elevata provoca nei cani di sesso maschile modificazioni della zona glomerulare delle surrenali e lesioni renali accompagnate da ipertensione mentre invece nelle femmine adulte queste alterazioni non si riscontrano o risultano molto attenuate (Rowinski, De Muro e Manunta, 1951, 1951 *a*). Poichè si ritiene generalmente che una delle possibili cause delle lesioni vascolo-renali da D. C. A. debba ricercarsi nello squilibrio del rapporto sodio-potassio, abbiamo voluto studiare se questo venisse influenzato nei due sessi in modo differente.

A questo scopo abbiamo dosato il potassio nel siero, nel cuore, nella muscolatura liscia (stomaco ed utero), e in qualche caso anche nella mucosa gastrica degli stessi cani che sono stati usati per le ricerche sopraricordate.

MATERIALE E TECNICA. – Il primo gruppo di esperienze è stato condotto su 6 cani di razza incrociata dell'età di 140 giorni, appartenenti alla stessa cucciolata.

(10) AL. STEFANELLI, «Rend. Acc. Naz. Lincei», vol. VIII, p. 59 (1949).

(11) G. M. BAFFONI e G. CATTE, «Rend. Acc. Naz. Lincei», vol. IX, p. 282 (1950); (in c. st. 1951).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Veterinaria dell'Università di Sassari.

(**) Nella seduta del 14 aprile 1951.

Due maschi e due femmine sono stati trattati con circa 2,2 mg/Kg di D. C. A. [1] per la durata di un mese; un maschio ed una femmina sono stati usati come controlli.

Un secondo gruppo di esperienze è stato fatto su 6 cani adulti. Due femmine sono servite come controlli, due vennero trattate in media con 5 mg/Kg di D. C. A. *pro die* e *pro capite* per la durata di 11 giorni; un maschio venne trattato nello stesso modo mentre il maschio N. 9 venne trattato con 1,5 mg/Kg per la durata di 32 giorni.

Il dosaggio del potassio nel muscolo striato è stato fatto nello sterno–omerale. Per l'analisi della muscolatura liscia dello stomaco abbiamo separato questa dalla mucosa. Nel primo gruppo di cani il potassio è stato dosato con il metodo di Cumings (1939), ma i risultati non erano soddisfacenti per cui per il secondo gruppo è stato invece usato il metodo di Van Slyke e Riesen modificato da Folch e Lauren (1947) che, con l'incenerimento umido, evita le possibili perdite di potassio. La determinazione della percentuale di acqua dei vari organi e del siero è stata fatta portandoli a secchezza in stufa a 90°–100° fino a peso costante. La pressione osmotica del siero è stata determinata con il metodo crioscopico. Quest'ultimo esame è stato fatto soltanto sugli animali del primo gruppo.

Risultati. – Riportiamo i valori trovati, riferiti all'organo fresco, in due tabelle separate (I e II) per i due gruppi di animali e in altre due tabelle (III e IV) le medie dei valori di ciascun gruppo senza distinzione di sesso. Le percentuali del potassio ottenute con i due metodi non differiscono sostanzialmente per quanto riguarda i valori relativi. Il contenuto in potassio è diminuito nel siero e negli organi dei soggetti trattati con D. C. A.; fa eccezione la muscolatura dello stomaco nella quale esso è sempre in quantità maggiore che nei controlli e la mucosa dello stesso organo dove non si notano variazioni. La pressione osmotica del siero non ha subìto nessuna variazione per opera del trattamento e anche nel contenuto in acqua del siero e degli organi dei soggetti trattati non si sono osservate variazioni degne di nota.

Dai nostri esami non risultano nè differenze tra i cuccioli del primo gruppo e gli adulti del secondo, nè differenze in rapporto al sesso come invece si era visto per il comportamento dell'ipertensione arteriosa negli animali adulti. La diminuzione del potassio dipende più dalla intensità che dalla durata del trattamento come si deduce dal comportamento dei valori nei cani n. 9 e n. 10 del secondo gruppo (tabella II).

Discussione dei risultati. – La diminuzione del potassio nel sangue e nella muscolatura scheletrica per azione del D. C. A. è ormai un fatto acquisito. Secondo qualche A. però la diminuzione del potassio non interessa ugualmente tutti gli organi: così Ziegler ed altri (1944) hanno trovato una diminuzione nel cervello e nel fegato, ma non nel cuore. Per quanto riguarda la muscolatura liscia non ci

(1) Ringraziamo le Ditte Ciba, Farmitalia e Vister per il D. C. A. messo gentilmente a nostra disposizione.

risulta che sia stato ancora ricercato il contenuto in potassio dopo trattamento con D. C. A. Tale ricerca potrebbe avere un particolare interesse se dai valori si potesse risalire ad eventuali modificazioni funzionali della muscolatura liscia le quali potrebbero avere importanza per la patogenesi della ipertensione da D. C. A.

Nella muscolatura liscia sembra che esista, in condizioni fisiologiche, un rapporto tra funzionalità e contenuto in potassio: così nell'utero il contenuto in potassio aumenta durante la gravidanza e con l'accrescimento dell'organo (Winkler, 1935). Nei nostri casi il contenuto in potassio della muscolatura liscia si comporta differentemente nell'utero e nella muscolatura dello stomaco. Mentre nell'utero (non gravido), nel siero, nella muscolatura scheletrica e nel cuore il contenuto in potassio diminuisce, nella muscolatura dello stomaco invece aumenta.

Le cellule sono più o meno permeabili al potassio che si accumula in esse, secondo Fenn (1940), perchè nessun altro catione vi può entrare (forse in dipendenza della maggiore velocità di diffusione del potassio-ione rispetto al sodio–ione) e perchè gli anioni con i quali si combina non possono uscire. La diminuzione del potassio cellulare non può risultare perciò che da un aumento della permeabilità cellulare o da una modificazione delle proprietà degli anioni. Quali modificazioni funzionali ne derivino è difficile dire. L'aumento del potassio nella muscolatura liscia dello stomaco potrebbe dipendere, in analogia con quanto è stato osservato nell'utero in condizioni fisiologiche, da un aumento dell'attività. Se nella muscolatura vasale si verificasse lo stesso fenomeno ciò porterebbe ad un aumento del tono vasale e spiegherebbe la maggior resistenza che nei casi di ipertensione essenziale si osserva nelle arterie precapillari.

Negli animali impuberi del primo gruppo abbiamo osservato aumento di pressione e diminuzione del potassio parallelamente sia nei maschi che nelle femmine. Nel secondo gruppo di animali invece l'aumento di pressione si è verificato solo nei maschi mentre la diminuzione del potassio si è riscontrata nei due sessi. Non si può quindi pensare che la differenza dell'aumento di pressione nei due sessi nel secondo gruppo possa dipendere dal potassio a meno che, dati i pochi casi considerati e la variabilità dei valori normali del potassio specie negli organi, non sia stato possibile mettere in evidenza una differenza sessuale quantitativa.

La mancanza di variazioni del potassio nella mucosa gastrica è forse in rapporto con la sua eliminazione che avviene normalmente per mezzo dei succhi digestivi. La diminuzione della secrezione dell'acido cloridrico per opera del D. C. A. che sembra uguale nei due sessi, ossservata da De Muro (1943), può forse essere spiegata con la diminuzione del potassio e la ritenzione del sodio e così pure l'osservazione di Ladell (1945) della diminuzione dei cloruri del sudore.

CONCLUSIONI. – Anche nella muscolatura liscia il potassio subisce delle modificazioni per opera del D. C. A. I valori sono diminuiti nell'utero ed aumentati nella muscolatura dello stomaco. Non si è potuto mettere in evidenza nei due sessi un comportamento differente del potassio per cui le lesioni vescolo–renali non sembrano apparentemente dipendere dalle modificazioni dell'equilibrio elettrolitico.

TABELLA I (1° Gruppo).

	peso Kg.	D.C.A. mg/Kg.	K siero mg %	acqua siero %	K muscolo striato mg %	acqua muscolo striato %	K cuore mg %	acqua cuore %	K muscolo stomaco mg %	acqua muscolo stomaco %	K utero mg %	acqua utero %
Femmina n. 1 - trattata	9,3	2,4 (giorni 30)	13	92,94	172	75,00	182	78,87			107	75,64
Femmina n. 2 – trattata	11,0	2,0 (giorni 30)	21	93,13	118	74,95	184	79,96			90	78,20
Maschio n. 3 – trattato	9,2	2,5 (giorni 30)	15	92,24	220	74,86	221	78,36				
Maschio n. 4 – trattato	9,8	2,1 (giorni 30)	19	93,29	240	76,11	161	77,63	269	80,16		
Femmina n. 5 – controllo	9,7		23	92,50	265	76,36	251	78,00			155	79,63
Maschio n. 6 - controllo	9,8		(51 ?)	92,84	207	75,11	270	76,26	195	82,55		

TABELLA II (2° Gruppo).

	peso Kg	D. C. A. mg/Kg	K siero mg %	acqua siero %	K muscolo striato mg %	acqua muscolo striato %	K cuore mg %	acqua cuore %	K muscolo stomaco mg %	acqua muscolo stomaco %	K utero mg %	acqua utero %	K mucosa stomaco mg %	acqua mucosa stomaco %
Femmina n. 7 – trattata	8,0	5,0 (giorni 12)	12	92,37	294	73,06	224	76,91	294	79,04	159	79,90		
Femmina n. 8 – trattata	10,5	4,0 (giorni 10)	12	92,03	205	71,35	246	77,82	306	78,36	153	78,25	168	78,69
Maschio n. 9 – trattato	6,5	1,5 (giorni 32)	15	92,43	342	70,92	278	76,85	218	77,73			152	77,03
Maschio n. 10 – trattato	9,5	4,0 (giorni 10)	14	92,76	294	74,75	182	78,05	227	77,90			171	78,14
Femmina n. 11 – controllo	7,5		25		360	74,62	342	74,12	169	77,73	189	76,72	171	76,58
Femmina n. 12 – controllo	6,0		21		375	74,62	308	77,06	214	78,71	256	79,41	151	81,53

Tabella III (1° Gruppo).

	K siero mg %	acqua siero %	K muscolo striato mg %	acqua muscolo striato %	K cuore mg %	acqua cuore %	K muscolo stomaco mg %	acqua muscolo stomaco %	K utero mg %	acqua utero %
Media controlli	23	92,67	236	75,76	261	77,13	185	82,55	155	79,63
Media trattati	17	92,90	188	75,23	192	78,57	269	80,16	99	76,92
Differenza	— 26	+ 1	— 20	— 0,5	— 26	+ 2	+ 45	— 3	— 36	+ 2

Tabella IV (2° Gruppo).

	K siero mg %	acqua siero %	K muscolo striato mg %	acqua muscolo striato %	K cuore mg %	acqua cuore %	K muscolo stomaco mg %	acqua muscolo stomaco %	K utero mg %	acqua utero %	K mucosa stomaco mg %	acqua mucosa stomaco %
Media controlli . . .	23		368	74,67	325	75,59	192	78,22	223	78,07	161	79,05
Media trattati . . .	13	92,40	284	72,52	263	77,41	244	78,26	156	79,09	164	77,95
Differenza	— 43		— 23	— 3	— 19	+ 2	+ 26	0,0	— 30	+ 1	+ 2	— 1

Bibliografia.

Cumings J. N., « Bioch. J. », *33*, 642 (1939)
De Muro P., Com. Acc. Med. Roma (1943).
Fenn W. O., « Physiol. Rev. », *20*, 377 (1940).
Folch J. e Lauren M., « J. Biol. Chem. », *169*, 539 (1947).
Ladell W. S. S., « J. Physiol. », *104*, 13 (1945).
Rowiński P., De Muro P. e Manunta G., « Minerva Medica », *42*, I, 150 (1951).
Rowinski P., De Muro P. e Manunta G., « Boll. Soc. It. Biol. Sper. » (in corso di pubblicazione) (1935 *a*).
Ziegler M., Anderson J. A. e Mc Quarric, « Proc. Soc. Exp. Med. », *56*, 242 (1944).
Winkler H., « Monatsschr. f. Geburtsh. u. Gynäk. », *100*, 223 (1935); *101*, 34 (1935).

PERSONALE ACCADEMICO

Il Senatore Castelnuovo porge il cordiale saluto suo e della Classe al Socio Straniero prof. Theodor de Kármán dell'Università di Pasadena, illustre cultore di aerodinamica, che assiste alla presente seduta.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente comunica che è presente il prof. Bruno Rossi dell'Istituto di Tecnologia del Massachusetts che fu allievo di Fermi e che, nel 1938, dovette abbandonare la cattedra che occupava all'Università di Padova per emigrare negli Stati Uniti d'America.

Il Presidente, salutando il prof. Rossi, comunica che nel corso della seduta verrà presentata una Nota del predetto professore e di due suoi allievi sulle nuove particelle instabili pesanti. Poichè si tratta di un argomento molto interessante, il Senatore Castelnuovo informa i Colleghi di aver pregato il prof. Rossi di tenere, al termine della presente adunanza, una esposizione sui più recenti lavori effettuati negli Stati Uniti d'America in materia di fisica atomica.

Il Senatore Castelnuovo porge quindi il suo saluto al prof. Leonardo Roth del Collegio Imperiale di Scienza e Tecnologia di Londra, anch'egli presente.

Il Presidente presenta quindi le bozze impaginate del fascicolo n. 3 dei « Rendiconti » (marzo 1951).

Comunica poi che l'Istituto di Sanità Pubblica ha inviato all'Accademia la somma di L.500.000 quale quota d'iscrizione per l'Associazione Amici dell'Accademia in qualità di « Amico benemerito ».

Il Senatore Castelnuovo desidera manifestare la più viva gratitudine al Collega Marotta, Direttore del predetto Istituto.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Lombardi presenta il primo numero della nuova serie della Rivista d'ingegneria e scienze « Tecnica Italiana », augurandosi che la direzione della Rivista stessa provveda ad inviare in omaggio all'Accademia i numeri successivi.

Il Segretario Accademico presenta le opere inviate in omaggio all'Accademia, mettendo in particolare evidenza i due volumi della IV edizione del « Trattato di Fisiologia umana » del Socio Spadolini, un'altra pubblicazione dello stesso Socio dal titolo « La regolazione neuro–umorale dei visceri », il volume I delle « Memorie di biogeografia adriatica » dell'Istituto di Studi Adriatici, uno studio del Socio A. Russo dal titolo « Unità sistematiche derivate da mutazioni dislocate in altro ambiente con processo analogo alle metastasi tumorali », estratto da « Atti dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali di Catania », una pubblicazione del Comune di Venezia dal titolo « Vincenzo Coronelli nel III centenario della nascita » e il volume « Elementos de atomistica » di G. E. Villar.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei « Rendiconti » il Presidente Castelnuovo e i Soci G. Levi, Cotronei, Dore, Armellini, Pupilli, Nobile, Picone, Persico e Segrè.

Il Segretario Accademico dà lettura dell'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

Levi G. e Fayer A. – Lo smescolamento del citoplasma studiato in cellule *in vitro* (pres. dal Socio G. Levi).

Nobile V. – Il conflitto fra copernicisti e aristotelici nella sua essenza e nel pensiero di Galileo – Rilievi e precisazioni.

Persico E. – Sulla disposizione dei diaframmi negli spettrometri beta elicoidali.

Segre B. – Sulla perfezione delle coincidenze isolate.

Arosio R. e Orlandi A.M. – Sulle proteine dell'organo elettrico di Torpedine (pres. dal Socio L. Cambi).

Capraro V. e Tiengo M. – L'influenza della differenza di potenziale (D. P.) della cute sul passaggio di acqua attraverso la cute di rana (pres. dal Corrisp. R. Margaria).

Fichera G. – Sui teoremi d'esistenza della teoria del potenziale e della rappresentazione conforme. Nota I (pres. dal Socio M. Picone).

Fichera G. – Sui teoremi d'esistenza della teoria del potenziale e della rappresentazione conforme. Nota II (pres. dal Socio M. Picone).

FICHERA G. – Esistenza del minimo in un classico problema di calcolo delle variazioni (pres. dal Socio M. PICONE).

LATTANZI F. – Applicazione della teoria dell'ellisse di elasticità trasversale allo studio di un'asta curva elasticamente vincolata agli estremi. Nota I (pres. dal Socio G. ARMELLINI).

LEVI E. – Ancora sopra un'applicazione dei polinomi di Bernstein all'approssimazione in media delle funzioni sommabili (pres. dal Corrisp. G. ASCOLI).

MACHNE X. – Effetti della stimolazione del corpo striato nel piccione (pres. dal Corrisp. G. C. PUPILLI).

MERLI L. – Su alcune disuguaglianze riguardanti i polinomi ultrasferici (pres. dal Corrisp. G. SANSONE).

PRODI G. – Nuovi criteri di stabilità per l'equazione $y'' + A(x)y = 0$ Nota I (pres. dal Corrisp. G. ASCOLI).

PRODI G. – Questioni di stabilità per equazioni non lineari alle derivate parziali di tipo parabolico (pres. dal Corrisp. B. FINZI).

ROSSI B., BRIDGE H. e ANNIS M. – Alcune osservazioni sulle nuove particelle instabili pesanti (pres. dal Socio G. CASTELNUOVO).

SACCONI L. – Spettrometria indiretta (pres. dal Socio L. ROLLA).

UDESCHINI P. – Sulle mutue azioni fra campo gravitazionale e campo elettromagnetico (pres. dal Corrisp. B. FINZI).

URBANI-MISTRUZZI L. e PACINI V. – Ergastoplasma e acidi nucleici nel ciclo secretorio di alcune ghiandole (pres. dal Socio G. COTRONEI).

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Cotronei, anche a nome del Collega Vernoni, legge la relazione sulla Memoria del dott. T. Perri dal titolo: « Ricerche sperimentali sull'induzione di arti soprannumerari negli Anfibi Anuri (Bufo vulgaris) » con la quale si propone la pubblicazione del lavoro nelle Memorie accademiche. Messa ai voti, la relazione è approvata dalla Classe.

Il Socio De Blasi, anche a nome dei Colleghi Cotronei e Vernoni, dà lettura della relazione della Commissione incaricata di riferire sul contenuto del plico sigillato depositato presso l'Accademia il 18 agosto 1921 dal dott. Antonino Pais e aperto, su richiesta dell'autore, nella seduta di Classe del 10 febbraio c. a.

La relazione, tenuto conto che la proposta del dott. Pais in merito a un sistema di diserbazione nel quadro della piccola bonifica antimalarica non è suffragata da alcuna osservazione concreta, e considerato, d'altra parte, che la questione della lotta antianofelica nella profilassi antimalarica è ormai notoriamente e felicemente superata, conclude non essere il caso di esprimere un giudizio motivato sul valore della proposta formulata dal dott. Pais nell'anno 1921.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 14 aprile 1951

BONAIUTO Giuseppe. — *La quadratura del circolo*. Catania, Tip. Sorace, 1939. Pp. 7, in-8°, con figg.

COMUNE DI VENEZIA. — *Vincenzo Coronelli nel terzo centenario della nascita*. Venezia, C. Ferrari, 1950. Pp. 74, in-8°, con tavv.

CONGRESO (Primer) NACIONAL DE PESQUERIAS MARÍTIMAS E INDUSTRIAS DERIVADAS. Mar de la Plata, 24–29 octubre, 1949. Tomo I: Recomandaciones. Tomo II: Trabajos presentados. Buenos Aires, 1950. Voll. 2, in-8°.

FENILI Giorgio. — *Esperimenti antidacici, con prodotti organici sintetici clorurati, in laboratorio ed esperimenti di cattura con bacinelle*. Estr. da « Olivicoltura », 1950, n. 4.

FENILI Giorgio. — Vedi: RUSSO Giuseppe.

ISTITUTO DI STUDI ADRIATICI. — *Memorie di biogeografia adriatica*. Vol. I. Venezia, 1950. Pp. 299, in-8°.

MINIO M. e SPADA N. — *Distribuzione e polimorfismo di Gracilaria Confervoides (L.) Grev. nella laguna di Venezia*. Pp. 20, in-8°. (Istituto di Studi Adriatici, pubblicaz. n. 3).

POLLI Silvio. — *Ricerche di fotometria nelle acque della laguna di Venezia*. Lido-Venezia, Istit. Tip. Ed., 1950. Pp. 13, in-8° (Istituto di Studi Adriatici, pubblicaz. n. 2).

RUSSO Achille. — *Unità sistematiche derivate da mutazioni dislocate in altro ambiente con processo analogo alle metastasi tumorali*. Estr. da « Atti della Accademia Gioenia di Scienze naturali di Catania», s. 6ª, vol. VII, 1950.

RUSSO Giuseppe. — *Filippo Silvestri: Maestro*. Estr. da « Bollettino del Laboratorio di Entomologia Agraria di Portici », vol. X, 1951.

— *La lotta biologica contro i parassiti animali dei vegetali in Italia*. Estr. da « Bollettino del Laboratorio di Entomologia Agraria Filippo Silvestri di Portici », vol. X, 1951.

— *Necessità di un Museo Nazionale di Entomologia in Italia*. Estr. da « Bollettino di Zoologia », vol. XVI, 1949, nn. 4-5-6.

RUSSO Giuseppe e FENILI Giorgio. — *Esperimenti antidachici eseguiti in Marina di Ascea (Salerno) nel 1949*. Estr. da « Olearia », 1950, nn. 5–6.

SPADA, N. — Vedi: MINIO M.

SPADOLINI Igino. — *La regolazione neuro-umorale dei visceri*. Firenze, « La Nuova Italia », 1946. Pp. XI–204, in-8°.

— *Trattato di fisiologia umana*. 4ª ed. Torino, U.T.E.T., 1950. Voll. 2, in-8°, con figg.

Tecnica Italiana. Rivista d'ingegneria e scienze. Trieste, N. S., a. VI, 1951, n. 1.

VILLAR G. E. — *Elementos de atomística*. 3ª ed. Montevideo, « Impresora Uruguaya», 1950. Pp. 291, in-8°.

D. DE BLASI.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 12 maggio 1951

Presidenza del Socio G. CASTELNUOVO

NOTE DI SOCI

Geometria. — *Sulla perfezione delle coincidenze isolate.* Nota (*) del Corrisp. BENIAMINO SEGRE.

Sia T una corrispondenza analitica ∞^n di una V_n analitica in sè, la quale abbia una *coincidenza isolata* in un punto semplice O di T. Ciò significa che, mentre tra i trasformati del punto O mediante T vi è il punto O medesimo, nessun altro punto P di un intorno (a $2n$ dimensioni reali) di O su V_n deve poter ammettere se stesso come trasformato mediante T. Se P′ è un trasformato di P, che tenda ad O quando $P \to O$, ogni posizione limite della retta PP′ tocca manifestamente V_n in P e, seguendo il Severi (1), dicesi una *direzione principale* di T in O. Il Severi (a p. 279 dell'op. cit.) ha enunciato, senza dimostrazione, il teorema secondo cui

Una coincidenza isolata è sempre perfetta,

intendendo con ciò che ogni retta tangente in O a V_n risulta allora una direzione principale di T in O.

In un recente lavoro, J. F. Biarge (2) ha creduto di dare un esempio contrastante col teorema suddetto; ma in tale esempio si riscontra invece direttamente senza difficoltà la proprietà già enunciata da Severi, come ho avuto occa-

(*) Presentata nella seduta del 14 aprile 1951.

(1) F. SEVERI, *Serie, sistemi d'equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche* (a cura di F. Conforto ed E. Martinelli), vol. I (Roma, Perella, 1942), n. 130. In questo volume sono studiate soltanto proprietà algebriche, onde ivi vien supposta l'algebricità sia di V_n che di T; ma le proprietà infinitesimali di tali corrispondenze si possono senz'altro enunciare pel campo analitico, quando si riferiscano a quelle falde che Severi chiama superlineari.

(2) J. F. BIARGE, *Sobre las variedades de coincidencia de una correspondencia birracional entre variedades algebricas superpuestas*, «Revista Math. Hisp.-Amer.» (4) *10*, pp. 3–11 (1950).

sione di mostrare altrove (3). Nella presente breve comunicazione stabilisco in tutta generalità quel teorema, poggiando sopra una nota estensione del teorema sulle funzioni implicite (4).

In virtù dell'ipotesi che O sia un punto semplice di V_n, e tenuto conto del carattere infinitesimale della proposizione da dimostrare, non è restrittivo supporre che V_n sia uno spazio euclideo S_n (5). Scelte in S_n coordinate cartesiane $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ coll'origine in O, le coordinate x, x' di due punti P, P' dell'intorno di O, che si corrispondano in T, saranno le soluzioni di un sistema (od anche, eventualmente, di più sistemi) di equazioni del tipo

$$f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n \;;\; x'_1, x'_2, \cdots, x'_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

ove le f_i denotano n funzioni olomorfe delle $2n$ variabili x ed x' in un intorno (a $4n$ dimensioni reali) di $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x'_1 = x'_2 = \cdots = x'_n = 0$. L'ipotesi che O sia una coincidenza isolata di T, si traduce in ciò che il sistema

$$f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n \;;\; x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

deve avere $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ come soluzione isolata.

In base all'estensione del teorema sulle funzioni implicite – a cui si alluse in (4) – ne consegue che, prese n quantità complesse $y_1, y_2, \cdots, y_n$ arbitrarie, purchè non tutte nulle e sufficientemente piccole in valore assoluto, il sistema

$$f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n \;;\; x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

ammette qualche soluzione $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ prossima alla $(0, 0, \cdots, 0)$. Allora i punti $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ e $P'(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$ si corrispondono in T, e sono entrambi prossimi ad O e distinti fra loro; inoltre la retta PP' è vicina quanto si vuole (e parallela) alla retta di S_n uscente da O che ha coefficienti direttori uguali (o proporzionali) ad $y_1, y_2, \cdots, y_n$. Quest'ultima retta dà pertanto una direzione principale di T in O; sicchè, essendo essa per costruzione arbitraria nella stella di centro O, il punto O risulta di fatto una coincidenza perfetta di T.

(3) In una recensione nelle *Mathematical Reviews* (1951). Per altri commenti al lavoro dianzi citato, ved. F. GAETA, *Aclaraciones sobre los puntos de coincidencia de una correspondencia entre variedades algebraicas superpuestas*, « Revista Math. Hisp.-Amer. » (4) 11 (1951).

(4) Per tale estensione, cfr. F. SEVERI, *Sulla compatibilità dei sistemi di equazioni algebriche ed analitiche*, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (6) 17 (1933)$_1$, pp. 3–10, ove trovansi anche indicati precedenti meno comprensivi, dovuti a Poincaré nella sua Tesi del 1879, a W. F. OSGOOD, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, II Bd., I Lf. (Leipzig, Teubner, 1929), p. 135, ed a S. LEFSCHETZ, *Topology*, Colloquium Publ., vol. 12 (New York, 1930), p. 383.

(5) Invero, si viene a sostituire S_n a V_n coll'introdurre nell'intorno di O su V_n n parametri analitici uniformizzanti, interpretando quindi tali parametri quali coordinate cartesiane in S_n.

Astronomia. — *Il conflitto fra copernicisti e aristotelici nella sua essenza e nel pensiero di Galileo – Rilievi e precisazioni.* Nota (*) II del Corrisp. VITTORIO NOBILE.

1. Come si è visto nella Nota precedente, i problemi colà indicati con (I) e (II) e che appaiono come fondamentali per la cosmologia dell'epoca galileiana non possono trovare, in base ad argomenti tratti dalla pura osservazione e nella forma in cui sono posti, che soluzioni illusorie. In ambedue i problemi, infatti, come in qualunque altro di astronomia, l'osservazione diretta non può portare che alla constatazione di moti relativi, quali che siano i mezzi adoperati e i corpi celesti dei quali si tratta, mentre il concetto di moto e quello di quiete, che nelle predette questioni intervengono, assumono, nel pensiero dei contendenti nella grande disputa, un senso più profondo, ciò che appare ben naturale dato l'aspetto innegabilmente assoluto con cui si presentano quelle questioni alla mente umana e risulta del resto evidente da taluni argomenti addotti da Galileo e dalla posizione logica dei suoi oppositori. Esclusa dunque la possibilità di avere *dall'osservazione* la vera soluzione dei predetti problemi, resta a conoscere se questa possa ottenersi per altra via e con quali mezzi e a ricercare quale debba ritenersi sia stato su tutta la grande questione il pensiero, palese o recondito, di Galileo. Occorre, in vista di tali scopi, ritornare per poco sopra considerazioni attinenti alla questione generale.

Siamo intanto, come già si è detto nella Nota I, di fronte al problema dell'assoluto per movimenti spaziali (1); occorrerebbe ai copernicisti poter dimostrare che le stelle sono *in quiete*, senza di che essi non potrebbero legittimare, dopo il riconoscimento degli effetti parallattici (2), la loro affermazione che la Terra « si muove ». Ma poichè *quiete* è *assenza di moto* e il concetto di moto è irriducibilmente relativo, la quiete assoluta non può affermarsi che *a priori*, ossia indipendentemente da qualsiasi dato preesistente riguardante il moto, ciò che il termine stesso appunto indica. La giustifica di ogni asserzione con cui si assegni il sostanziale attributo al sistema (riferimento) costituito dall'insieme delle stelle non può

(*) Presentata nella seduta del 14 aprile 1951.

(1) S'intende con questo aggettivo: movimento di *punti* isolati nello spazio, escludendosi per ora dalle nostre considerazioni la ricerca di un assoluto per le rotazioni di un insieme di punti.

(2) Non è privo di interesse osservare che se si ammette – come evidentemente pensava Galileo – un collegamento invariabile del Sole col sistema delle stelle, dalla esistenza di un moto orbitale relativo Terra-Sole consegue quella di un moto relativo Terra-stelle e una effettiva verifica degli effetti di parallasse appare allora superflua, in quanto *sicuramente* positiva, mentre non vale a decidere sul moto assoluto della Terra fino a che non si riesca a dimostrare lo statò *di quiete* delle stelle, dopo di aver chiarito che cosa con ciò debba intendersi.

Ciò va detto ai fini di una cosmologia generale; il controllo degli effetti parallattici è da considerarsi peraltro utile in quanto vale a stabilire che le distanze delle stelle dalla Terra sono *finite* e tra loro diverse. Dalle verifiche predette si è poi passato, come è ben noto, alla misura di alcune fra quelle distanze.

dunque aversi che col farla emanare *dal divino*, oppure da un sistema filosofico rientrante nel campo della metafisica. Ma nè dall'una nè dall'altra di queste due fonti di conoscenza si possono attingere idee e principî fondamentali ai fini della costruzione di una nuova scienza. La Fede, intesa in senso largo, spazia in un dominio spirituale più vasto di quello che chiamiamo scientifico: essa illumina e allarga gli orizzonti del ricercatore, del quale esalta le energie, ma non assicura *certezze* che all'individuo e giudizio non diverso può darsi riguardo al contributo di argomenti di carattere metafisico, perchè ogni sistema filosofico è, in fondo, una *fede*.

L'uomo di scienza ha mire forse meno alte ma esigenze più concrete: egli vuole apprestare un meccanismo logico rigoroso che gli permetta di far dipendere la conoscenza di tutto un complesso di fatti, noti oppure ancora ignoti, da alcuni altri accettati come evidenti ovvero rivelati dalla osservazione o dall'esperimento. Il processo logico che conduce a queste deduzioni parte bensì da alcune premesse indimostrabili per via diretta (postulati), ma lega tali premesse alle conseguenze con un nesso così stretto che la verifica diretta di queste ultime trae con sè immancabilmente la convalida di tutto ciò che ha fornito la base alla teoria. Il costruttore di questa ben sa che la sua teoria sarà in seguito sostituita da altra più generale che la assorbirà e forse esteriormente la trasformerà, sia pure correggendola, conosce pure che la *durata di vita* delle teorie che si succedono è commisurata al grado di precisione dei mezzi di verifica e che nessuna di esse, insomma, può considerarsi mai *definitiva* nella conquista scientifica, nel campo della filosofia naturale, ma sa bene che così *si avanza*.

I postulati che la teoria così concepita ammette debbono necessariamente, per quanto si è visto, escludere ogni elemento che si consideri assoluto nel senso stretto della parola. Ciò è d'altra parte imposto nel modo più evidente dalla imprescindibile necessità di avvalersi, ai fini della deduzione, di uno strumento che è insostituibile per potenza, sicurezza e profondità di azione, ossia di quello matematico, sempre che la natura della ricerca ne consenta l'uso. Ma l'analisi matematica opera sul numero come misura di grandezze; *misura* implica *paragone* e il concetto di paragone non è che relativo. Se dunque, concludendo, si vuole, in problemi di meccanica o di astronomia, ammettere l'intervento di enti assoluti, si deve o rinunciare ad una trattazione « scientifica » della materia e quindi a controlli e verifiche sperimentali, oppure *accedere ad una concezione più ristretta dell'assoluto* coll'abbandonare quella basata su proprietà negative (ciò che rende impossibile il definire e concepire un riferimento assolutamente fisso) e col formulare invece un postulato o un sistema di postulati per cui si possa pienamente giustificare l'introduzione e la precisa determinazione di riferimenti *privilegiati* e procedere alla costruzione effettiva di una *teoria del moto*, sia rispetto ai predetti riferimenti (moto assoluto), sia rispetto ad altri (moto relativo). È questo il passo *verso* l'assoluto al quale ho inteso accennare nella Nota I.

2. È ora necessario e facile, se ci richiamiamo alle considerazioni qui premesse, il precisare le concezioni tanto di Galileo quanto di Newton di fronte alla questione dell'assoluto incontrata dall'uno e dall'altro nei rispettivi problemi. Ciò porta a

riconoscere nel pensiero di ciascuno dei due l'influsso di una delle due tendenze (mistica e metafisica) alle quali qui innanzi si è fatto cenno e che predispongono la mente umana ad accogliere talvolta qualche intuizione che va oltre l'intelligibile.

È anzitutto da rilevare, ai fini di questo esame, che la possibilità di trovar modo di accedere ad una concezione chiara e ad una definizione accettabile dello stato di quiete assoluta non era, in astratto, esclusa da Galileo e questo sentimento alimentava le sue speranze nei tentativi da lui fatti in quel senso e dei quali più oltre sarà fatto cenno. Nessun dissenso su tali vedute appare fra lui e gli aristotelici e idee non diverse, anzi più avanzate ed esplicite, sono quelle esposte da Newton e messe a fondamento della dinamica da lui costruita (la quale peraltro sopravvive alla totale eliminazione di quei concetti, avvenuta nel corso di una rielaborazione critica posteriore).

Lo stato di quiete era così attribuito da Galileo al sistema delle stelle e dagli aristotelici alla Terra, ma è chiaro che si tratta di un atto *di fede* e, da un punto di vista scientifico (nel senso innanzi precisato), di una pura *convenzione*. (I due giudizi in fondo si equivalgono perchè, essendo arbitraria la convenzione, si è portati a far dipendere la scelta da una fede preesistente).

Ma che si trattasse di pura e semplice convenzione Galileo non pensava; egli credeva realmente che si potesse parlare di « immobilità » delle stelle in senso assoluto e credeva pertanto di poter disporre con queste di un riferimento « fisso » per così dire « materializzato ». Sicura conferma che tale fede egli possedesse si trova nel giudizio da lui espresso sul valore decisivo da attribuirsi all'argomento delle parallassi a favore del sistema copernicano; questo giudizio presuppone evidentemente la sicurezza sulla predetta immobilità, perchè solo in base a tale premessa è possibile tacere, nella interpretazione del fenomeno puramente *relativo* delle parallassi annue, sulla spiegazione anti-copernicana che è stata segnalata nella parte prima della presente Nota e che non sarebbe certamente sfuggita a Galileo. Il predetto fondamentale presupposto riguardo alle stelle nasceva, dunque, nella mente di Galileo, come sorse più tardi nella mente di Newton, da suggestioni di natura metafisica, ma tali suggestioni Galileo le subiva non senza gravi preoccupazioni sulla possibilità di giustificarle. Egli, insomma, se era ben convinto intimamente di essere nel vero (e il suo intuito lo portava con ciò forse ad una divinazione di quel principio che il pensiero scientifico avrebbe, in futuro, fissato, fondandolo sopra una concezione più modesta ma ben più feconda dell'assoluto) era pure, nella sua severa intransigenza in materia di logica, non meno deciso a non riconoscere il diritto all'esistenza ad alcun principio che fosse affermato senza essere convalidato da una « dimostrazione necessaria ». Così, poichè tale dimostrazione non poteva, nel suo concetto, essere probatoria se non fosse di natura matematica e sopratutto geometrica (poichè le conclusioni geometriche erano da lui ritenute in ogni caso risolutive e inoppugnabili), egli si è posto, appunto per questa via, alla ricerca. Riguardo al suo tentativo per ottenere di fatto la dimostrazione occorrente è però della più essenziale importanza notare quanto segue:

1° In primo luogo e in linea generale che la geometria (la quale è logica nella sua esplicazione più rigorosa) non può portare a concludere *contro la logica*

e non può, per questo, che essere difettoso quel ragionamento, sia pure presentato in veste geometrica, da cui consegua il riconoscimento ad un certo ente di una qualità che non sia stata precedentemente definita e per cui *non sussista la possibilità di una definizione*;

2° Che, nel fatto, gli argomenti dei quali Galileo è costretto a servirsi per dimostrare il suo assunto non sono dissimili, per la loro natura, da alcuni di quelli adoperati dagli avversarî per dimostrare la « falsità » del sistema copernicano né sono più convincenti di quest'ultimi (3): ciò specialmente in considerazione del carattere *finalistico* che con essi si assegna a quei movimenti stellari che in una dimostrazione per assurdo debbono inizialmente supporsi esistenti;

3° Che nei medesimi movimenti quelle caratteristiche geometriche e cinematiche delle quali Galileo discute (forma delle traiettorie e velocità del punto che le descrive) sono per loro natura *relative* ad un determinato riferimento e quindi dipendenti dalla scelta di questo. Le medesime non possono, dunque che rimanere inconoscibili e anche *indefinibili* in un moto assoluto perché *tale* è il riferimento stesso e nessuna disquisizione geometrica su quegli elementi può aver senso.

(3) Le considerazioni generali in base alle quali Galileo vorrebbe affermare la immobilità delle stelle sono sicuramente quelle esposte dall'interlocutore Salviati (identificabile con Galileo stesso) nella prima giornata dei dialoghi; è peraltro da rilevare che il riferimento al caso delle stelle non è esplicito, ma senza dubbio sottinteso. Quelle considerazioni risalgono in gran parte ad Aristotele: ma la accettazione da parte di Galileo di quegli argomenti è da lui (Salviati) espressamente dichiarata. Si riportano qui le parole del predetto personaggio.

Stabilito dunque cotal principio (cioè che le parti del mondo siano *con sommo e perfettissimo ordine tra di loro disposte*) *si può immediatamente concludere che se i corpi integrali del mondo devono esser di lor natura mobili, è impossibile che i movimenti loro siano retti o altri che circolari; e la ragione è assai facile, imperocchè quello che si muove di moto retto muta luogo e si va più e sempre più allontanando dal termine ond'ei si partì... e se tal moto naturalmente se gli conviene, adunque egli da principio non era nel luogo suo naturale, e però non erano le parti del mondo con ordine perfetto disposte. Ma noi supponghiamo quelle esser perfettamente ordinate; adunque come tali è impossibile che abbiano da natura di mutar luogo e in conseguenza di muoversi di moto retto.* Analoghe difficoltà non si opporrebbero a che i medesimi corpi assumessero un movimento circolare (in tal caso necessariamente uniforme) perchè *quello che è fatto dal mobile in sè stesso* (movimento rotatorio), *già lo ritien sempre nel medesimo luogo, e quello che conduce il mobile per la circonferenza d'un cerchio intorno al suo centro stabile e fisso non mette in disordine nè sé nè i circonvicini...* etc.

La uniformità nel moto circolare sarebbe poi imposta dal fatto che in tal moto il mobile *sempre si parte da termine naturale e sempre si muove verso il medesimo, adunque in lui la repugnanza e l'inclinazione son sempre di eguali forze: dalla quale egualità ne risulta una non ritardata nè accelerata velocità, cioè l'uniformità del moto.* La possibilità dello stato di quiete deriva in modo del tutto logico dalle premesse perchè *ogni corpo costituito in stato di quiete ma che per sua natura sia mobile, posto in libertà, si moverà, tuttavolta però ch'egli abbia da natura inclinazione a qualche luogo particolare; che quand'ei fusse indifferente a tutti resterebbe nella sua quiete...* etc.

Il movimento circolare e lo stato di quiete son pertanto, secondo la predetta maniera di argomentare, ritenuti ammissibili: sono gli elementi dei quali Galileo aveva bisogno.

Ciò premesso, se si guardi da un lato alle gravi manchevolezze di ordine logico che si rivelano nell'esame, da parte di Galileo, di questo punto fondamentale della questione e dall'altro alle preclare, specifiche qualità del temperamento e della mente che contraddistinguono nella maniera più tipica il grande italiano e cioè alla lucidità e acutezza del pensiero e sopratutto all'inflessibile rigore con cui egli faceva intervenire il ragionamento e la testimonianza dell'esperienza a controllo dell'intuizione, si è condotti a chiedersi se sia possibile credere che Galileo abbia pensato di avere con quelle argomentazioni non solo accertato uno stato di quiete *assoluta* per le stelle ma anche in pari tempo definito un concetto che si può solo caratterizzare col dichiarare l'impossibilità di farlo dipendere da concetti *anteriori* sul moto e sulla quiete (necessariamente relativi) ossia, in breve, *col dichiararlo indefinibile.*

È allora evidente che una sicura determinazione di quella che fu realmente la posizione di Galileo di fronte al grande problema (obbiettivo questo di alto interesse storico) non può aver luogo se non a condizione di chiarire la oscura situazione qui innanzi prospettata. Fare su questa una piena luce è strettamente necessario allo scopo di stabilire *se Galileo soggiacesse totalmente ad una illusione* col credere possibile il tentativo di *dimostrare* l'esistenza di uno stato di quiete assoluta per le stelle (e si trovasse pertanto quasi costretto ad accettare come validi tutti gli argomenti concordanti con quell'ordine di idee) oppure *se egli fosse sulla via di assumere un atteggiamento nuovo, determinato da una penetrazione più profonda del suo pensiero nell' intimo della questione.* In relazione a questa seconda ipotesi, che passo ad esaminare brevemente, gli insufficienti argomenti innanzi indicati dovrebbero considerarsi come esposti e discussi da Galileo *non allo scopo di giungere ad una formale e rigorosa dimostrazione dello stato di quiete assoluta delle stelle, ma piuttosto per ricercare fino a qual punto sia concesso al pensiero umano di procedere verso una meta ideale che egli intravedeva con un intuito arditissimo quasi svincolato da ogni legame logico, intuito che lo ha condotto, come vedremo, molto vicino a quella verità che fu poi raggiunta nei secoli successivi.*

Segue dalle considerazioni qui premesse che, allo scopo di precisare il pensiero di Galileo con una analisi rigorosamente obbiettiva e venire così in possesso degli elementi per una necessaria e doverosa ricostruzione storica del grande episodio, discusso finora da molti autori in base ad una imperfetta comprensione dei problemi che vi si collegano e quindi inesattamente rappresentato, occorre, in concreto, trovare una risposta sicura al seguente quesito:

Ebbe Galileo all'epoca della pubblicazione dei « *Dialoghi* » (1632) oppure raggiunse in epoca di poco posteriore la chiara visione del fatto che una *dimostrazione* dello stato d'*immobilità* delle stelle *non può essere tentata finchè ci si voglia attenere, per quanto riguarda moto e quiete, ad una concezione integrale (metafisica) dell'assoluto?*

La risposta a questo quesito si può trovare assai più facilmente di quanto si potrebbe a prima vista pensare quando la si cerchi dove è più naturale cercarla, cioè nelle parole dello stesso Galileo, il quale si esprime in più passi dei « *Dialoghi* » in maniera non dubbia. Anzitutto è da rilevare, come altamente significativa e quasi esauriente, una frase di Aristotele che è ricordata nella giornata seconda

dall'interlocutore Salviati con le seguenti parole: ... « E quando egli scrisse che *tutto quel che si muove si muove sopra qualche cosa immobile*, dubito che equivocasse dal dire che tutto quel che si muove si muove *rispetto* a qualche cosa immobile, la qual proposizione *non patisce difficultà veruna* e l'altra ne ha molte ». Questa frase – a parte il supposto equivoco che è da ritenersi inesistente – fornisce con la espressa successiva accettazione di Galileo la più formale delle documentazioni che il concetto di uno stato di moto che non sia relativo era da lui considerato inammissibile nella ricerca scientifica rigorosa, in quanto assurdo o trascendente le facoltà umane. Ciò implica un identico giudizio riguardo al concetto di « immobilità », perchè questa non è che un caso particolare del moto. Si porrebbe pertanto del tutto fuori della realtà chi pensasse di sostenere che Galileo abbia creduto di aver dimostrato *lo stato di quiete* delle stelle, ciò che non significa peraltro, come qui innanzi si è già detto, che egli abbia ritenuto impossibile all'uomo di superare *in futuro* le difficoltà inerenti a quella dimostrazione, perchè altrimenti non avrebbe potuto recisamente affermare, come invece fa (4), che il fenomeno delle parallassi annue una volta accertato porti alla soluzione definitiva della grande questione, essendo quella affermazione vera *solo subordinatamente al presupposto della « immobilità » delle stelle.*

Si viene dunque nel modo più diretto e naturale alla conclusione *che sia da considerarsi già acquisito alla mente di Galileo al tempo della pubblicazione dei « Dialoghi » il convincimento che fosse impossibile rendere valido e operante l'argomento delle parallassi – e quindi impossibile far prevalere, con una dimostrazione incontestabile, la tesi copernicana – nella fase di sviluppo del pensiero scientifico corrispondente alla sua epoca.*

Col nuovo aspetto in cui si presenta la questione galileiana, dopo le conclusioni raggiunte nella parte prima di questo scritto circa la impossibilità di risolvere il problema (I) nell'epoca considerata e in questa seconda sul pensiero di Galileo al riguardo, appare anche in piena evidenza come debbano ritenersi infondati e fuori della realtà i giudizî espressi dalla grande maggioranza degli autori dal 1632 ad oggi su tutto quanto si riferisce agli atteggiamenti di Galileo, al quale i predetti fanno addebito, in forma più o meno delicata, di dissimulazione, colle parole e con gli scritti, del suo *vero* pensiero, mentre vedono nell'evento conclusivo del conflitto, ossia nell'atto formale di abiura, niente altro che un totale crollo delle energie fisiche e spirituali dell'uomo, determinato da stanchezza e senilità e, in senso più immediato, dal timore di gravi sofferenze morali e di pene materiali dalle quali si sentiva minacciato. Tutti questi addebiti e apprezzamenti emanano da incomprensione, totale o parziale, della vera essenza del problema, della quale incomprensione sono il naturale prodotto. Quegli autori hanno ignorato, in modo più o meno sostanziale, le difficoltà gravi del problema e, considerando questo attraverso le loro confusioni e illusioni, lo hanno giudicato molto più semplice

(4) Salviati a Simplicio (giornata terza dei « Dialoghi »). *Vorrei che voi diceste che, quando una tal diversità si scorgesse,* (variazione negli aspetti stellari dovuta a parallasse) *niuna cosa resterebbe più che potesse render dubbia la mobilità della Terra, atteso che a cotal' apparenza nissun altro ripiego assegnar si potrebbe.*

di quanto sembrasse a Galileo. Essi si sono pertanto reputati in diritto di vedere nelle affermazioni fatte da Galileo sulla possibilità di spiegare i fatti astronomici osservati in base all'uno o all'altro dei due sistemi un atteggiamento falso e opportunistico (dimenticando o ignorando che Galileo considerava ancora inesistente *una dimostrazione* dello stato di moto della Terra!) e hanno ancora ritenuto, per le stesse ragioni, che fosse naturale attribuire ad animo meschino e ad amore del quieto vivere la formale rinunzia di Galileo a concezioni che essi confondevano con la realtà assoluta e dimostrata, ma che rimanevano pura illusione *fino a che la predetta dimostrazione non fosse ottenuta.* Essi non si rendevano conto di un fatto molto semplice: che quella rinunzia era *già avvenuta* nella mente di Galileo prima del famoso processo e non fu certamente determinata dal timore dei rigori dell'autorità ecclesiastica, *ma dalla libera evoluzione del pensiero di lui* e dal riconoscimento della impossibilità di dimostrare il fondamentale assunto sulla immobilità assoluta delle stelle.

Non è qui il posto per analisi psicologiche, ma è certamente opportuno osservare che la rivelazione di una nuova grande verità, se pure abbia per effetto di distruggere tesi preconcette e predilette, non può destare, negli uomini di scienza degni di tal nome, che pensieri atti ad elevare e rasserenare l'animo, perchè nessuna soddisfazione è per quegli uomini più alta e pura di quella che è data dal possesso della verità. Ma tali pensieri e sentimenti non possono accompagnarsi ad uno stato d'animo che non sia ispirato ad umiltà e modestia, di fronte ai misteri senza fine dell'ignoto ed è appunto da sentimenti di tal natura, sorti nell'animo di Galileo, che è stato, con ogni probabilità, determinato l'atteggiamento rassegnato e mansueto da lui serbato mentre si compiva un atto che non poteva mancare di richiamare il suo spirito alla contemplazione del grande problema la cui soluzione, da lui indubbiamente divinata, gli sfuggiva e che doveva apparirgli come una trionfale impresa riserbata agli studiosi dei secoli venturi.

Non è neanche scopo del presente studio quello di invadere un campo che gli storici potranno con maggior competenza e successo esplorare e forse più utilmente di quanto lo potessero prima, se vorranno ora tener presenti le avvertenze e i chiarimenti che lo studio stesso racchiude. Confido che essi sapranno trovare con opportune indagini documentarie elementi atti a confermare le vedute qui espresse e faranno opera assai meritoria.

L'esame del problema (II) – sia dal punto di vista scientifico che da quello storico – porta ad essenziali rilievi sull'aspetto dinamico dei problemi in questione. Tale materia sarà esaminata nella parte terza del presente scritto.

Fisica. — *Sulla disposizione dei diaframmi negli spettrometri beta elicoidali.* Nota (*) del Corrisp. Enrico Persico.

1. Negli spettrometri per raggi beta del tipo elicoidale, o a lente magnetica (1), il fascio elettronico è limitato da due diaframmi ad apertura anulare: un « diaframma d'entrata » D_a (fig. 1) che definisce l'intervallo $\alpha \pm \varepsilon$ di angoli di emissione utilizzato, e un « diaframma di uscita » D_b che seleziona il piccolo intervallo di spettro che deve volta per volta essere ricevuto dal contatore. La posizione e la larghezza delle aperture di questi diaframmi influiscono notevolmente sul profilo delle righe registrate e, per conseguenza, sul potere risolutivo dello strumento.

Il diaframma d'uscita, negli spettrometri a campo uniforme, è spesso fatto in modo che i due bordi B_1, B_2 della sua fenditura anulare non si trovino nello stesso piano, ma su un cono avente il vertice nella sorgente: ciò in base a un suggerimento di Frankel (2), il quale ha fatto notare che quando si varia il campo H

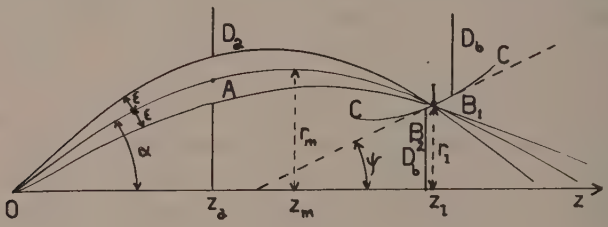


Fig. 1.

l'« immagine anulare » della sorgente (supposta puntiforme) si sposta lungo un cono avente il vertice nella sorgente stessa: su questo cono dunque devono essere posti i due bordi della fenditura d'uscita.

Ora, l'osservazione di Frankel è corretta solo a condizione che, variando H, non vari l'angolo di emissione medio α dei raggi ammessi dal diaframma d'entrata: ciò sarebbe approssimativamente vero se il diaframma d'entrata fosse assai vicino alla sorgente, ma questa condizione non è mai realizzata negli strumenti reali. In generale la superficie (pressochè conica) su cui si sposta l'immagine anulare della sorgente, e su cui devono trovarsi i due bordi della fenditura, dipende dalla posizione del diaframma d'entrata. In questa Nota vogliamo studiare questa dipendenza e indicare la posizione del diaframma d'entrata atta a dare al diaframma d'uscita la forma di più pratica realizzazione.

2. Cominceremo con lo stabilire una formula valida per ogni tipo di spettrometro elicoidale: in seguito la specializzeremo al caso del campo uniforme. Sia dunque (fig. 1) z l'asse di simmetria, O l'origine delle ascisse z, dove è posta la sorgente puntiforme, z_a l'ascissa del diaframma d'entrata. Le curve rappresentate

(*) Presentata nella seduta del 14 aprile 1951.

(1) E. Persico and C. Geoffrion, *Beta-Ray Spectroscopes*, « Rev. Sci. Instr. », *21*, 945 (1950).

(2) S. Frankel, « Phys. Rev. », *73*, 804 (1948).

nel disegno sono, naturalmente, le « tracce » degli elettroni in un piano meridiano rotante. Indicheremo, al solito, con e la carica elettronica in valore assoluto, con v la velocità, con m la massa (alla velocità v), con H il campo magnetico in un punto qualsiasi (ma fissato) dell'asse, e porremo $D = 2\,mv/(eH)$. Chiameremo poi $\alpha \pm \varepsilon$ gli angoli di emissione delle tracce che sfiorano i due bordi del diaframma d'entrata, e supporremo ε abbastanza piccolo per poter ammettere che tutte le tracce comprese fra queste si intersechino in uno stesso punto I, rappresentante la « immagine anulare » della sorgente.

Sia

$$r = r(D, \alpha, z) \tag{1}$$

l'equazione della traccia uscente da O con l'angolo α: le coordinate $z_I(D, \alpha)$, $r_I(D, \alpha)$ di I sono definite dalla (1) e da $(\partial r/\partial\alpha)_I = 0$. Si faccia ora variare la corrente che genera il campo, e quindi H e D: il punto I si sposta lungo una curva C, sezione meridiana della superficie su cui si sposta l'immagine anulare e su cui devono trovarsi i due bordi della fenditura. Vogliamo calcolare l'angolo ψ che la tangente a C in I forma con l'asse z. Si noti che nella detta variazione (che indicheremo con l'operatore δ) si deve considerare l'angolo α variabile in modo che la traccia media passi costantemente per il punto A (a metà larghezza della fenditura) cioè $dr(D, \alpha, z_a) = 0$. Si avrà quindi

$$\left(\frac{\partial r}{\partial D}\right)_a \delta D + \left(\frac{\partial r}{\partial \alpha}\right)_a \delta\alpha = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial r_I}{\partial D}\,\delta D + \frac{\partial r_I}{\partial \alpha}\,\delta\alpha = \delta r_I \tag{3}$$

$$\frac{\partial z_I}{\partial D}\,\delta D + \frac{\partial z_I}{\partial \alpha}\,\delta\alpha = \delta z_I . \tag{4}$$

Eliminando fra queste tre equazioni δD e $\delta\alpha$, e ponendo

$$\mu \equiv \frac{\delta\alpha}{\delta D} = -\left(\frac{\partial r}{\partial D}\right)_a : \left(\frac{\partial r}{\partial \alpha}\right)_a , \tag{5}$$

si ha

$$\tan\psi \equiv \frac{\delta r_I}{\delta z_I} = \frac{(\partial r_I)/(\partial D) + \mu\,(\partial r_I)/(\partial\alpha)}{(\partial z_I)/(\partial D) + \mu\,(\partial z_I)/(\partial\alpha)} . \tag{6}$$

Poichè, nel breve tratto che interessa, la curva C può essere sostituita dalla sua tangente, la (6) può riguardarsi come la formula che dà, per qualsiasi spettrometro elicoidale, la semiapertura ψ del cono su cui devono esser posti i due bordi della fenditura d'uscita, ossia la « inclinazione » rispetto all'asse della sezione di tale fenditura col piano meridiano.

3. Applichiamo ora la formula generale (6) al caso del campo uniforme (*spettrometro solenoidale*)[3,4]. In tal caso l'equazione (1) della traccia è[3]

$$r = D \sin\alpha \sin\zeta \tag{7}$$

(3) E. PERSICO, *A theory of the Solenoid Beta-Ray Spectrometer*. « Rev. Sci. Instr. », *20*, 192 (1949). Useremo qui le stesse notazioni di questo lavoro, che citeremo con la sigla R. S. I.

(4) J. W. M. DUMOND, *Conditions for optimum luminosity etc.* « Rev. Sci. Instr. », *20*, 160 (1949).

dove

$$\zeta = \frac{z}{D \cos \alpha}, \tag{8}$$

e le coordinate di I sono date da

$$r_I = D \sin \alpha \sin \beta \tag{9}$$

$$z_I = (\pi - \beta) D \cos \alpha \tag{10}$$

dove $\beta(\alpha)$ è la funzione definita da

$$\pi - \beta = \tan \beta \cot^2 \alpha ; \qquad 0 \leq \beta \leq \pi/2 , \tag{11}$$

il cui grafico è dato nella fig. 2 di R. S. I.

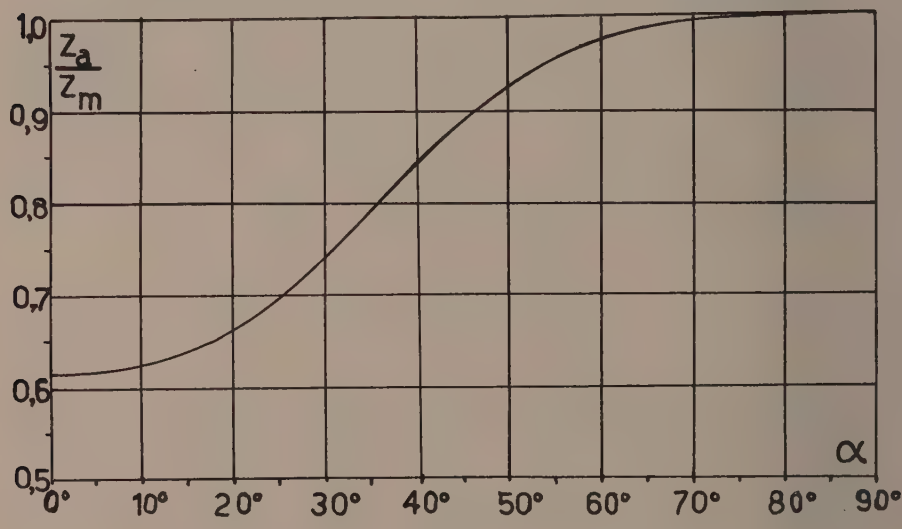


Fig. 2.

La posizione del diaframma d'entrata può essere caratterizzata per esempio dal parametro

$$\zeta_a = \frac{z_a}{D \cos \alpha} = \frac{\pi}{2} \frac{z_a}{z_m}, \tag{12}$$

dove con z_m si è indicata l'ascissa del punto ove r è massimo ($z_m = (\pi/2) D \cos \alpha$). Farà anche comodo, nel seguito, caratterizzare la posizione del diaframma d'entrata mediante il parametro

$$T = \frac{\tan \zeta_a}{\zeta_a} . \tag{13}$$

Ciò premesso, se si applica la (5) alla (7) si trova

$$\mu = - \frac{\tan \alpha}{D} \frac{T - 1}{T + \tan^2 \alpha} . \tag{14}$$

Sostituendo questo valore di μ nella (6), e calcolando le derivate ivi indicate, si trova infine

$$(15) \qquad \tan\psi = \frac{\cos\beta}{\cot^3\alpha}\,\frac{-T\cos^2\alpha + (\Gamma/2 - \sin^2\alpha)}{T(\Gamma/2 - \cos^2\alpha) - \sin^2\alpha},$$

dove Γ è la funzione di α (già introdotta in R. S. I., dove ne è dato il diagramma) definita da

$$(16) \qquad \Gamma = 3 + \cos^2\alpha \tan^2\beta(\alpha).$$

La (15) fornisce, per gli spettrometri a campo uniforme, l'inclinazione ψ da dare alla sezione della fenditura d'uscita, in funzione di α e della posizione del diaframma d'entrata.

4. Dalla (15) si traggono le seguenti conseguenze:

a) *Non può mai essere* $\psi = 90°$. Difatti, affinchè si annulli il dominatore di (15) deve essere (escluso il caso $\alpha = 0$) $T = (\sin^2\alpha)/(\Gamma/2 - \cos^2\alpha)$, e poichè

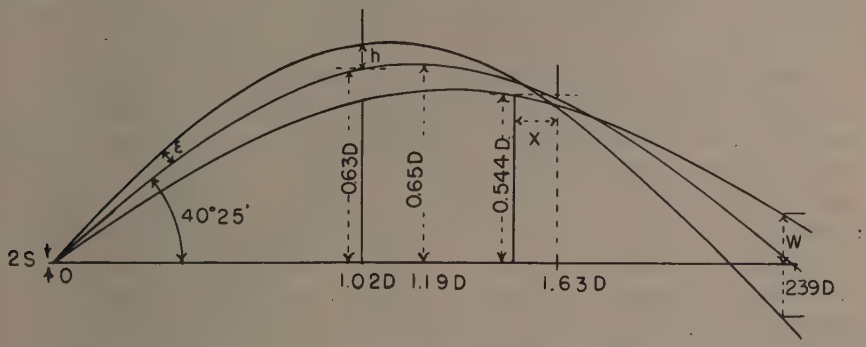


Fig. 3.

$\Gamma/2 > 1$, ciò condurrebbe a $0 < T < 1$, ossia a $\zeta_a > \pi$, $z_a > 2\,z_m$, il che è manifestamente impossibile. Dunque in nessun caso è corretto, in uno spettrometro solenoidale, porre i due bordi della fenditura d'uscita nello stesso piano normale all'asse (« fenditura a sezione verticale »).

b) *La disposizione di Frankel è approssimativamente corretta solo se il diaframma d'entrata è assai vicino alla sorgente.*

Difatti tale disposizione corrisponde a $\tan\psi = r_1/z_1$, ossia [usando le (9), (10), (11)] $\tan\psi = \tan^3\alpha\cos\beta$; dalla (15) si ricava allora $T = 1$, cioè $\zeta_a = z_a = 0$.

c) *Condizione perchè i due bordi della fenditura d'uscita abbiano lo stesso diametro (cioè perchè sia* $\psi = 0$*):* « *fenditura a sezione orizzontale* ». Tale disposizione è costruttivamente vantaggiosa, perchè permette di variare la larghezza della fenditura di uscita con un semplice spostamento longitudinale del suo bordo interno: interessa quindi calcolare la posizione del diaframma di entrata che consente questa disposizione. Da (15) si ha, per $\psi = 0$:

$$(17) \qquad T = \frac{\Gamma}{2\cos^2\alpha} - \tan^2\alpha.$$

Per mezzo di questa formula e della (13) abbiamo calcolato i valori di ζ_a, e quindi di z_a/z_m, corrispondenti a diversi valori di α. I risultati sono rappresentati nel diagramma della fig. 2. In particolare, per $\alpha = 45°\,37'$ (valore *optimum* per sorgente puntiforme) si trova $z_a/z_m = 0{,}894$; per $\alpha = 40°\,25'$ (*optimum* per sorgente estesa) si trova $z_a/z_m = 0{,}847$. La fig. 3 rappresenta la disposizione dei diaframmi e delle tracce relativa a questo ultimo caso.

Si noterà che i valori trovati per z_a/z_m sono perfettamente realizzabili e, poichè la posizione del diaframma d'entrata non è generalmente determinata in modo stringente da altre condizioni, conviene sceglierla con questo criterio, che consente di dare alla fenditura d'uscita la comoda disposizione « a sezione orizzontale ».

Biologia. — *Lo smescolamento del citoplasma studiato in cellule coltivate « in vitro »* (*). Nota di GIUSEPPE LEVI e ABRAM FAJER, presentata (**) dal Socio G. LEVI.

Nel 1902 Eugen Albrecht (1) scoperse un fenomeno oltremodo interessante, « lo smescolamento vacuolare » il quale si produce spesso per perturbamenti anche lievi delle sostanze costitutive del citoplasma; Albrecht lo interpretò quale una separazione dai protidi del citoplasma di sostanze le quali erano lassamente combinate con essi e perciò non visibili in precedenza. Col progredire delle conoscenze sui colloidi citoplasmatici il fenomeno dello smescolamento (*tropfige Entmischung*) fu più profondamente analizzato, ma in complesso l'interpretazione che ne aveva dato Albrecht fu confermata. Spek, Gilckhorn, Zeiger (2), Frey–Wissling (3) ritengono che nello smescolamento si abbia una separazione di fasi, quando viene turbato l'equilibrio tra miscugli protoplasmatici polifasici, per cui la parte più labile viene precipitata. Si può produrre per aggiunta di una nuova sostanza, per variazioni del pH del mezzo ed anche per azioni meccaniche. Secondo Frey–Wissling la formazione di vacuoli acquosi e lipidici nel citoplasma vivente sono fenomeni analoghi, rappresentano una separazione di costituenti, i quali, finchè il citoplasma è integro, sono intimamente legati e perciò sono invisibili al microscopio quali parti distinte. Anche in senso fisico–chimico e non soltanto in senso morfologico, abbiamo a che fare nel citoplasma integro con un sistema omogeneo (pseudo–fase) senza superfici interne. Questo sistema si smescola, se uno dei suoi componenti, ad esempio l'acqua, aumenta in quantità ed in estensione tale che lo stato di reciproco equilibrio non può più essere mantenuto; molecole simili

(*) Ricerche eseguite nell'Istituto di Istofisiologia della Fondazione Andrea e Virginia Matarazzo in San Paulo (Brasile).

(**) Nella seduta del 14 aprile 1951.

(1) E. ALBRECHT, *Verh. der anat. Ges.*, 16ª Vers. in Halle 207 (1901).

(2) E. ZEIGER, « Z. Zellforsch. », *34*, 230 (1949).

(3) FREY-WISSLING, *Submikroskopische Morphologie des Protoplasmas und seiner Derivate. Protopl. Mon.*, Berlin, Bronträger (1938).

si agglutinano e sono separate dal rimanente del citoplasma mediante un limite di fase. Nello stesso modo della separazione dei vacuoli acquosi si spiega la segregazione di gocciole lipidiche. Vi è un limite massimo nella quantità di lipidi in dispersione molecolare legati alla struttura citoplasmatica; al disopra di questo limite gli ammassi di molecole lipidiche si agglutinano in globuli, analoghi ai vacuoli acquosi.

Inoltre, mentre lo mescolamento fu considerato come un fenomeno postmortale, o per lo meno come l'espressione di gravi lesioni del citoplasma, oggi sappiamo che la formazione di vacuoli acquosi e lipidici è non solo compatibile colla sopravvivenza della cellula, ma è un fenomeno reversibile.

Questi processi possono essere studiati soltanto sulle cellule viventi. Colle sostanze che vengono impiegate nelle fissazioni istologiche si produce spesso una separazione di fasi, ma ad essa si sovrappone la coagulazione prodotta dai fissatori, la quale maschera il quadro citologico dello smescolamento. Non mi risulta invero che l'azione dei fissatori sulle cellule viventi sia stata studiata da tale punto di vista. Dai confronti eseguiti molti anni or sono da uno di noi [4] e da Strangeways e Canti [5] su cellule viventi in coltura, risultò, che colla fissazione delle cellule in liquidi contenenti una percentuale relativamente alta di acido osmico (oppure coi vapori di acido osmico) la struttura del citoplasma della cellula vivente viene conservata integralmente; sembra che con questo metodo di fissazione lo smescolamento sia evitato; forse anche con fissazione in formalina od in miscele di formalina e bicromato si ottiene lo stesso risultato.

Il fenomeno dello smescolamento fu da noi studiato in cellule coltivate *in vitro*. Le colture furono ottenute da espianti di cuore di embrione di pollo dal 5° al 7° giorno d'incubazione, in parte da espianti di fegato di embrione di pollo al 6°-7° giorno, nei quali si ebbe un'emigrazione di cellule endoteliali; furono pure studiati fibrociti del connettivo. Comunque si trattava sempre di cellule indifferenziate coi caratteri ben noti. E poichè le colture erano state per lo più allestite in plasma molto diluito con liquido Tyrode e con succo di embrioni (in uno strato sottile), e talora in mezzo salino senza estratto, secondo la tecnica dei Lewis, le cellule si presentavano molto espanse in superfice. All'esame della coltura alla 24ª-36ª ora d'incubazione, le cellule appaiono molto trasparenti, con lunghi condrioconti, secondo la descrizione che ne fu data da già molti anni da Lewis e Lewis e da uno di noi. Nella più gran parte delle cellule non si apprezzano altre parti dotate di forma propria all'infuori dei condrioconti; in alcune cellule soltanto si vede qualche minuto granulo più refrangente dei condrioconti, che presenta un movimento di va e vieni abbastanza veloce tra la periferia della cellula e la regione circostante al centriolo, (cosidetta zona di Golgi), nella quale regione spesso i granuli si accumulano in maggiore numero. Nelle ore successive i granuli aumentano di numero e di volume, specialmente nella zona di Golgi: alla fine del 2° giorno di vita della coltura molte cellule contengono grosse goccie

(4) G. LEVI, «Arch. ital. Anat. Embr.», *16*, 423 (1919).
(5) T. S. P. STRANGEWAYS, e R. G. CANTI, «Quart. J. micr. Sc.», *71*, 1 (1926).

lipidiche in buon numero, le quali derivano certamente da confluenza dei minuti granuli animati da vivace movimento, dei quali abbiamo fatto cenno più sopra.

Se ad una coltura alla 24ª–36ª ora di vita, nella quale le cellule sono in prevalenza trasparenti e del tutto prive di granuli, si aggiunge una soluzione di Rosso Neutro in liquido di Ringer 1/20.000 e viene esaminata al microscopio dopo pochi minuti, appaiono nel ialoplasma molti minuti granuli colorati in rosso (figg. 1, 2). Da un confronto accurato di determinate cellule prima e dopo il trattamento colla soluzione colorante, abbiamo potuto dimostrare con certezza, che i granuli non preesistevano al trattamento col Rosso Neutro, ma che si sono

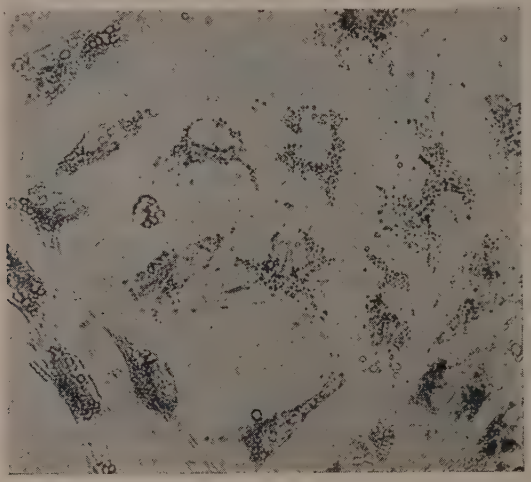


Fig. 1. – Da una coltura di cuore di embrione di pollo al 5° giorno d'incubazione in mezzo liquido (liquido di Ringer p. 5, succo di embrioni di 2ª centrifugazione p. 1). Colorazione vitale con Rosso Neutro (soluzione 1/20.000) al 2° giorno di vita della coltura. Granuli colorati scarsi e minuti; in singole cellule qualche goccia lipidica non colorata Ingr. 425 ×.

costituiti per l'azione del colore, perchè anche in cellule a ialoplasma del tutto omogeneo fu ripetutamente osservata la comparsa di minuti granuli coloranti. Con ciò l'osservazione di Olivo e Boskovich (6) che i granuli colorati dal Rosso Neutro non preesistono ma si formano bruscamente al momento della penetrazione del colore nella cellula, viene ad essere confermata.

Inoltre a conferma di osservazioni antecedenti di Olivo (7) abbiamo notato che la quantità di granuli di Rosso Neutro varia molto in relazione alle proprietà del mezzo di coltura. Se questo è costituito da liquido di Ringer puro oppure da succo di embrioni molto diluito con soluzioni saline, i granuli sono piccoli e scarsi (fig. 1), mentre che in colture allestite in succo di embrioni concentrato, i granuli colorati sono più numerosi e più grossi, ed il ialoplasma contiene inoltre vacuoli

(6) O. Olivo e M. Boskovic, «Boll. Soc. Biol. sper.», 11, 447 (1936).
(7) O. Olivo, «Boll. Soc. it. Biol. sper.», 1, 523 (1926).

molto refrangenti, i quali non appaiono colorati col Rosso Neutro; si tratta evidentemente di gocce lipidiche (fig. 2).

L'interpretazione di questi reperti è ovvia; la soluzione di Rosso Neutro non è innocua per la cellula, ma essa determina uno smescolamento del ialoplasma, per effetto del quale piccolissimi vacuoli sono segregati ed assumono la sostanza colorante istantaneamente, all'atto in cui si costituiscono.

In alcune cellule (non in tutte) i granuli colorati anzichè avere una distribuzione uniforme, sono raccolti in maggiore quantità ad un polo del nucleo intorno all'idiosoma, nella cosidetta zona di Golgi.

Qual'è la natura dei granuli colorati vitalmente col Rosso Neutro? Non è la prima volta che la questione è stata posta. Veratti (1922) ricevette l'impres-

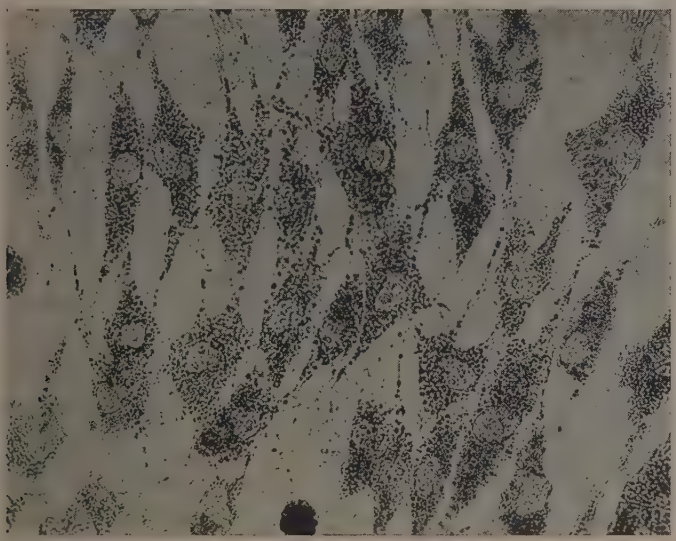


Fig. 2. – Da una coltura di cuore di embrione di pollo al 5° giorno d'incubazione in mezzo liquido (succo di embrioni concentrato puro). Colorazione vitale con Rosso Neutro (soluzione 1/20.000) al 2° giorno di vita della coltura. Le cellule sono più grandi che quelle riprodotte a fig. 1 e contengono un gran numero di granuli minuti e stipati. Ingr. 425 ×.

sione che talora i lipidi si depongano nell'interno dei vacuoli colorati col Rosso Neutro, ma un esame attento lo convinse che non è così. Nagel ritiene che la deposizione di lipidi avvenga nell'interno di vacuoli preformati; accumulo di colore e di lipidi sarebbero processi biologicamente equivalenti. Per risolvere la questione abbiamo cercato di ottenere uno smescolamento del citoplasma per altra via, col porre la coltura in presenza delle sostanze che vengono impiegate per la colorazione elettiva dei lipidi. Evidentemente però mentre che nella colorazione col Rosso Neutro lo smescolamento è compatibile colla sopravvivenza della cellula, il trattamento con i colori del gruppo del Sudan determinano uno smescolamento associato ad una precipitazione delle sostanze che compon-

gono il citoplasma, di natura tale da determinare la morte istantanea della cellula.

Noi abbiamo adoperato il Nero Sudan (Sudan Black) [8] incomparabilmente superiore al Sudan III e IV, i quali in passato venivano usati abitualmente. Baker [9] fa notare che esso ha di fronte agli altri coloranti dei lipidi il vantaggio di una maggiore opacità, la quale facilita la risoluzione ottica di piccolissime goccie di lipidi; inoltre a differenza degli altri è solubile in tutti i lipoidi, colorando i fosfatidi altrettanto bene che i trigliceridi.

Dalle accurate ricerche di Szantroch [10] appare, che la tecnica comunemente usata per la colorazione dei lipidi (che è quella di fissare in formalina e di colorare in un secondo tempo) presenta degli inconvenienti; colla fissazione in

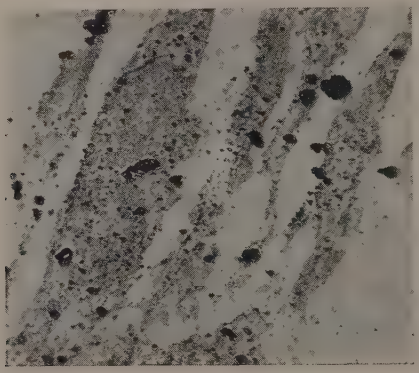


Fig. 3. - Da una coltura di cuore di embrione di pollo al 6° giorno d'incubazione, in un mezzo costituito da plasma p. 1, succo di embrioni p. 1, liquido di Tyrode p. 10; fissata alla fine del 2° giorno in formalina, soluzione alcoolica di Nero Sudan (vedi testo); numerosi granuli colorati in nero dal Sudan, in prevalenza piccolissimi, sparsi in tutto il citoplasma. Ingr. 660 ×.

formalina molte gocce si rompono, altre confluiscono e dopo l'aggiunta della soluzione alcoolica di Sudan III molti lipidi vengono disciolti, cosicchè soltanto una parte di essi si conserva bene nel preparato. Perciò Szantroch ha proposto di evitare la fissazione preliminare in formalina, coll'immergere il preparato fresco in una miscela di formalina e soluzione alcoolica di Sudan. Noi abbiamo seguìto questa stessa tecnica adoperando il Nero Sudan. La coltura vivente dopo rapido lavaggio in liq. Tyrode viene immersa nella soluzione seguente: Formalina pura p. 1, soluzione satura di Nero Sudan in alcool 70 % p. 9; la coltura viene mantenuta in questa soluzione per 1–2 ore, lavata in alcool a 70%, poi in acqua e montata in gomma sciroppo Apáthy (eventualmente colorazione di contrasto con eosina o con fucsina).

(8) Sudan Black, B. della Nat. Aniline Division Allied Chemical and Dye Corpor. N. Y.
(9) J. Baker, « Quart. J. micr. Sc. », *83*, (1944).
(10) Z. Szantroch, « Virch. Arch. », *286*, 675 (1932).

Nelle colture allestite con questa tecnica abbiamo visto nel ialoplasma, il quale *in vivo* appariva omogeneo, un numero stragrande di minutissimi granuli, che si sono evidentemente costituiti per effetto di uno smescolamento provocato dalla miscela di formalina e Sudan (figg. 3-4); alcuni di questi granuli sono, ripeto estremamente piccoli, al limite della visibilità microscopica (fig. 4). Essi sono sparsi uniformemente in tutto il ialoplasma; soltanto in alcune cellule sono più numerosi nella zona circostante alla centrosfera (zona di Golgi fig. 5).

Le goccie lipidiche relativamente voluminose, riconoscibili *in vivo* per la loro refrangenza e che si conservano e si colorano in bruno colla fissazione in liquidi osmici, appaiono naturalmente nei preparati col Sudan, invariate per forma ed intensamente colorate (figg. 3–5).

In molte colture si vedono granuli minutissimi disposti lungo i condrioconti; oppure questi assumono in totalità una tinta nera (fig. 5). Il reperto non è del tutto nuovo; già Baker (loc. cit.) aveva ottenuto in preparati colorati col Nero Sudan una colorazione dei condriosomi. È noto che Fauré-Fremiet, Mayer e Schaeffer hanno per i primi dimostrato che i condriosomi constano di un complesso di protidi e lipoidi. Secondo Bensley la lecitina e la cefalina sono nei condriosomi in quantità scarsa (4 %), più abbondanti sono i gliceridi (29 %); nè gli uni nè gli altri si colorerebbero col Sudan perchè molto dispersi. Frey-Wissling suppone che i lipidi si trovino nei condriosomi in stato di dispersione finissima; i mitocondri sarebbero coacervati; la coesione sarebbe in essi mantenuta da forze molecolari di attrazione; lo strato superficiale del mitocondrio sarebbe un mosaico di proteine e di lipodi. Anche Ciaccio ritiene che i lipoidi siano un costituente essenziale ed invariabile dei condriosomi e del cosidetto apparato reticolare interno (istolipoidi).

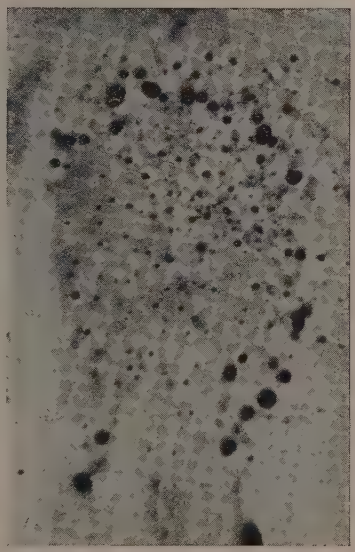


Fig. 4. – Dalla stessa coltura riprodotta a fig. 3. Una cellula molto espansa in superficie; numerosi granuli molto minuti sparsi in tutto il citoplasma, colorati dal Nero Sudan; alla periferia qualche goccia un po' più grande. Ingr. 1.450 ×

Riepilogo e considerazioni. – Nelle cellule in coltura (secondo la tecnica qui indicata) nelle prime ore di vita della coltura, di solito non si verifica smescolamento del ialoplasma. I lipidi (molto probabilmente fosfatidi) contenuti in soluzione acquosa negli interstizi del graticcio molecolare delle catene di polipeptidi sono invisibili al microscopio. Però per condizioni che sfuggono (probabilmente variazioni nel pH) in alcune cellule dopo le prime 24 ore divengono visibili minuti granuli lipidici. Questa « lipofanerosi spontanea » dipende da smescolamento ed interessa un numero tanto più grande di cellule, quanto meno favorevoli sono le condizioni di vita della coltura.

I granuli lipidici sono dotati di movimento molto più vivace dei condrioconti, perchè trascinati dalle correnti del ialoplasma; una parte di questi granuli si costituisce certamente in seno al ialoplasma, ma secondo osservazioni antecedenti di uno di noi [11] una parte deriva dai condrioconti. Essi corrispondono ai *lipocondri* di Ries. Divengono sempre più numerosi coll'età della coltura e confluiscono in goccie gradatamente più voluminose, le quali sono un attributo costante di quasi tutte le cellule in coltura al 2°–3° giorno di vita. Questa lipofanerosi spontanea da smescolamento del ialoplasma, è reversibile; se la coltura viene lavata e trasferita in mezzo fresco, le goccie scompaiono, il ialoplasma diviene omogeneo [12]. Anche le esperienze di A. Fischer [13] lo dimostrano con grande evidenza; se si

Fig. 5. – Da una coltura di cuore di embrione di pollo all'8° giorno d'incubazione in un mezzo costituito da plasma p. 1, siero di sangue p. 1, succo di embrioni p. 1, liquido di Tyrode p. 10.; fissata alla fine del 2° giorno in formalina-soluzione alcoolica di Nero Sudan (vedi testo). Cellule molto espanse in superficie con qualche goccia lipidica di vario volume. In stretto rapporto colla membrana nucleare risalita al polo distale del nucleo la zona di Golgi; è costituita da granuli lipidici minutissimi molto stipati. Lunghi condrioconti pure colorati dal Nero Sudan. Ingr. 850 ×.

escide un settore in una coltura le cui cellule sono piene di lipidi, le cellule che ricostituiscono la perdita di sostanza sono divenute trasparenti.

Di natura diversa è lo smescolamento prodotto da sostanze estranee al mezzo di coltura; in presenza di soluzioni diluite di Rosso Neutro appaiono istantaneamente nel ialoplasma granuli colorati; la sostanza colorante ha determinato uno smescolamento dei fosfatidi legati ai protidi del ialoplasma, i quali hanno assunto il Rosso Neutro. I granuli colorati sono relativamente scarsi in colture in mezzo salino con piccola quantità di succo di embrione; ma se il succo di embrioni è concentrato, i granuli colorati sono molto numerosi, evidentemente perchè il ialoplasma ha legato a sè una quantità di lipoidi molto maggiore, i quali vengono smascherati dal colore (cfr. figg. 1 e 2). Nella colorazione vitale con Rosso

(11) G. Levi, *Trattato di Istologia*, 3ª edizione, Torino, Utet (1946).
(12) G. Levi, « Arch. it. Anat. Embr. », *16* (1919).
(13) A. Fischer, *Biology of tisme cells*. Gyldendalme Boghendel, Copenhagen 1946.

Neutro, la lipofanerosi fu determinata da sostanze estranee al mezzo di coltura, ed è irreversibile, ma compatibile colla sopravvivenza della cellula (per un periodo limitato). Infine, mediante il trattamento con formalina e soluzione alcoolica di Nero Sudan (il quale uccide le cellule) abbiamo determinato uno smescolamento del citoplasma di grado anche maggiore che nei casi precedenti. Si ha in tal caso probabilmente uno smascheramento di tutti i lipoidi legati ai protidi del ialoplasma e per di più anche di quelli che sono legati ai condriosomi (14).

Ci siamo formati la convinzione fondandoci sulle osservazioni qui riferite che vi sia una certa coincidenza tra i granuli colorati vitalmente col Rosso Neutro e quelli colorati colla miscela Sudan–formalina. Ne deduciamo che il Rosso Neutro ha determinato come il Sudan uno smascheramento dei lipoidi. Sembra però che il Rosso Neutro sia in grado di colorare i lipoidi soltanto all'atto in cui si liberano dal legame coi protidi e non quelli deposti in precedenza (15); invece il Nero Sudan colora tutti i lipidi, tanto quelli che si sono costituiti all'atto del trattamento colla miscela Nero Sudan–formalina che quelli preesistenti.

I fatti da noi osservati convalidano le moderne vedute sui legami esistenti tra i polipeptidi del citoplasma e i lipoidi. Secondo l'ipotesi di Frey–Wissling negli interstizi del graticcio molecolare delle catene di polipeptidi sarebbe contenuta una soluzione acquosa di sali e di lipoidi (fosfatidi). Questi ultimi hanno spiccata tendenza all'idrofilia; essi sono combinati con gruppi terminali idrofili e lipofili delle catene laterali; questo legame non è di natura chimica, perchè i fosfatidi possono essere estratti coll'etere (cenapsi secondo Macheboeuf (16)). La labilità del legame tra catene di polipeptidi e fosfatidi ci rende ragione della facilità con cui, anche per fattori esteriori lievi, si produce una lipofanerosi da smescolamento del citoplasma.

(14) Dello smascheramento dei lipidi della zona di Golgi dimostrato da C. CIACCIO molti anni or sono («C. rendus Assoc. Anat. Réunion de Liége,» 1926) preferiamo di non occuparci. La questione dei lipidi mascherati della zona di Golgi è divenuta molto complessa e non può essere trattata in via incidentale. Del resto il mio materiale di studio (cellule molto espanse in superficie) è poco adatto allo studio della zona di Golgi.

(15) La relazione tra vacuoli colorabili col Rosso Neutro e goccie lipidi è trattata brevemente da CHÈVREMONT nel suo esauriente studio sugli istiociti... Secondo CHEVREMONT «... il semble bien que la plupart du temps les deux types d'enclaves sont distincts; cependant il existe parfois des gouttelettes lipidiques qui sont entourées d'un halo de Rouge-Neutre» («Arch. Biol.», 53, p. 380, 1942).

(16) MACHEBOEUF, *État des lipides dans la matière vivante*, Hermann, Paris (1936).

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Sui teoremi d'esistenza della teoria del potenziale e della rappresentazione conforme* (*). Nota I di GAETANO FICHERA, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

Da alcuni anni diversi matematici delle Scuole americane, cultori di equazioni differenziali, sono interessati allo studio di certe funzioni connesse a talune equazioni del tipo ellittico (1). Tali funzioni di tipo nucleare e, perciò, appunto dette « funzioni nucleari » (*kernel functions*) vengono espresse mediante sviluppi in serie, procedenti secondo le funzioni di sistemi di soluzioni particolari dell'equazione omogenea in istudio, opportunamente normalizzate. È da convenire che tali *kernel functions* godono di eleganti proprietà formali, per cui può risultare di interesse il loro studio. L'opinione dello scrivente diverge, però, da quella dei cultori di dette *kernel functions* quando essi affermano che il loro impiego risulta di effettiva utilità nella risoluzione dei problemi esistenziali e quantitativi inerenti alla teoria delle equazioni alle derivate parziali lineari del tipo ellittico, problemi che, nella maggior parte dei casi, ancora oggi, presentano molti lati inesplorati.

In effetti, fino ad ora, non sembra che l'uso di queste funzioni nucleari permetta di conseguire il teorema di esistenza per un dato problema al contorno, oppure il calcolo della soluzione. Tale affermazione venne fatta dallo scrivente durante un suo recente soggiorno negli Stati Uniti d'America ad uno dei maggiori cultori della teoria delle *kernel functions*, al quale fu anche chiesto quale problema permettesse di risolvere l'impiego di esse. Il Matematico in questione ebbe a rispondere che l'introduzione delle funzioni nucleari permetteva di risolvere il *problema della rappresentazione* delle soluzioni delle equazioni di tipo ellittico. In verità la risposta è un po' oscura e non è lungi dall'apparire affatto priva di senso a chi, come lo scrivente, ha la possibilità di esercitare da oltre un decennio la propria attività scientifica in un Istituto di Applicazioni della Matematica, ove si è sempre pensato che, quanto alla rappresentazione, dette soluzioni lo son bene dalle equazioni stesse che le determinano!

Si può quindi ben comprendere con quanto interesse sia stata studiata da chi scrive una Memoria che i Sigg. Garabedian e Schiffer hanno recentemente pubblicato

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta del 14 aprile 1951.

(1) Cfr. ad esempio: S. BERGMAN, *Sur les fonctions orthogonales de plensieurs variables complexes*. « Memorial des Sci. Math. », vol. 106, Paris (1947); S. BERGMAN and M. SCHIFFER, *A representation of Green's and Neumann's functions in the theory of partial differential equations of second order*. « Duke Math. Journ. », vol. 14, pp. 609-638 (1947); *Kernel functions in the theory of partial differential equations of elliptic type*. « Duke Math. Journ. », vol. 15, pp. 535-566 (1948); *On Green's and Neumann's functions in the theory of partial differential equations*. « Bull. Amer. Math. Soc. », vol. 53, pp. 1141-1151 (1947); P. GARABEDIAN, *Schwarz lemma and the Szegö kernel function*. « Trans. Amer. Math. Soc. », vol. 67, pp. 1-35 (1949); N. ARONSZAJN, *Theory of reproducing kernels*. « Trans. Amer. Math. Soc. », vol. 68, pp. 337-404 (1950).

nella pregiata rivista americana di matematica « Annals of Mathematics », e che reca lo stesso titolo della presente Nota [2]. Interesse tanto più vivo in quanto dalla prefazione appare che le *kernel functions* vengono finalmente impiegate nello studio di problemi concreti, seppure di soluzione ormai classicamente nota.

Vale la pena riportare alcuni brani della detta prefazione. « *The object of the present paper is to give a new set of proofs of some fundamental existence theorems of conformal mapping and potential theory by using the notion of a kernel functions as introduced by Bergmann. The proofs which we present here are a more or less natural outcome of the recent researches done in this theory. Our new attack upon the existence problem has on the one hand the advantage of generality, since it is applicable in the case of partial differential equations of elliptic type and since for functions of several complex variables the theory of the kernel functions is well developed, while on the other hand the approach is simple and elementary in comparison with, say, the method using the Dirichlet principle. For potential theory and conformal mapping in multiply-connected plane domains, our proof is probably as simple as any known, and even for simply-connected domains the method has the advantage that it is based on a general theory rather than upon special artifices. A further point which we gain is that the kernel function associated with the various norms of functions theory and elliptic partial differential equations are well adapted to numerical computation, in view of their relation to orthogonal functions, so that we obtain at one and the same time an existence proof and a computational algorithm ... Thus we present our material in four sections. In the first we show the existence of the conformal mapping of a multiply-connected plane domain upon the well known slit domains obtained often from the Dirichlet principle. We base our considerations in this section upon Bergmann's original kernel function. In the second section we use the kernel function of the space of real harmonic functions normed by the energy integral. We prove the existence of Green's functions and thus open the way to the solution of the Dirichlet problem for harmonic functions ...* ».

Scopo della presente Nota e di una successiva è di dimostrare la insufficienza dei procedimenti adottati dai Signori Garabedian e Schiffer per il conseguimento degli obbiettivi proclamati ed inoltre di apportare un contributo alle classiche questioni da Essi investigate applicando, in particolare – in un modo che è forse utile, soprattutto per la sua estrema semplicità – le trattazioni esistenziali che lo scrivente, già da qualche tempo, ha dedotto dai metodi generali d'integrazione dei sistemi di equazioni differenziali lineari dovuti all'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

1. CRITICHE AI PROCEDIMENTI DEI SIGNORI GARABEDIAN E SCHIFFER. – Seguendo le notazioni dei Signori Garabedian e Schiffer, indicheremo con D un dominio piano (insieme aperto) limitato di contorno C, costituito dalle curve analitiche chiuse $C_1, C_2, \cdots, C_\nu$ a due a due senza punti in comune, con $\mathfrak{L}^2$ la classe delle funzioni $f(z)$ analitiche in D tali che

$$\iint_D |f'(z)|^2 \, d\tau < +\infty \qquad \left(z = x + iy \;,\; f'(z) = \frac{df}{dz} \;,\; d\tau = dx\,dy\right)$$

(2) Cfr. GARABEDIAN, and SCHIFFER, *On existence theorems of potential theory and conformal mapping.* « Annals of Math. »; second series, vol. 52, n. 1, July 1950, pp. 164–187.

e con $\mathfrak{M}^2$ la classe delle funzioni armoniche reali $\varphi(z)$, definite in D tali che

$$\iint_D \left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right\} d\tau < +\infty .$$

I Signori Garabedian e Schiffer considerano nelle loro dimostrazioni due funzioni del tipo seguente ($\bar{a}$ = coniugato di a):

$$I(w) = \iint_D \frac{\overline{M'(z)}}{z - w}\, d\tau \quad , \quad J(w) = \iint_D \left\{\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{1}{|z-w|} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\log\frac{1}{|z-w|}\right\} d\tau$$

essendo: $M(z) \subset \mathfrak{L}^2$ e $H(z) \subset \mathfrak{M}^2$.

Essi constatano che in entrambi i casi le due particolari funzioni $M(z)$ ed $H(z)$ sono tali da dar luogo a due funzioni $I(w)$ e $J(w)$ uniformemente continue nell'esterno di D. Dopodichè, indicato con ρ un numero positivo tale che una delle due circonferenze – sia γ – tangente a C in un qualsiasi prefissato punto w_0 abbia ogni altro suo punto contenuto in D, essi fanno la seguente affermazione:

« *. . . it suffices in order to prove the continuity of* $I(w)$ (in tutto il piano) *to show that if* w_1, *and* w_2 *are inverse points with respect to the circle* γ *trough* w_0, *then* $I(w_2) - I(w_1)$ *tends to zero as* w_1 *and* w_2 *approach* w_0. *It is even sufficient to assume that* w_1 *and* w_2 *both lie on the normal to* γ *at* w_0 *in this limit process* ».

Un analogo discorso vien fatto per l'integrale $J(w)$. Tale argomentazione sembra insufficiente e a mio avviso occorrerebbe, in più, dimostrare che la relazione di limite

$$\lim_{w_1 \to w_0} [I(w_2) - I(w_1)] = 0 \tag{1}$$

riesce uniforme al variare di w_0 su C.

Le considerazioni ulteriori svolte dai Signori Garabedian e Schiffer, dalle quali dovrebbe risultare il sussistere uniforme della (1) rispetto a w_0, contengono però esse stesse delle affermazioni, che, come ci proponiamo di mostrare, sono infondate.

Fissiamo, ad esempio, la nostra attenzione sulla funzione $J(w)$. Nel corso del ragionamento tendente a provare l'analoga della (1) i due Autori asseriscono che, appartenendo H ad $\mathfrak{M}^2$, la funzione $\partial H/\partial n$, derivata di H secondo la normale a γ in un suo punto, deve essere integrabile (linearmente) su γ (cfr. p. 173) dovendo per di più sussistere per la H nel dominio circolare limitato da γ le ordinarie formule di Green–Gauss che trasformano integrali curvilinei in integrali doppi ed, in particolare, la formola

$$\int_\gamma \frac{\partial H}{\partial n}\, ds = 0 .$$

Supposto che γ abbia centro in $z = 0$, raggio 1 e che sia $w_0 = 1$, essi ritengono di giustificare quanto affermano, dicendo: « *. . . since* $H(z)$ *is regular on* γ *except at* $z = 1$ *and since* $H(z)$ *is in* $\mathfrak{M}^2$ *and therefore has a gradient which grows at most like* $(1 - |z|)^{-1}$ *as* $z \to 1$ (!?) ».

Dimostreremo, d'altronde, con un esempio, che l'appartenenza di H a $\mathfrak{M}^2$ non basta perchè $\partial H/\partial n$ sia integrabile su γ.

Si consideri la funzione

$$\varphi(z) = \log(\log z)$$

la quale – convenendo di assumere la determinazione principale dei logaritmi – è olomorfa in ogni campo del piano xy che non contenga nessun punto per cui: $y = 0$, $x \leq 1$. In particolare essa è quindi olomorfa nel campo D definito dalla disuguaglianza: $|z - i| < 1$.

Poniamo

$$K(z) = \Re\varphi(z) \quad , \quad H(z) = \Im\varphi(z).$$

Le funzioni $K(z)$ ed $H(z)$ sono armoniche in D ed appartengono ad $\mathfrak{M}^2$, com'è facile verificare. Detta γ la circonferenza di centro i e raggio 1, indicheremo con n la normale esterna in un suo punto ζ e con s l'ascissa curvilinea di ζ contata, in senso antiorario, a partire dal punto $z = 0$. Poichè si ha:

$$\frac{\partial H}{\partial n} = -\frac{\partial K}{\partial s},$$

se $\partial H/\partial n$ fosse integrabile su γ, dovrebbero esistere finiti i due limiti: $\lim_{s\to 0} K(\zeta)$ e $\lim_{s\to 2\pi} K(\zeta)$. Ciò non è vero. Infatti introdotto un sistema di coordinate polari con polo $z = 0$ e asse polare il semiasse delle x positive, dette ρ, Θ le coordinate polari di ζ e tenuto conto che si ha, dato che ζ è su γ: $\rho = 2 \operatorname{sen}\Theta$ $(0 \leq \Theta \leq \pi)$, si ottiene

$$K(\zeta) = \frac{1}{2}\log\{(\log 2 \operatorname{sen}\Theta)^2 + \Theta^2\} \quad , \quad s = 2\Theta$$

e quindi

$$\lim_{s\to 0} K(\zeta) = \lim_{s\to 2\pi} K(\zeta) = +\infty.$$

2. RICHIAMO DI UN LEMMA FONDAMENTALE. – La funzione $J(w)$, e, quindi, anche la $I(w)$, dato che l'una si riconduce facilmente all'altra, era già stata in precedenza studiata da chi scrive in una Nota apparsa nel 1948 (3) e i risultati che la riguardano si trovano anche, e con maggiori dettagli, contenuti in una più recente Memoria (4). Tali risultati non sembrano essere conosciuti dai Signori Garabedian e Schiffer.

(3) Cfr. G. FICHERA, *Teorema d'esistenza per il problema bi-iperarmonico.* « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. V, fasc. 6, pp. 319-324.

(4) Cfr. G. FICHERA, *Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno, relativi all'equilibrio di un corpo elastico.* « Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa », ser. III, vol. IV, fasc. I-II, pp. 35-100 (1950). Cfr. anche R. B. ANCORA, *Problemi analitici connessi alla teoria della piastra elastica appoggiata.* « Rend. del Sem. Mat. dell'Univ. di Padova », vol. XX, pp. 99-134 (1951).

Il comportamento di $J(w)$ nei punti di C viene regolato dal seguente lemma

I. – *Se $h(z)$ è una funzione reale verificante in ogni dominio interno a* D *una condizione di Hölder e avente quadrato sommabile in* D, *per quasi tutti i punti* ζ *di* C *riescono sommabili in* D *le funzioni di* z

$$h(z)\frac{\partial}{\partial x}\log|z-\zeta| \quad , \quad h(z)\frac{\partial}{\partial y}\log|z-\zeta|$$

e si ha per quasi tutti i punti ζ *di* C

$$(2)\quad \begin{cases} \lim\limits_{w\to\zeta}\iint\limits_D h(z)\frac{\partial}{\partial x}\log|z-w|\,d_z\tau = \iint\limits_D h(z)\frac{\partial}{\partial x}\log|z-\zeta|\,d_z\tau, \\ \lim\limits_{w\to\zeta}\iint\limits_D h(z)\frac{\partial}{\partial y}\log|z-w|\,d_z\tau = \iint\limits_D h(z)\frac{\partial}{\partial y}\log|z-\zeta|\,d_z\tau, \end{cases}$$

comunque il punto w *tenda a* ζ, *sulla normale a* C *in* ζ, *dall'interno o dall'esterno di* C.

Si può, più in generale, dimostrare che le relazioni di limite (2) seguitano, quasi ovunque su C, a sussistere anche se w tende a ζ lungo una qualsiasi direzione determinata da un versore continuo a tratti su C e penetrante nell'interno di D. È opportuno anche avvertire che per la validità del lemma è largamente sufficiente che C possa decomporsi nella somma di un numero finito di archi di curva dotati di tangente e curvatura continue (archi di classe 2).

Analisi matematica. — *Ancora sopra un'applicazione dei polinomi di Bernstein all'approssimazione in media delle funzioni sommabili.* Nota di Eugenio Levi, presentata (*) dal Corrisp. G. Ascoli.

In una precedente Nota (1) si è dimostrato che la derivata dell'n–mo polinomio di Bernstein relativo alla funzione integrale della funzione $f(x)$, sommabile in $0, 1$, converge per $n\to\infty$ in media di ordine 1 verso la funzione $f(x)$. In questa Nota il teorema viene esteso alle funzioni di più variabili – ridotte a due per sole ragioni di semplicità formale –, stabilendosi inoltre che se la funzione è di classe L^p $(p \geqq 1)$ sussiste la convergenza in media di ordine p.

1. L'n–mo polinomio di Bernstein della funzione $F(x, y)$, continua nel quadrato Q: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ è definito da (2)

$$B_n F(x, y) = \sum_{m=0}^{n}\sum_{m'=0}^{n} T_{n,m}(x)\, T_{n,m'}(y)\, F\left(\frac{m}{n}, \frac{m'}{n}\right),$$

(*) Nella seduta del 14 aprile 1951.

(1) E. Levi, *Sopra un'applicazione dei polinomi di Bernstein all'approssimazione in media delle funzioni sommabili* (questi «Rendiconti», (8), IX, pp. 242–246 (1950)). Questa Nota sarà in seguito richiamata con (N).

(2) Per il significato e le proprietà dei simboli $T_{n,m}$, $A_{n,m}$ cfr. (N).

e si ha, uniformemente in Q:

$$\lim_{n\to\infty} [B_n F(x,y) - F(x,y)] = 0.$$

Consideriamo ora la funzione $f(x,y)$, di classe L^p nel quadrato Q, e indicando con $R(x,y)$ il rettangolo del piano ξ,η definito da $0 \leq \xi \leq x$, $0 \leq \eta \leq y$, si ponga

$$F(x,y) = \int_{R(x,y)} f(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta .$$

La $F(x,y)$ è continua; determinato per essa l'n–mo polinomio di Bernstein $B_n F(x,y)$ si calcoli:

$$C_n f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} B_n f(x,y).$$

Vale allora la relazione:

$$\lim_{n\to\infty} \int_Q |C_n f(x,y) - f(x,y)|^p\, dx\, dy = 0 \tag{1}$$

ossia: *La derivata seconda mista dell'n–mo polinomio di Bernstein relativo alla funzione integrale della funzione $f(x,y)$, di classe L^p in Q, converge per $n\to\infty$, in media di ordine p, verso la funzione $f(x)$.*

2. Per determinare la forma esplicita di

$$C_n f(x,y) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{m'=0}^{n} T'_{n,m}(x)\, T'_{n,m}(y)\, F\left(\frac{m}{n}, \frac{m'}{n}\right) =$$

$$= \sum_{m'=0}^{n} T'_{n,m'}(y) \sum_{m=0}^{n} T'_{n,m}(x)\, F\left(\frac{m}{n}, \frac{m'}{n}\right)$$

si osservi che per la (2) di (N) la seconda sommatoria vale

$$\sum_{m=1}^{n} A_{n,m}(x) \left[F\left(\frac{m}{n}, \frac{m'}{n}\right) - F\left(\frac{m-1}{n}, \frac{m'}{n}\right)\right]$$

e quindi

$$C_n f(x,y) = \sum_{m=1}^{n} A_{n,m}(x) \left[\sum_{m'=0}^{n} T'_{n,m'}(y)\, F\left(\frac{m}{n}, \frac{m'}{n}\right) - \sum_{m'=0}^{n} T'_{n,m'}(y)\, F\left(\frac{m-1}{n}, \frac{m'}{n}\right)\right]$$

da cui, applicando ancora la (2) di (N):

$$C_n f(x,y) = \sum_{m=1}^{n} A_{n,m}(x) \left\{ \sum_{m'=1}^{n} A_{n,m'}(y) \left[F\left(\frac{m}{n}, \frac{m'}{n}\right) - F\left(\frac{m}{n}, \frac{m'-1}{n}\right)\right] - \right. \tag{2}$$

$$\left. - \sum_{m'=1}^{n} A_{n,m'}(y) \left[F\left(\frac{m-1}{n}, \frac{m'}{n}\right) - F\left(\frac{m-1}{n}, \frac{m'-1}{n}\right)\right] \right\} =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \sum_{m'=1}^{n} A_{n,m}(x)\, A_{n,m'}(y) \int_{Q(m,m')} f(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta$$

avendo indicato con $Q(m,m')$ il quadrato definito da

$$\frac{m-1}{n} \leq \xi \leq \frac{m}{n} \quad , \quad \frac{m'-1}{n} \leq \eta \leq \frac{m'}{n} .$$

3. In base alla (2) il lemma dimostrato nel n. 3 di (N) si estende subito alle funzioni di due variabili; si ha cioè il

LEMMA 1°. – *L'integrale esteso a* Q *del modulo della funzione approssimante* $C_n f(x,y)$ *non supera l'integrale esteso a* Q *del modulo della funzione* $f(x,y)$.

Dimostriamo invece il

LEMMA 2°. – *L'integrale esteso a* Q *della p–esima potenza del modulo della funzione* $f(x,y)$ *non è minore dell'integrale esteso a* Q *della p–esima potenza del modulo della funzione approssimante* $C_n f(x,y)$.

Infatti, se nella diseguaglianza di Hölder–Riesz:

$$\left|\int_R f_1 f_2 \, d\sigma\right| \leq \left[\int_R |f_1|^p \, d\sigma\right]^{1/p} \left[\int_R |f_2|^{p/p-1} \, d\sigma\right]^{p-1/p}$$

si pone $f_1 = f(\xi,\eta)$, $f_2 = 1$, $R = Q(m,m')$, si ha:

$$\int_{Q(m,m')} |f(\xi,\eta)| \, d\xi \, d\eta \leq n^{-2(p-1/p)} \left[\int_{Q(m,m')} |f(\xi,\eta)|^p \, d\xi \, d\eta\right]^{1/p}$$

e quindi, per la (2),

$$(3) \qquad C_n |f(x,y)|^p = \sum_{m=1}^{n} \sum_{m'=1}^{n} A_{n,m}(x) A_{n,m'}(y) \int_{Q(m,m')} |f(\xi,\eta)|^p \, d\xi \, d\eta \geq$$

$$\geq n^{2(p-1)} \sum_{m=1}^{n} \sum_{m'=1}^{n} A_{n,m}(x) A_{n,m'}(y) \left[\int_{Q(m,m')} |f(\xi,\eta)| \, d\xi \, d\eta\right]^p.$$

Si ha invece:

$$|C_n f(x,y)| \leq \sum_{m=1}^{n} \sum_{m'=1}^{n} A_{n,m}(x) A_{n,m'}(y) \int_{Q(m,m')} |f(\xi,\eta)| \, d\xi \, d\eta$$

e di qui, applicando la diseguaglianza di Schwarz generalizzata (a, b positivi)

$$\left[\sum_{m=1}^{n} \sum_{m'=1}^{n} a_{m,m'} b_{m,m'}\right]^p \leq \left[\sum_{m=1}^{n} \sum_{m'=1}^{n} a_{m,m'}^p\right] \left[\sum_{m=1}^{n} \sum_{m'=1}^{n} b_{m,m'}^{p/p-1}\right]^{p-1}$$

con

$$a_{m,m'} = [A_{n,m}(x) A_{n,m'}(y)]^{1/p} \int_{Q(m,m')} |f(\xi,\eta)| \, d\xi \, d\eta$$

$$b_{m,m'} = [A_{n,m}(x) A_{n,m'}(y)]^{p-1/p}$$

si ha a maggior ragione:

$$|C_n f(x,y)|^p \leq \left\{\sum_{m=1}^{n} \sum_{m'=1}^{n} A_{n,m}(x) A_{n,m'}(y) \left[\int_{Q(m,m')} |f(\xi,\eta)| \, d\xi \, d\eta\right]^p\right\} \cdot$$

$$\cdot \left\{\sum_{m=1}^{n} \sum_{m'=1}^{n} A_{n,m}(x) A_{n,m'}(y)\right\}^{p-1} =$$

$$= n^{2(p-1)} \sum_{m=1}^{n} \sum_{m'=1}^{n} A_{n,m}(x) A_{n,m'}(y) \left[\int_{Q(m,m')} |f(\xi,\eta)| \, d\xi \, d\eta\right]^p$$

e quindi, per la (3):

$$|C_n f(x,y)|^p \leq C_n |f(x,y)|^p .$$

Tenendo conto del lemma 1°, si ha perciò:

$$\int_Q |C_n f(x,y)|^p \, dx\, dy \leq \int_Q C_n |f(x,y)|^p \, dx\, dy \leq \int_Q |f(x,y)|^p \, dx\, dy$$

come si voleva.

4. Il teorema si dimostra ora con lo stesso procedimento seguìto in (N), considerando tre casi.

Essendo $0 \leq a \leq 1$, $0 \leq b \leq 1$, si abbia anzitutto la funzione $f(x,y)$ che vale 1 per $a < x \leq 1$, $b < y \leq 1$, o nei rimanenti punti di Q. È chiaro che definendo le funzioni $f_1(x)$, $f_2(y)$ nel modo seguente:

$$f_1(x) = 0 \quad \text{per} \quad 0 \leq x \leq a \quad , \quad f_1(x) = 1 \quad \text{per} \quad a < x \leq 1 ;$$

$$f_2(y) = 0 \quad \text{per} \quad 0 \leq y \leq b \quad , \quad f_2(y) = 1 \quad \text{per} \quad b < y \leq 1$$

si ha

$$f(x,y) = f_1(x) f_2(y) .$$

Ne segue subito che, posto

$$\int_0^x f_1(\xi)\, d\xi = F_1(x) \quad , \quad \int_0^y f_2(\eta)\, d\eta = F_2(y)$$

si ha successivamente:

$$F(x,y) = F_1(x) F_2(y)$$

$$B_n F(x,y) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{m'=0}^{n} T_{n,m}(x)\, T_{n,m'}(y)\, F_1\left(\frac{m}{n}\right) F_2\left(\frac{m'}{n}\right) = B_n F_1(x) \cdot B_n F_2(y)$$

$$C_n f(x,y) = C_n f_1(x)\, C_n f_2(y)$$

e di qui, per il n. 4 di (N):

(4) $$0 \leq C_n f(x,y) \leq 1 \quad , \quad |C_n f(x,y) - f(x,y)| \leq 1 .$$

Risulta poi anche:

$$C_n f(x,y) - f(x,y) = C_n f_2(y)\,[C_n f_1(x) - f_1(x)] + f_1(x)\,[C_n f_2(y) - f_2(y)]$$

da cui segue, per lo stesso n. 4, e per la (4):

$$|C_n f(x,y) - f(x,y)| \leq |C_n f_1(x) - f_1(x)| + |C_n f_2(y) - f_2(y)|$$

$$\int_Q |C_n f(x,y) - f(x,y)|^p \, dx\, dy \leq \int_Q |C_n f(x,y) - f(x,y)| \, dy \leq$$

$$\leq \int_0^1 |C_n f_1(x) - f(x)| \, dx + \int_0^1 |C_n f_2(y) - f(y)| \, dy \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} + \frac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

ciò che dimostra per questo caso il teorema.

5. Prima di passare al 2° caso conviene rilevare che se

$$f(x,y) = \sum_{q=1}^{s} \beta_q f_q(x,y),$$

risulta:

$$|C_n f(x,y) - f(x,y)| \leq \sum_{q=1}^{s} |\beta_q| \cdot |C_n f_q(x,y) - f_q(x,y)|,$$

e, per una nota diseguaglianza di Minkowski, a maggior ragione:

$$\left\{\int_Q |C_n f(x,y) - f(x,y)|^p \, dx\, dy\right\}^{1/p} \leq \sum_{q=1}^{s} |\beta_q| \left[\int_Q |C_n f_q(x,y) - f_q(x,y)|^p \, dx\, dy\right]^{1/p}.$$

Ciò posto, se, essendo

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_r = 1$$

$$0 = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_s = 1$$

è $f(x,y)$ la funzione a scala che per $x_{i-1} \leq x < x_i$, $y_{j-1} \leq y < y_j$ assume il valore costante α_{ij}, poichè $f(x,y)$ si esprime linearmente mediante funzioni del tipo considerato nel n. 4, è immediato verificare che vale ancora la (1), e risulta anzi:

$$\left\{\int_Q |f(x,y) - C_n f(x,y)|^p \, dx\, dy\right\}^{1/p} \leq \frac{V}{\sqrt{n}}$$

dove V è la variazione totale doppia (secondo Vitali) della $f(x,y)$ in Q, cioè:

$$V = \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{s-1} |\alpha_{i+1,j+1} - \alpha_{i+1,j} - \alpha_{i,j+1} + \alpha_{i,j}|.$$

La dimostrazione per il caso generale è ora perfettamente analoga a quella svolta in (N): basterà scegliere la funzione φ a scala in modo che risulti:

$$\int_Q |f(x,y) - \varphi(x,y)|^p \, dx\, dy < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p,$$

tener conto della citata diseguaglianza di Minkowski, per la quale si può scrivere:

$$\left\{\int_Q |C_n f(x,y) - f(x,y)|^p \, dx\, dy\right\}^{1/p} \leq \left\{\int_Q |f(x,y) - \varphi(x,y)|^p \, dx\, dy\right\}^{1/p} +$$

$$+ \left\{\int_Q |\varphi(x,y) - C_n \varphi(x,y)|^p \, dx\, dy\right\}^{1/p} + \left\{\int_Q |C_n \varphi(x,y) - C_n f(x,y)|^p \, dx\, dy\right\}^{1/p}$$

ed applicare all'ultimo termine il lemma 2°.

Analisi matematica. — *Questioni di stabilità per equazioni non lineari alle derivate parziali di tipo parabolico.* Nota di GIOVANNI PRODI, presentata (*) dal Corrisp. B. FINZI.

In una Nota recente, R. Bellman (1) ha posto il problema della stabilità per le soluzioni dell'equazione parabolica non lineare:

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + F(x, y, z, t, u) \tag{1}$$

al tendere di t a $+\infty$.

Le condizioni al contorno sono queste: è data la u inizialmente, cioè per $t = 0$, nei punti del cubo $0 \leq x \leq \pi$; $0 \leq y \leq \pi$; $0 \leq z \leq \pi$; inoltre è $u = 0$ sulle facce di questo cubo per ogni $t > 0$. Si suppone $F(x, y, z, t, 0)$ identicamente nulla e si compie uno studio della stabilità, rispetto ai « valori iniziali », del solo integrale $u = 0$. Le condizioni cui si perviene sono molto restrittive: si suppone $F(x, y, z, t, u) = o(u)$, uniformemente rispetto a x, y, z (2), per $u \to 0$.

Scopo della presente Nota è quello di enunciare criteri di stabilità molto meno restrittivi di quello di Bellman, sia per quello che riguarda le condizioni imposte alla $F(x, y, z, t, u)$ nella (1), sia per quello che riguarda il dominio spaziale considerato. Il metodo usato è poi molto più semplice: è un metodo di confronto pressochè elementare, fondato sull'estensione di un interessante lemma dovuto ad H. Westphal (3). Si tratta di considerazioni che, in fondo, si collegano con un celebre lemma di A. Haar (4).

In questa Nota non verrà affrontata le questione della esistenza delle soluzioni della (1) (che dal Bellman viene assicurata sotto ipotesi ancor più restrittive di quelle esposte sopra): tuttavia è noto come sia importante, anche per questioni di esistenza, una limitazione *a priori* delle soluzioni: cosa che viene qui ottenuta indirettamente dallo studio della stabilità.

1. Le considerazioni che faremo saranno dapprima relative ad una più generale equazione parabolica non lineare:

$$u_t = F(x_i, t, u, p_i, p_{ik}) \qquad (i, k = 1, 2, \cdots, n) \tag{2}$$

in cui le x_i, $(i = 1, 2, \cdots, n)$ potranno variare in un campo a n dimensioni D, mentre t varierà in un intervallo $0 < t \leq T$. Le p_i indicheranno le derivate prime u_{x_i} e le p_{ik} le derivate seconde $u_{x_i x_k}$. Supporremo la $F(x_i, t, u, p_i, p_{ik})$

(*) Nella seduta del 14 aprile 1951.

(1) R. BELLMAN, *On the existence and boundedness of solutions of non linear partial differential equations of parabolic type.* « Trans. Am. Math. So. », *64*, 21-44 (1948).

(2) Nell'enunciato ((1), teorema 2 a p. 29) non è detto espressamente, ma si deduce dal ragionamento svolto, che è anche richiesta la uniformità di questa relazione rispetto a t per $0 \leq t < +\infty$.

(3) H. WESTPHAL, *Zur Abschätzung der Lösungen nichtlinearer parabolischer Differentialgleichungen.* « Math. Zeitschrift. », *51*, 690-695 (1949).

(4) A. HAAR, « Atti del Congresso internazionale di Bologna », 1928, III, pp. 5-10.

continua nei suoi argomenti, dotata di derivate parziali continue rispetto alle p_{ik} e tale che la forma quadratica:

$$\sum_{i,k} \frac{\partial F}{\partial p_{ik}} \lambda_i \lambda_k$$

risulti definita o semidefinita positiva.

Posto $\bar{D} = D + FD$, chiameremo $\bar{B}$ il dominio a $n+1$ dimensioni prodotto topologico di $\bar{D}$ per il segmento $0 \leqq t \leqq T$; indicheremo con B l'insieme dei punti interni di questo ipercilindro, con E_T la faccia « superiore » privata del bordo (cioè i punti di D per $t = T$), con E la rimanente parte della frontiera. Sarà allora: $\bar{B} = B + E_T + E$.

Lemma. *Le funzioni u e v siano continue in* $\bar{B}$ *e dotate di derivate parziali,* u_t, p_i, p_{ik} *e* v_t, q_i, q_{ik} *rispettivamente, continue in* $B + E_T$; *in* $B + E_T$ *valgano inoltre le seguenti disequazioni:*

$$(3) \qquad \begin{cases} u_t > F(x_i, t, u, p_i, p_{ik}) \\ v_t \leqq F(x_i, t, v, q_i, q_{ik}) \end{cases}$$

dove la F *ha le proprietà dette sopra; allora, se è* $v(x_i, t) < u(x_i, t)$ *in* E, *questa diseguaglianza vale in tutto* $\bar{B}$ (5).

Dimostrazione: poniamo $u - v = g$ e supponiamo che l'insieme dei punti di $\bar{B}$, per cui è $g(x_i, t) \leqq 0$ non sia vuoto. Si vede subito, per la continuità di g, che dovrà esistere un punto $(\bar{x}_i, \bar{t})$, almeno, tale che sia $g(\bar{x}_i, \bar{t}) = 0$ e $g(x_i, t) > 0$ per ogni $t < \bar{t}$ e x_i qualunque: questo punto non potrà appartenere ad E perchè su E, per ipotesi, è sempre $g(x_i, t) > 0$. Ne segue che:

a) le derivate parziali prime g_i devono essere tutte nulle in $(\bar{x}_i, \bar{t})$ (altrimenti nell'intorno di $\bar{x}_i$, sempre per $t = \bar{t}$, esisterebbero punti per cui è $g(x_i, t) < 0$ e, per la continuità di g, si potrebbe trovare un valore più piccolo di $\bar{t}$ per cui sussisterebbe la disuguaglianza $g(x_i, t) < 0$);

b) la forma quadratica $\sum_{i,k} g_{ik} \lambda_i \lambda_k$, in cui le derivate g_{ik} sono calcolate nel punto $(\bar{x}_i, \bar{t})$ deve risultare definita o semidefinita positiva per lo stesso motivo;

c) è: $g_t(\bar{x}_i, \bar{t}) \leqq 0$; infatti è

$$\lim_{h \to 0-} \frac{g(\bar{x}_i, \bar{t} + h) - g(\bar{x}_i, \bar{t})}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{g(\bar{x}_i, \bar{t} + h)}{h} \leqq 0.$$

Concludendo, si ha nel punto $(\bar{x}_i, \bar{t})$:

$$v = u \quad , \quad p_i = q_i \quad , \quad u_t \leqq v_t \quad , \quad \sum_{i,k} (p_{ik} - q_{ik}) \lambda_i \lambda_k \geqq 0.$$

Ma dall'ultima relazione, tenendo presente un noto lemma di Th. Moutard (6) si deduce che è:

$$\sum_{i,k} F_{ik} (p_{ik} - q_{ik}) \geqq 0$$

(5) Il Westphal considera equazioni in due variabili del tipo $u_t = F(x, t, u, u_x, u_{xx})$ e suppone la F non decrescente rispetto a u_{xx}; la dimostrazione del nostro lemma ricalca quella del Westphal.

(6) Th. Moutard, *Notes sur les équations aux dérivées partielles.* « Journal de l'École Polit. », *64*, 55-69 (1894).

dove

$$p_{ik} = p_{ik}(\bar{x}_i, \bar{t}), \; q_{ik} = q_{ik}(\bar{x}_i, \bar{t}),$$

mentre con F_{ik} abbiamo indicato le derivate della $F(x_i, t, p_i, \alpha_{ik})$ rispetto gli argomenti α_{ik}, calcolate per valori arbitrari di questi ultimi, per $x_i = \bar{x}_i$, $t = \bar{t}$, $u = v = u(\bar{x}_i, \bar{t})$, $p_i = q_i = p_i(\bar{x}_i, \bar{t})$; segue da questa relazione (per la formula del valor medio) che è in $(\bar{x}_i, \bar{t})$;

$$F(\bar{x}, \bar{t}, u, p_i, p_{ik}) \geqq F(\bar{x}, \bar{t}, q_i, q_{ik})$$

ma allora, per la (3), sarà:

$$u_t > F(\bar{x}_i, \bar{t}, u, p_i, p_{ik}) \geqq F(\bar{x}_i, \bar{t}, v, q_i, q_{ik}) \geqq v_t$$

il che contraddice il risultato di *c*); risulta dunque provato che l'insieme dei punti di $\bar{B}$ per cui è $g(x_i, t) \leqq 0$ è vuoto.

Si vede anche chiaramente dalla dimostrazione svolta che *il risultato del lemma continua a sussistere se si suppone soltanto l'esistenza delle derivate* u_t *e* v_t *in ogni punto di* $B + E_T$ *e la continuità di* p_i, p_{ik} *e* q_i, q_{ik} *rispetto alle sole variabili* x_i.

2. Applichiamo ora il lemma dimostrato allo studio delle soluzioni della (1). Il dominio spaziale $\bar{D}$ che noi considereremo sarà un dominio a tre dimensioni, regolare per il problema di Dirichlet. Le soluzioni che considereremo saranno quelle continue in tutto il dominio chiuso $\bar{B}$ (definito come sopra, però con $T = +\infty$) dotate di derivate $u_t, u_x, u_y, u_z, u_{xx}, u_{yy}, u_{zz}$ continue in tutto B. In conseguenza noi supporremo che i dati al contorno (su quella parte della frontiera che abbiamo chiamato sopra E) siano anch'essi continui. Precisiamo ora a quale problema di stabilità intendiamo riferirci; chiamiamo, per comodità, valori iniziali quelli assegnati su $\bar{D}$ per $t = 0$: *diremo allora che una soluzione è stabile se tutte le soluzioni corrispondenti a valori iniziali 'vicini' (restando sempre fissi i valori al contorno per* $t > 0$*) si mantengono 'vicine' ad essa in tutto l'intervallo* $0 < t < +\infty$. Per valutare la distanza tra due funzioni continue definite in $\bar{D}$ noi assumeremo la solita norma:

$$\| f_1 - f_2 \| = \max_{\text{in } \bar{D}} | f_1(x, y, z) - f_2(x, y, z) |.$$

Naturalmente le variazioni dei valori iniziali devono essere prese in modo tale da rispettare la continuità nei punti della frontiera di $\bar{D}$.

Possiamo ora enunciare il criterio di stabilità contenuto nel seguente

TEOREMA 1. – L'equazione differenziale:

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + F(x, y, z, t, u) \tag{1}$$

con una distribuzione continua di valori al contorno (su E*) ha integrali tutti stabili rispetto ad una variazione dei valori iniziali se sono soddisfatte le seguenti condizioni:*

a) $F(x, y, z, t, u)$ *è continua nei suoi argomenti per ogni* $(x, y, z, t) \subset B$ *e per* $-\infty < u < +\infty$;

b) è: $F(x, y, z, t, u_2) - F(x, y, z, t, u_1) \leqq \lambda(u_2 - u_1)$ *per ogni* $u_2 > u_1$ *e* (x, y, z, t) *qualsiasi, essendo* λ *una costante positiva sufficientemente piccola;*

precisamente, basterà prendere λ *minore del più piccolo autovalore (positivo)* μ_1 *dell'equazione:* $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \mu u = 0$ *relativo al medesimo dominio* $\bar{D}$ *con la condizione di annullamento sulla frontiera di* $\bar{D}$.

Consideriamo infatti due soluzioni u_1 e u_2. Posto $u_1 - u_2 = g$, g soddisferà alla equazione:

$$(4) \qquad g_t = g_{xx} + g_{yy} + g_{zz} + (F(x, y, z, t, u_2 + g) - F(x, y, z, t, u_2)).$$

Cerchiamo ora una funzione $h(x, y, z, t)$, positiva in $\bar{B}$, che soddisfi in B alla disequazione:

$$(5) \qquad h_t > h_{xx} + h_{yy} + h_{zz} + (F(x, y, z, t, u_2 + h) - F(x, y, z, t, u_2)).$$

Prendiamo una funzione $h = e^{-\alpha t}\bar{h}(x, y, z)$ (con $\alpha > 0$). Sostituendo si vede subito che la (5) sarà soddisfatta se sarà soddisfatta dalla funzione $\bar{h}$, sempre positiva in $\bar{D}$, la disequazione:

$$(6) \qquad \bar{h}_{xx} + \bar{h}_{yy} + \bar{h}_{zz} + (\lambda + \alpha)\bar{h} < 0$$

dove λ è la costante dell'enunciato; poniamo ora $\lambda + \alpha = \mu_1 - \varepsilon$, dove μ_1 è il più piccolo autovalore dell'equazione:

$$(7) \qquad \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} + \mu\varphi = 0$$

relativo al dominio $\bar{D}$ con la condizione di annullamento sulla frontiera di $\bar{D}$ ed ε è un numero > 0 arbitrariamente piccolo e facciamo vedere che la (6) si può soddisfare. Per questo consideriamo un secondo dominio $\bar{D}'$ contenente $\bar{D}$ nel suo interno e la corrispondente prima autofunzione dell'equazione (7), sempre relativa alla condizione di annullamento sulla frontiera.

Questa non si annullerà in alcun punto interno di $\bar{D}'$ e quindi in alcun punto di $\bar{D}$ [7] e il relativo autovalore sarà più piccolo del corrispondente autovalore di $\bar{D}$ [8].

D'altra parte, gli autovalori dipendono con continuità dalla frontiera dei domini perciò si potrà trovare un dominio $\bar{D}'$, contenente ancora $\bar{D}$ nel suo interno, tale che per il primo autovalore μ_1' valga la disuguaglianza: $\mu_1' > \mu_1 - \varepsilon$. (Nei casi più comuni questo può semplificarsi molto, potendosi passare da $\bar{D}$ a $\bar{D}'$ con una omotetia opportuna).

L'autofunzione $\bar{h}(x, y, z)$ corrispondente (presa col segno positivo) soddisferà alla (6); infatti è in D:

$$\bar{h}_{xx} + \bar{h}_{yy} + \bar{h}_{zz} + (\mu_1 - \varepsilon)\bar{h} < \bar{h}_{xx} + \bar{h}_{yy} + \bar{h}_{zz} + \mu_1'\bar{h} = 0.$$

La (5) sarà dunque verificata dalla $e^{-\alpha t}\cdot\bar{h}(x, y, z)$, dove è $\alpha = \mu_1 - \lambda - \varepsilon$ e perciò α può assumere valori positivi, purchè minori di $\mu_1 - \lambda$. Dunque, per il lemma dimostrato, sarà sempre:

$$h = e^{-\alpha t}\bar{h}(x, y, z) > g = u_1 - u_2$$

(7) Courant e Hilbert, « Methoden der Mathematischen Physik », I Bd., 363–367.
(8) Courant e Hilbert, op. cit., I Bd., 329–334.

purchè i valori iniziali di g soddisfino alla condizione:

$$|g| < \bar{h}(x, y, z)$$

(ricordiamo che, per ipotesi, è sempre $g = 0$ sulla frontiera di D per $t > 0$). Supponiamo ora, in più, che per i valori iniziali valga la relazione:

$$|u_1 - u_2| < \bar{h}(x, y, z).$$

Allora è, come abbiamo visto, $u_1 - u_2 < e^{-\alpha t} \cdot \bar{h}(x, y, z)$ ma, ripetendo il ragionamento precedente con $g = u_2 - u_1$, si ha:

$$e^{-\alpha t} \bar{h}(x, y, z) > u_2 - u_1$$

da cui:

$$|u_1 - u_2| < e^{-\alpha t} \bar{h}(x, y, z) \qquad (\text{con } 0 < \alpha < \mu_1 - \lambda).$$

In tal modo risulta dimostrata la *stabilità degli integrali rispetto a variazioni arbitrarie dei dati iniziali*, nel senso che *la distanza tra due integrali qualsiasi, con gli stessi valori al contorno, tende a zero al tendere di t a* $+\infty$.

Inoltre risulta chiaro che, *se la differenza* $u_1 - u_2$ *fra due integrali è maggiorata sul contorno da una relazione del tipo*:

$$|u_1 - u_2| < M e^{-\alpha t} \qquad (0 < \alpha < \mu_1 - \lambda, \text{ M cost.})$$

un'analoga maggiorazione vale anche all'interno.

Osserviamo poi che la condizione *b*) dell'enunciato si traduce in una limitazione all'accrescimento della F rispetto alla variabile u: *essa risulta, in particolare, soddisfatta da una qualsiasi funzione non crescente rispetto ad u.*

3. È interessante notare che, *nell'enunciato del Teorema 1 la costante* μ_1 (*minimo autovalore*) *non può essere sostituita da una maggiore.* Si vede infatti facilmente che l'equazione:

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \lambda u$$

con $\lambda > \mu_1$ e con la condizione $u = 0$ sulla frontiera di $\bar{D}$ per $t \geq 0$, ammette integrali non limitati (9). Basta per questo fare la solita posizione $u = \bar{u} e^{\alpha t}$ e si trova che per $\bar{u}$ si può prendere la prima autofunzione dell'equazione $\bar{u}_{xx} + \bar{u}_{yy} + \bar{u}_{zz} + \mu \bar{u} = 0$, mentre $\alpha = \lambda - \mu_1$. Trattandosi di una equazione lineare omogenea, la presenza di un integrale non limitato trae la mancanza di stabilità.

Le ipotesi del Teorema 1 non bastano ad assicurare che gli integrali della (1) siano anche limitati per $0 \leq t \leq +\infty$, tuttavia il ragionamento fatto serve a provare che, ove esista un integrale limitato, tutti quelli che, differiscono da questo solo per i valori iniziali sono pure limitati. Un criterio sufficiente ad assicurare che tutti gli integrali della (1) si mantengano limitati è dato dal seguente:

(9) Equazioni di questo tipo sono state ampiamente studiate da C. MIRANDA in *Analisi esistenziale per i problemi relativi alle equazioni dei fenomeni di propagazione.* «Memorie Acc. d'Italia», 1936.

Teorema 2. – *Se, ferme restando le ipotesi a) e b) del Teorema 1, si suppone in più che:*

c) la funzione che assegna i valori al contorno sia limitata per $t \to +\infty$;

d) esista un numero k *tale che la funzione* $F(x, y, z, t, k)$ *si mantenga limitata per* $0 \leqq t < +\infty$ *(*(x, y, z, t) *qualsiasi in* B*) allora la* (1) *ha tutti i suoi integrali limitati.*

Infatti, accanto alla u, che soddisfa alla (1), cerchiamo una funzione $h(x, y, z, t) \geqq k$ che in B soddisfi alla disequazione:

$$h_t > h_{xx} + h_{yy} + h_{zz} + F(x, y, z, t, h). \tag{8}$$

Cerchiamo di soddisfare alla (8) con una funzione indipendente da t e positiva in $\bar{D}$. Dovrà essere:

$$0 > \frac{h_{xx} + h_{yy} + h_{zz}}{h} + \frac{F(x, y, z, t, k) + (F(x, y, z, t, h) - F(x, y, z, t, k))}{h}$$

che è certamente soddisfatta se è soddisfatta la seguente:

$$0 > \frac{h_{xx} + h_{yy} + h_{zz}}{h} + \frac{M}{h} + \frac{h - k}{h}\lambda$$

dove λ ha lo stesso significato che nel Teorema 1 ed M è l'estremo superiore dei valori di $F(x, y, z, t, k)$; questa si può scrivere:

$$0 > \left\{ \frac{h_{xx} + h_{yy} + h_{zz}}{h} + \lambda \right\} + \frac{M - k\lambda}{h}. \tag{9}$$

Ora, nel modo visto nella dimostrazione del Teorema 1, si può trovare una funzione positiva in $\bar{D}$ per cui l'espressione:

$$\frac{h_{xx} + h_{yy} + h_{zz}}{h} + \lambda$$

sia una costante negativa in $\bar{D}$. Questa funzione si può ritener data a meno di una costante moltiplicativa: fissando opportunamente detta costante si può ottenere:

che la (9) sia soddisfatta

che il minimo della h in $\bar{D}$ superi k e superi l'estremo superiore dei valori assegnati sul contorno per la u;

Dal Lemma segue che la u è limitata superiormente.

Rifacendo lo stesso ragionamento, dopo aver posto $u = -u^*$, per l'equazione:

$$u_t^* = u_{xx}^* + u_{yy}^* + u_{zz}^* - F(x, y, z, t, -u^*)$$

si completa la dimostrazione.

Notiamo poi che sia nel Teorema 1 che nel Teorema 2 si suppone la F definita (e soddisfacente alle condizioni *a*), *b*), *c*), *d*)), per $-\infty < u < +\infty$. *Sarà invece facile accertare come in casi particolari basti supporre la* F *definita (con le suddette proprietà) in intervalli parziali per la* u*, per assicurare la stabilità e la limitatezza di classi di integrali.*

Nel caso che la F si supponga *soltanto continua e limitata in* B*, se i valori al contorno sono espressi da funzioni limitate, si può assicurare la limitatezza delle soluzioni della* (1)*, ma non la stabilità, come si potrebbe vedere con esempi.*

Polinomi ortogonali. — *Su alcune disuguaglianze riguardanti i polinomi ultrasferici.* Nota di LUIGI MERLI, presentata (*) dal Corrisp. G. SANSONE.

1. I polinomi ultrasferici $P_n^\lambda x$ sono definiti dalla formula ricorrente (1),

$$(1) \qquad (n+2\lambda-1)\,P_{n-1}^\lambda(x) - 2(n+\lambda)\,x\,P_n^\lambda(x) + (n+1)\,P_{n+1}^\lambda(x) = 0,$$

con $P_0^\lambda(x) = 1$, $P_1^\lambda(x) = 2\lambda x$; sono legati dalle relazioni,

$$(2) \qquad (1-x^2)\frac{d}{dx}\{P_n^\lambda(x)\} = [2(n+\lambda)]^{-1}\{(n+2\lambda-1)(n+2\lambda)\,P_{n-1}^\lambda(x) -$$

$$- n(n+1)\,P_{n+1}^\lambda(x)\} = (n+2\lambda-1)\,P_{n-1}^\lambda(x) - nx\,P_n^\lambda(x),$$

ed è

$$(3) \qquad P_n^\lambda(1) = \binom{n+2\lambda-1}{n}, \qquad (4) \qquad P_n^\lambda(-x) = (-1)^n P_n^\lambda(x).$$

Per $\lambda = 1/2$ si hanno i polinomi $P_n(x)$ di Legendre.

Recentemente alcuni Autori si sono interessati ad una disuguaglianza di P. Turán, sui polinomi $P_n(x)$,

$$(5) \qquad \Delta_n(x) = [P_n(x)]^2 - P_{n-1}(x)\,P_{n+1}(x) \geq 0,\ n \geq 1,\ -1 \leq x \leq 1,$$

e G. Szegö (2) ne ha dato quattro eleganti dimostrazioni.

G. Sansone (3), trovando l'equazione differenziale cui soddisfa $\Delta_n(x)$, e cioè

$$(6) \qquad (1-x^2)\,\Delta_n'(x) + x\Delta_n(x) + P_n(x)\int_x^1 P_n(x)\,dx = 0,$$

ha stabilito la limitazione

$$(7) \qquad \frac{1-P_n^2(x)}{2n(n+1)} < \Delta_n(x) < \Delta_n(0) + \frac{P_n^2(0)-P_n^2(x)}{2n(n+1)},\ (0 < |x| < 1,\ n \geq 1).$$

Inoltre egli ha provato che la (6) permette di stabilire che è $\Delta_n(x) < 0$, per $|x| \geq 1$ (4).

(*) Nella seduta del 14 aprile 1951.

(1) Cfr. G. SZEGÖ, *Orthogonal polynomials.* « Amer. Math. Soc. Colloquium Publications », vol. 23, pp. 80 e sg. (1939).

(2) G. SZEGÖ, *On an inequality of P. Turán concerning Legendre polynomials.* « Bull. of the Am. Math. Soc. », *54*, pp. 401–405 (1948).

(3) G. SANSONE, *Su di una disuguaglianza di P. Turán relativa ai polinomi di Legendre.* « Boll. Un. Mat. It. » (3), 4, pp. 221–223 (1949).

(4) G. SANSONE, *Su una disuguaglianza relativa ai polinomi di Legendre.* « Boll. Un. Mat. It. » (3), 4, pp. 339–341 (1949).

Una limitazione simile alla (7) è stata data anche da O. Szasz [5], il quale ha studiato più in generale la disuguaglianza relativa ai polinomi ultrasferici $P_n^\lambda(x)$,

$$(8) \qquad \Delta_n^\lambda(x) = \left[\frac{P_n^\lambda(x)}{P_n^\lambda(1)}\right]^2 - \frac{P_{n-1}^\lambda(x)\,P_{n+1}^\lambda(x)}{P_{n-1}^\lambda(1)\,P_{n+1}^\lambda(1)} \geqq 0\,, \quad -1 \leqq x \leqq 1\,, \lambda > 0\,,$$

provando che per $0 < \lambda < 1$, $-1 \leqq x \leqq 1$, vale la limitazione

$$(9) \qquad \frac{\lambda[1-F_n^2(x)]}{(n+\lambda-1)(n+2\lambda)} \leqq \Delta_n^\lambda(x) < \frac{2\lambda\Gamma(2\lambda)\,\Gamma(n)}{(\lambda+1)\,\Gamma(n+2\lambda)}\,, \text{ con } F_n(x) = \frac{P_n^\lambda(x)}{P_n^\lambda(1)}\,,$$

la quale, per $\lambda = 1/2$, dà luogo ad una disuguaglianza che a sinistra risulta migliore della (7), mentre a destra, in qualche caso, la (7) è migliore della (9). Per $\lambda > 1$, O. Szasz dimostra inoltre che vale la limitazione

$$(10) \qquad 0 \leqq \Delta_n^\lambda(x) \leqq \frac{\lambda[1-F_n^2(x)]}{(n+\lambda-1)(n+2\lambda)}\,.$$

Scopo di questa Nota è di provare come il metodo di G. Sansone, che fa uso dell'equazione differenziale di $\Delta_n(x)$, sia estendibile al caso più generale di $\Delta_n^\lambda(x)$. Infatti, costruita l'equazione differenziale per i $\Delta_n^\lambda(x)$, analoga alla (6), proveremo che sussistono le disuguaglianze

$$(11) \qquad \frac{\lambda[1-F_n^2(x)]}{n(n+2\lambda)} \leqq \Delta_n^\lambda(x) \leqq \Delta_n^\lambda(0) + \frac{2\lambda}{n(n+2\lambda)}[F_n^2(0) - F_n^2(x)]\,,$$

$$\text{per} \quad 0 < \lambda < 1\,, \quad -1 \leqq x \leqq 1\,,$$

e

$$(12) \qquad \max\left\{0\,,\ \Delta_n^\lambda(0) + \frac{2\lambda[F_n^2(0)-F_n^2(x)]}{n(n+2\lambda)}\right\} \leqq \Delta_n^\lambda(x) \leqq \frac{\lambda[1-F_n^2(x)]}{n(n+2\lambda)}\,,$$

$$\text{per} \quad \lambda > 1\,, \quad -1 \leqq x \leqq 1\,.$$

Le (11) e (12) sono analoghe alle (9) e (10), ma da esse distinte e, in qualche caso, migliori.

Il metodo usato permette inoltre di provare che, per $\lambda > 0$, $|x| > 1$, si ha

$$(13) \qquad \Delta_n^\lambda(x) < 0\,.$$

2. Proveremo, in primo luogo, che l'equazione differenziale, cui soddisfanno le $\Delta_n^\lambda(x)$, è la seguente:

$$(14) \qquad (1-x^2)\,\Delta_n^{\prime\lambda}(x) + 2(1-\lambda)\,x\,\Delta_n^\lambda(x) + \frac{2\lambda(1-x^2)\,P_n^\lambda(x)\,P_n^{\prime\lambda}(x)}{n(n+1)\,P_n^\lambda(1)\,P_{n+1}^\lambda(1)} = 0\ [6],$$

(5) O. Szasz, *Inequalities concerning ultraspherical polynomials and Bessel functions.* « Proceed. of the Am. Math. Soc. », 1 (2), pp. 256–267 (1950).

(6) Per $\lambda = 1$, si ha $\Delta_n^1(x) = \frac{1}{n(n+2)}[1-F_n^2(x)]$, ed in tal caso è $F_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(n+1)\theta}{(n+1)\operatorname{sen}\theta}$ $x = \cos\theta$. [Cfr. O. Szasz, nota (5), p. 263].

Infatti, tenuto conto delle (1), (2), (3) e (8), si ha:

$$(1-x^2)\,\Delta_n'^{\lambda}(x)+2(1-\lambda)\,x\,\Delta_n^{\lambda}(x)=$$

$$=(1-x^2)\left[\frac{2\,P_n^{\lambda}(x)\,P_n'^{\lambda}(x)}{P_n^{2\lambda}(1)}-\frac{P_{n-1}^{\lambda}(x)\,P_{n+1}'^{\lambda}(x)}{P_{n-1}^{\lambda}(1)\,P_{n+1}^{\lambda}(1)}-\frac{P_{n+1}^{\lambda}(x)\,P_{n-1}'^{\lambda}(x)}{P_{n+1}^{\lambda}(1)\,P_{n-1}^{\lambda}(1)}\right]+$$

$$+2(1-\lambda)\,x\left[\frac{P_n^{2\lambda}(x)}{P_n^{2\lambda}(1)}-\frac{P_{n-1}^{\lambda}(x)\,P_{n+1}^{\lambda}(x)}{P_{n-1}^{\lambda}(1)\,P_{n+1}^{\lambda}(1)}\right]=\frac{2(n+2\lambda-1)\,P_n^{\lambda}(x)\,P_{n-1}^{\lambda}(x)}{P_n^{2\lambda}(1)}-\frac{2nx\,P_n^{2\lambda}(x)}{P_n^{2\lambda}(1)}-$$

$$-\frac{(n+2\lambda)\,P_n^{\lambda}(x)\,P_{n-1}^{\lambda}(x)}{P_{n-1}^{\lambda}(1)\,P_{n+1}^{\lambda}(1)}+\frac{(n+1)\,x\,P_{n+1}^{\lambda}(x)\,P_{n-1}^{\lambda}(x)}{P_{n-1}^{\lambda}(1)\,P_{n+1}^{\lambda}(1)}-\frac{(n+2\lambda-2)\,P_{n-2}^{\lambda}(x)\,P_{n+1}^{\lambda}(x)}{P_{n-1}^{\lambda}(1)\,P_{n+1}^{\lambda}(1)}+$$

$$+\frac{(n-1)\,x\,P_{n-1}^{\lambda}(x)\,P_{n+1}^{\lambda}(x)}{P_{n-1}^{\lambda}(1)\,P_{n+1}^{\lambda}(1)}+2(1-\lambda)\,x\,\frac{P_{n-1}^{2\lambda}(x)}{P_n^{2\lambda}(1)}-2(1-\lambda)\,x\,\frac{P_{n-1}^{\lambda}(x)\,P_{n+1}^{\lambda}(x)}{P_{n-1}^{\lambda}(1)\,P_{n+1}^{\lambda}(1)}=$$

$$=P_n^{\lambda}(x)\left[\frac{2(n+2\lambda-1)\,P_{n-1}^{\lambda}(x)}{P_n^{2\lambda}(1)}-\frac{2nx\,P_n^{\lambda}(x)}{P_n^{2\lambda}(1)}-\frac{(n+2\lambda)\,P_{n-1}^{\lambda}(x)}{P_{n-1}^{\lambda}(1)\,P_{n+1}^{\lambda}(1)}+\frac{n\,P_{n+1}^{\lambda}(x)}{P_{n-1}^{\lambda}(1)\,P_{n+1}^{\lambda}(1)}+\right.$$

$$\left.+2(1-\lambda)\,x\,\frac{P_n^{\lambda}(x)}{P_n^{2\lambda}(1)}\right]=-\frac{\lambda\,P_n^{\lambda}(x)}{(n+\lambda)\,P_n^{\lambda}(1)}\left[\frac{P_{n-1}^{\lambda}(x)}{P_{n-1}^{\lambda}(1)}-\frac{P_{n+1}^{\lambda}(x)}{P_{n+1}^{\lambda}(1)}\right]=$$

$$=-\frac{\lambda\,P_n^{\lambda}(x)}{(n+\lambda)\,P_n^{\lambda}(1)}\cdot\frac{2(n+\lambda)(1-x^2)\,P_n'^{\lambda}(x)}{n(n+1)\,P_{n+1}^{\lambda}(1)}=-\frac{2\lambda(1-x^2)\,P_n^{\lambda}(x)\,P_n'^{\lambda}(x)}{n(n+1)\,P_n^{\lambda}(1)\,P_{n+1}^{\lambda}(1)},$$

da cui la (14).

3. Proviamo ora, facendo uso della (14), le (11) e (12).

Ci limiteremo, per la parità di $\Delta_n^{\lambda}(x)$, tenuto conto della (4), ai valori di x in $(0,1)$, $0\leq x\leq 1$, considerando separatamente i due casi *i)* $0<\lambda<1$; *ii)* $\lambda>1$.

i) Sia $0<\lambda<1$.

È $\Delta_n^{\lambda}(1)=0$ e $\Delta_n'^{\lambda}(1)=-2/(2\lambda+1)$, perciò, per h positivo e sufficientemente piccolo, quando $1-h\leq x<1$, sarà $\Delta_n^{\lambda}(x)>0$.

Proviamo allora che è $\Delta_n^{\lambda}(x)>0$ per $0\leq x<1$. Infatti, dalla (14), integrando tra x ed 1, si ha:

$$(15)\qquad \Delta_n^{\lambda}(x)-2(1-\lambda)\int_x^1\frac{x}{1-x^2}\,\Delta_n^{\lambda}(x)\,dx-\frac{\lambda}{n(n+2\lambda)}\left[1-F_n^2(x)\right]=0,$$

e se α fosse il primo zero a sinistra di 1, in $(0,1)$, di $\Delta_n^{\lambda}(x)$, si avrebbe $\Delta_n^{\lambda}(x)>0$ per $\alpha<x<1$ e quindi

$$2(1-\lambda)\int_{\alpha}^1\frac{x}{1-x^2}\,\Delta_n^{\lambda}(x)\,dx+\frac{\lambda}{n(n+2\lambda)}\left[1-F_n^2(x)\right]=0,$$

che è assurda per $0<\lambda<1$, tenuto conto che $F_n^2(x)\leq 1$, per $0\leq x\leq 1$ (7).

(7) Cfr. O. SZASZ, loc. cit, in (5), p. 264.

Dalla (14), integrando tra 0 ed x, si ha anche

$$(16)\quad \Delta_n^\lambda(x) + 2(1-\lambda)\int_0^x \frac{x}{1-x^2}\Delta_n^\lambda(x)\,dx = \Delta_n^\lambda(0) + \frac{\lambda}{n(n+2\lambda)}[F_n^2(0) - F_n^2(x)].$$

Allora, dalle (15) e (16), segue subito:

$$\frac{\lambda}{n(n+2\lambda)}[1 - F_n^2(x)] \leq \Delta_n^\lambda(x) \leq \Delta_n^\lambda(0) + \frac{\lambda}{n(n+2\lambda)}[F_n^2(0) - F_n^2(x)],$$

che è appunto la (11).

ii) Sia ora $\lambda > 1$.

Dalla (14), che è una equazione differenziale lineare in $\Delta_n^\lambda(x)$, si ha

$$\Delta_n^\lambda(x) = (1-x^2)^{1-\lambda}\left[\frac{\lambda}{n(n+2\lambda)P_n^{2\lambda}(1)}\int_x^1 \frac{P_n^\lambda(t)P_n'^\lambda(t)}{(1-t^2)^{1-\lambda}}\,dt + c\right];$$

ma $\lim_{x\to 1-0} \dfrac{\Delta_n^\lambda(x)}{(1-x^2)^{1-\lambda}} = 0$, quindi , $(\lambda > 0)$,

$$\Delta_n^\lambda(x) = \frac{2\lambda}{n(n+2\lambda)P_n^{2\lambda}(1)}\int_x^1 (1-t^2)^{\lambda-1}P_n^\lambda(t)P_n'^\lambda(t)\,dt.$$

Sia ora β uno zero di $P_n^\lambda(x)$ in $(-1, 1)$.

Sarà $$\int_x^1 (1-t^2)^{\lambda-1}P_n'^\lambda(t)P_n^\lambda(t)\,dt \geq 0.$$

Infatti, applicando il teorema della media di O. Bonnet [8], tenuto conto che la funzione $(1-t^2)^{\lambda-1}$ decresce per $0 \leq x \leq 1$, si ha

$$\int_\beta^1 (1-t^2)^{\lambda-1}P_n^\lambda(t)P_n'^\lambda(t)\,dt = \int_\beta^\xi P_n^\lambda(t)P_n'^\lambda(t)\,dt = \frac{1}{2}P_n^2(\xi) \geq 0,$$

e da essa segue $\Delta_n^\lambda(x) \geq 0$, per $-1 \leq x \leq 1$.

Dalle (15) e (16), tenuto conto che è ora $\lambda > 1$, si ha anche

$$\Delta_n^\lambda(0) + \frac{\lambda}{n(n+2\lambda)}[F_n^2(0) - F_n^2(x)] \leq \Delta_n^\lambda(x) \leq \frac{\lambda}{n(n+2\lambda)}[1 - F_n^2(x)],$$

e ne segue la (12).

4. Vogliamo infine provare la (13).

Sempre dalla (14), integrando tra 1 ed x, si ha

$$\Delta_n^\lambda(x) = -\frac{2\lambda(x^2-1)^{1-\lambda}}{n(n+2\lambda)P_n^{2\lambda}(1)}\int_1^x \frac{P_n^\lambda(t)P_n'^\lambda(t)}{(t^2-1)^{1-\lambda}}\,dt, \qquad (\lambda > 0).$$

Ma gli zeri di $P_n^\lambda(t)$ e di $P_n'^\lambda(t)$ cadono tutti in $(-1, 1)$, quindi, per $t > 1$, $P_n^\lambda(t)P_n'^\lambda(t) > 0$. Ne segue allora $\Delta_n^\lambda(x) < 0$, per $|x| > 1$ e $\lambda > 0$ e così la (13) risulta provata.

(8) G. Vitali e G. Sansone, *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*: I, G. Vitali (Bologna, 1951), p. 128.

Analisi funzionale. — *Le variazioni e i funzionali derivati degli autovalori e delle autofunzioni di un nucleo dato.* Nota di LUIGI FANTAPPIÈ, presentata (*) dal Socio U. AMALDI.

1. Voglio mostrare con questo lavoro come la teoria dei funzionali permetta di calcolare facilmente le successive variazioni, e quindi i successivi funzionali derivati, di quei particolari funzionali molto importanti che sono gli *autovalori* e le *autofunzioni* di un nucleo dato $k(x, t)$, in quanto appunto dipendenti da questo nucleo. Tale calcolo può avere interesse anche per la fisica teorica, poichè la determinazione dei livelli energetici degli atomi più complicati dell'atomo di idrogeno si riduce proprio al calcolo delle variazioni degli autovalori di un'equazione funzionale nota, in corrispondenza a piccole « variazioni » o « perturbazioni » dell'equazione stessa.

Nel caso degli autovalori semplici, le espressioni dei funzionali derivati degli autovalori e delle autofunzioni furono da me esposte senza dimostrazione in una comunicazione al III Congresso dell'Unione Matematica Italiana, mentre in una Nota successiva (1), a cui rinvio anche per le definizioni e notazioni, ho dato le espressioni esplicite dei funzionali derivati e delle variazioni del funzionale *determinante*, del *nucleo risolvente* e del *nucleo associato* di un nucleo dato. Completando le dimostrazioni dei risultati enunciati in C. P., daremo ora anche le espressioni generali dei funzionali derivati di qualunque ordine, mentre in un prossimo lavoro studieremo il caso degli autovalori multipli.

2. Sia dunque λ_r un autovalore semplice dell'equazione funzionale lineare (ved. F. D. (1))

$$(1) \qquad y(x) = f(x) + \lambda k(x, \overset{\circ}{t})\, y(\overset{\circ}{t}) = f(x) + \frac{\lambda}{2\pi i}\int_C k\left(x, \frac{1}{t}\right)\cdot\frac{1}{t}\, y(t)\, dt$$

e cioè una radice semplice della trascendente intera « funzionale determinante » (ved. F. D. (7) e E. F. (21), (22))

$$(2) \qquad D(\lambda) = D[k(x, t); \lambda] = 1 - \lambda I_1 + \frac{\lambda^2}{2!} I_2 \cdots + \frac{(-\lambda)^n}{n!} I_n + \cdots$$

Corrispondentemente è risolubile l'equazione omogenea

$$(3) \qquad \varphi_r(x) = \lambda_r k(x, \overset{\circ}{t})\, \varphi_r(\overset{\circ}{t})$$

(*) Nella seduta del 12 maggio 1951.

(1) Cfr. i miei seguenti lavori, che saranno indicati con le lettere premesse ai rispettivi titoli:

E. F. – *Le equazioni funzionali lineari nel campo complesso.* « Rend. Lincei », ser. 6ª, vol. 9 (1929).

F. A. – *I funzionali analitici.* « Mem. Lincei », ser. 6ª, vol. 3°, f. 11 (1930).

D. V. – *I funzionali delle funzioni di due variabili.* « Mem. Acc. Italia », vol. 2° (1931).

T. F. – *Teoria de los funcionales analiticos.* « Sem. Mat. di Barcellona » (1943).

C. P. – *I funzionali derivati del nucleo risolvente, ecc.* – Com. III Congr. U. M. I. (1948).

F. D. – *I funzionali derivati del determinante e del nucleo risolvente di un nucleo dato.* « Rend. Lincei », ser. 8ª, vol. 5° (1948).

e l'equazione omogenea « associata »

$$\psi_r(t) = \lambda_r k(\mathring{s}, t)\,\psi_r(\mathring{s}) \tag{4}$$

chiamandosi « autofunzioni » del nucleo k, corrispondenti all'autovalore λ_r, le soluzioni $\varphi_r(s)$ e $\psi_r(t)$ di (3) e (4) rispettivamente, date a meno di costanti moltiplicative, che supporremo però normalizzate dalla condizione

$$\varphi_r(\mathring{t})\,\psi_r(\mathring{t}) = 1. \tag{5}$$

In corrispondenza al nucleo « variato » $k(s,t) + \varepsilon h(s,t)$, l'autovalore considerato risulterà una funzione *analitica* di ε, $\lambda = \lambda(\varepsilon)$ (essendo D un funzionale analitico), con $\lambda(0) = \lambda_r$, definita implicitamente dall'equazione

$$D(\varepsilon, \lambda) = D[k(s,t) + \varepsilon h(s,t); \lambda] = 0. \tag{6}$$

Per definizione, la « variazione » $\delta\lambda_r$ di λ_r, corrispondente alla « variazione » $\delta k = \varepsilon h$ del nucleo dato (infinitesima con ε), sarà allora data da

$$\delta\lambda_r = \lambda'(0)\cdot\varepsilon \tag{7}$$

e potrà quindi calcolarsi dall'espressione $\lambda'(\varepsilon)$ della derivata della funzione implicita $\lambda(\varepsilon)$, definita dalla (6), che è

$$\lambda'(\varepsilon) = -\frac{\partial D/\partial\varepsilon}{\partial D/\partial\lambda}. \tag{8}$$

Ma per le note regole di derivazione di un funzionale rispetto a un parametro (ved. D. V., n. 50 e F. A., n. 86), si ha

$$\frac{\partial D}{\partial\varepsilon} = \mathring{D}'[k(s,t) + \varepsilon h(s,t), \mathring{\alpha}, \mathring{\beta}; \lambda]\, h(\mathring{\alpha}, \mathring{\beta}) \tag{9}$$

e per $\varepsilon = 0$

$$\left(\frac{\partial D}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \mathring{D}'[k(s,t), \mathring{\alpha}, \mathring{\beta}; \lambda]\, h(\mathring{\alpha}, \mathring{\beta}). \tag{10}$$

D'altra parte, abbiamo già visto che è (F. D. (16) e (A))

$$\mathring{\mathfrak{D}}_{k(\alpha,\beta)} \log D[k(s,t); \lambda] = \frac{1}{D(\lambda)}\mathring{D}'[k(s,t), \alpha, \beta; \lambda] = -\lambda\Gamma(\lambda; \beta, \alpha) \tag{11}$$

e dunque risulta

$$\left(\frac{\partial D}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = -\lambda D(\lambda)\,\Gamma(\lambda; \mathring{\beta}, \mathring{\alpha})\, h(\mathring{\alpha}, \mathring{\beta}). \tag{12}$$

Ma, analogamente a quanto accade nella teoria delle equazioni integrali di Fredholm, il residuo del nucleo risolvente $R(\lambda; s, t)$ di $k(s,t)$ nel polo semplice $\lambda = \lambda_r$ è proprio $-\varphi_r(s)\,\psi_r(t)$, si ha cioè

$$R(\lambda; s, t) = \frac{\varphi_r(s)\,\psi_r(t)}{\lambda_r - \lambda} + R_r(\lambda; s, t) \tag{13}$$

con $R_r(\lambda; s, t)$ funzione regolare per $\lambda = \lambda_r$ e *ortogonale* a $\varphi_r(s)$ e $\psi_r(t)$, dunque

$$\begin{cases} R_r(\lambda; s, \mathring{\alpha})\,\varphi_r(\mathring{\alpha}) = 0, \\ R_r(\lambda; \mathring{\alpha}, t)\,\psi_r(\mathring{\alpha}) = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Quindi, per la (20) di F. D., si ha

$$(15)\quad \Gamma(\lambda;z,t)=\frac{1}{1-zt}+\lambda R(\lambda;z,t)=\frac{1}{1-zt}+\frac{\lambda}{\lambda_r-\lambda}\varphi_r(z)\psi_r(t)+\lambda R_r(\lambda;z,t)$$

e sostituendo nella (12),

$$(16)\quad \left(\frac{\partial D}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}=\left[\lambda^2\frac{\varphi_r(\mathring{\beta})\,\psi_r(\mathring{\alpha})}{\lambda-\lambda_r}D(\lambda)\right]_{\varepsilon=0}h(\mathring{\alpha},\mathring{\beta})=\lambda_r^2\varphi_r(\mathring{\beta})\,\psi_r(\mathring{\alpha})\,h(\mathring{\alpha},\mathring{\beta})\,D'(\lambda_r)$$

poichè $R_r(\lambda)$ è regolare in $\lambda=\lambda_r$ e per $\varepsilon\to 0$, $\lambda\to\lambda_r$, $D(\lambda)\to D(\lambda_r)=0$, e quindi tutti i termini di Γ vanno a 0, meno il 2°. Dalle (7), (8) e (16) *si ha dunque, per la variazione* $\delta\lambda_r$ *dell'autovalore* λ_r, *l'espressione*

$$(17)\quad \delta\lambda_r=-\frac{(\partial D/\partial\varepsilon)_{\varepsilon=0}}{D'(\lambda_r)}\cdot\varepsilon=-\lambda_r^2\varphi_r(\mathring{\beta})\,\psi_r(\mathring{\alpha})\,h(\mathring{\alpha},\mathring{\beta})\,\varepsilon$$

o anche

$$(18)\quad \delta\lambda_r=-\lambda_r^2\varphi_r(\mathring{\beta})\,\psi_r(\mathring{\alpha})\cdot\delta k(\mathring{\alpha},\mathring{\beta}).$$

Di qui si deduce che *il funzionale derivato simmetrico dell'autovalore* λ_r, *rispetto al nucleo* k (*variabile indipendente*) *nel punto* α,β (e cioè l'indicatrice di questo funzionale lineare $\delta\lambda_r$ di δk) *è la funzione*

$$(19)\quad \mathring{\mathfrak{D}}_{k(\alpha,\beta)}\lambda_r=-\lambda_r^2\varphi_r(\beta)\,\psi_r(\alpha)$$

o anche

$$(20)\quad \mathring{\mathfrak{D}}_{k(\alpha,\beta)}\lambda_r=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\lambda\Gamma(\lambda;\beta,\alpha)\,d\lambda=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\mathring{\mathfrak{D}}_{k(\alpha,\beta)}\log D[k(z,t);\lambda]\cdot d\lambda$$

nella forma di *residuo integrale* di $\lambda\Gamma=-\mathring{\mathfrak{D}}\log D$, nel punto $\lambda=\lambda_r$.

Di qui si ha ancora, pei funzionali derivati successivi, la formula generale

$$(21)\quad \mathring{\mathfrak{D}}^n\lambda_r=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\lambda\mathring{\mathfrak{D}}^{n-1}\Gamma(\lambda;\beta,\alpha)\,d\lambda$$

che permette di calcolare tutti questi funzionali derivati successivi come residui di prodotti di nuclei associati nei vari punti di derivazione (a causa della (B) di F. D. che dà i funzionali derivati di Γ).

3. Cerchiamo ora di calcolare anche le variazioni $\delta\varphi_r(z)$ e $\delta\psi_r(t)$ (cioè le parti infinitesime del 1° ordine, con ε, degli incrementi $\Delta\varphi_r$ e $\Delta\psi_r$) delle autofunzioni, corrispondenti alla variazione $\delta k=\varepsilon h(z,t)=\Delta k$ del nucleo. La nuova autofunzione « variata » $\varphi_r+\Delta\varphi_r$ sarà soluzione dell'equazione omogenea, analoga alla (3)

$$\varphi_r(z)+\Delta\varphi_r(z)=(\lambda_r+\Delta\lambda_r)\{k(z,\mathring{t})+\delta k(z,\mathring{t})\}(\varphi_r(\mathring{t})+\Delta\varphi_r(\mathring{t}))$$

e quindi, eguagliando i termini che contengono ε alla 1ª potenza, si ha per la variazione l'equazione

$$(22)\quad \delta\varphi_r(z)=f(z)+\lambda_r k(z,\mathring{t})\,\delta\varphi_r(\mathring{t})$$

ove si è posto

$$(23)\quad f(z)=\delta\lambda_r\cdot k(z,\mathring{t})\,\varphi_r(\mathring{t})+\lambda_r\cdot\delta k(z,\mathring{t})\,\varphi_r(\mathring{t})=\frac{\delta\lambda_r}{\lambda_r}\varphi_r(z)+\lambda_r\delta k(z,\mathring{t})\,\varphi_r(\mathring{t}).$$

Ma l'equazione (22), del tipo (1), corrisponde all'autovalore λ_r del parametro, ed è dunque possibile soltanto se il termine noto $f(z)$ soddisfa alla condizione

$$f(\overset{\circ}{z})\,\psi_r(\overset{\circ}{z}) = 0 \tag{24}$$

(che segue subito, per la (4), dalla (22), moltiplicata funzionalmente per $\psi_r(z)$), condizione che però è effettivamente verificata dalla funzione (23), e quindi le soluzioni sono date da

$$\delta\varphi_r(z) = f(z) + \lambda_r \frac{D_2(\lambda_r; z, \overset{\circ}{t}, \bar{z}, \bar{t})}{D(\lambda_r, \bar{z}, \bar{t})} f(\overset{\circ}{t}) + c\varphi_r(z) \tag{25}$$

ove f è data dalla (23), c è una costante arbitraria e D_2 è la trascendente intera in λ (minore di 2° ordine di $D(\lambda)$), il cui sviluppo è analogo a quello di $D(\lambda; z, t) = D_1$, dato dalla (22) di E. F., ma coi coefficienti provenienti dai determinanti (18) di E. F. d'ordine $n+2$, invece che d'ordine $n+1$.

Una formula perfettamente analoga alla precedente si ha per la variazione $\delta\psi_r(t)$ dell'altra autofunzione.

D'altra parte, avendo osservato che il prodotto delle due autofunzioni φ_r e ψ_r, normalizzato dalla (5), figura nell'espressione (13) del nucleo risolvente, esso potrà ottenersi, come residuo in $\lambda = \lambda_r$, anche dal nucleo associato (15), con la formula

$$\varphi_r(z)\,\psi_r(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{1}{\lambda}\,\Gamma(\lambda; z, t)\,d\lambda \tag{26}$$

e quindi si avrà, per la variazione di questo prodotto normalizzato, tenendo conto della (B') di F. D.,

$$\delta[\varphi_r(z)\,\psi_r(t)] = \delta\varphi_r(z)\cdot\psi_r(t) + \varphi_r(z)\cdot\delta\psi_r(t) = \tag{27}$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{1}{\lambda}\,\delta\Gamma(\lambda; z, t)\,d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \Gamma(\lambda; z, \overset{\circ}{\alpha})\cdot\delta k(\overset{\circ}{\alpha}, \overset{\circ}{\beta})\cdot\Gamma(\lambda; \overset{\circ}{\beta}, t)\,d\lambda$$

formula da cui si possono poi calcolare le variazioni successive, mediante la variazione del nucleo associato Γ, data dalla (B') di F. D.

Sostituendo nell'ultimo membro l'espressione (15) di Γ, si ha allora, calcolando i residui nel polo di 2° ordine $\lambda = \lambda_r$,

$$\delta\varphi_r(z)\cdot\psi_r(t) + \varphi_r(z)\cdot\delta\psi_r(t) = \lambda_r\,\psi_r(t)\cdot\varphi_r(\overset{\circ}{\beta})\,[\delta k(z, \overset{\circ}{\beta}) + \lambda_r R_r(\lambda_r, z, \overset{\circ}{\alpha})\,\delta k(\overset{\circ}{\alpha}, \overset{\circ}{\beta})] + \tag{28}$$

$$+\lambda_r\varphi_r(z)\cdot\psi_r(\overset{\circ}{\alpha})\,[\delta k(\overset{\circ}{\alpha}, t) + \lambda_r\,\delta k(\overset{\circ}{\alpha}, \overset{\circ}{\beta})\,R_r(\lambda_r; \overset{\circ}{\beta}, t)] - 2\lambda_r\varphi_r(z)\,\psi_r(t)\cdot\delta k(\overset{\circ}{\alpha}, \overset{\circ}{\beta})\,\psi_r(\overset{\circ}{\alpha})\,\varphi_r(\overset{\circ}{\beta})$$

Dalla struttura del 2° membro risulta allora che il suo 1° termine fa parte necessariamente del 1° termine $\delta\varphi_r(z)\cdot\psi_r(t)$ del 1° membro (data l'arbitrarietà di δk), presentando lo stesso coefficiente $\psi_r(t)$, e così pure il 2° termine del 2° membro fa parte del termine $\varphi_r(z)\cdot\delta\psi_r(t)$, per analoga ragione. Resta indeterminato lo spezzamento del 3° termine, che porta come coefficiente tanto $\varphi_r(z)$ che $\psi_r(t)$, ma ciò non deve meravigliare, dato che le variazioni $\delta\varphi_r$ e $\delta\psi_r$

sono determinate solo a meno di multipli di φ_r e ψ_r rispettivamente (ved. 3° termine dell'espressione (25), e analoga per ψ_r). Potremo quindi, per esempio, spezzare a metà questo 3° termine, attribuendo parti uguali a ciascuno dei due termini del 1° membro, con che *le variazioni* $\delta\varphi_r$ e $\delta\psi_r$ *risultano date allora dalle espressioni*

$$\delta\varphi_r(z)=\lambda_r\varphi_r(\mathring{\beta})\cdot\delta k(z,\mathring{\beta})-\lambda_r\varphi_r(z)\,\psi_r(\mathring{\alpha})\,\varphi_r(\mathring{\beta})\,\delta k(\mathring{\alpha},\mathring{\beta})+\lambda_r^2\varphi_r(\mathring{\beta})\,R_r(\lambda_r,z,\mathring{\alpha})\,\delta k(\mathring{\alpha},\mathring{\beta})$$

e anche

$$\delta\psi_r(t)=\lambda_r\psi_r(\mathring{\alpha})\cdot\delta k(\mathring{\alpha},t)-\lambda_r\psi_r(t)\,\psi_r(\mathring{\alpha})\,\varphi_r(\mathring{\beta})\,\delta k(\mathring{\alpha},\mathring{\beta})+\lambda_r^2\psi_r(\mathring{\alpha})\,R_r(\lambda_r,\mathring{\beta},t)\,\delta k(\mathring{\alpha},\mathring{\beta}).$$

I funzionali derivati delle autofunzioni saranno quindi dati da

$$(31)\qquad \mathring{\mathfrak{D}}_{k(\alpha,\beta)}\varphi_r(z)=\frac{\lambda_r}{1-z\alpha}\varphi_r(\beta)-\lambda_r\varphi_r(z)\,\psi_r(\alpha)\,\varphi_r(\beta)+\lambda_r^2 R_r(\lambda_r;z,\alpha)\,\varphi_r(\beta)$$

$$(32)\qquad \mathring{\mathfrak{D}}_{k(\alpha,\beta)}\psi_r(t)=\frac{\lambda_r}{1-t\beta}\psi_r(\alpha)-\lambda_r\psi_r(t)\,\psi_r(\alpha)\,\varphi_r(\beta)+\lambda_r^2 R_r(\lambda_r;\beta,t)\,\psi_r(\alpha).$$

È da osservare che, poichè l'espressione (26) ci dà il prodotto delle due autofunzioni normalizzate dalla (5), a questa seguiteranno a soddisfare anche le autofunzioni « variate », e quindi la variazione del prodotto funzionale (5) *sarà nulla*. E infatti è da osservare che anzi, a causa delle (14) e della (5) stessa, si ha dalla (29)

$$(33)\qquad \psi_r(\mathring{z})\,\delta\varphi_r(\mathring{z})=\lambda_r\varphi_r(\mathring{\beta})\,\delta k(\mathring{z},\mathring{\beta})\,\psi_r(\mathring{z})-\lambda_r\psi_r(\mathring{\alpha})\,\varphi_r(\mathring{\beta})\,\delta k(\mathring{\alpha},\mathring{\beta})=0$$

e analogamente

$$(34)\qquad \varphi_r(\mathring{t})\,\delta\psi_r(\mathring{t})=0$$

e quindi, sommando, è certamente $\delta[\varphi_r(\mathring{z})\,\psi_r(\mathring{z})]=0$.

Ma di più si può osservare che, con lo spezzamento dell'ultimo termine della (28) in parti uguali, abbiamo dunque ottenuto che le variazioni $\delta\varphi_r$ e $\delta\psi_r$ siano esse stesse *ortogonali* a ψ_r e φ_r rispettivamente, condizione questa che determina così completamente anche l'ultimo termine dell'espressione (25) e (dell'analoga per $\delta\psi_r$).

È da osservare che se il nucleo risolvente ha solo poli di 1° ordine e può rappresentarsi con la serie (uniformemente convergente in ogni dominio che non contenga gli autovalori) delle sue parti principali

$$(35)\qquad R(\lambda;z,t)=\sum_s\frac{\varphi_s(z)\,\psi_s(t)}{\lambda_s-\lambda}$$

l'espressione di $R_r(\lambda_r;z,t)$, che compare nelle (29) (30) (31) (32), è data dalla serie

$$(36)\qquad R_r(\lambda_r;z,t)=\sum_s{}'_{(r)}\frac{\varphi_s(z)\,\psi_s(t)}{\lambda_s-\lambda_r}$$

ove il sommatorio va ora esteso a tutti i valori di s *diversi da* r, ottenendosi così delle formule che ricordano quelle date da Schrödinger nella sua teoria delle perturbazioni [2], a cui probabilmente potranno ridursi come caso particolare, qualora le equazioni differenziali da lui considerate possano trasformarsi in equazioni integrali.

(2) Cfr. E. SCHRÖDINGER, *Mémoires sur la mécanique ondulatoire*. Alcan, Paris, 1933; ved. specialmente Mem. III, espressione (14) dell'autofunzione variata a p. 109.

Geometria. — *Sopra le varietà di Picard d'una superficie algebrica e sulla classificazione delle superficie irregolari.* Nota di ALDO ANDREOTTI, presentata (*) dal Socio F. SEVERI.

Uno dei problemi centrali della geometria sopra una superficie è, al momento attuale delle nostre conoscenze, quello della determinazione delle famiglie in cui si distribuiscono le superficie irregolari e della precisazione del concetto di « moduli » d'una superficie di data irregolarità. Il problema è tutt'altro che semplice; si rifletta solamente ai pochissimi esempi di superficie irregolari finora conosciute; nè è da credere che parlare di moduli per una superficie irregolare sia cosa « pressochè intuitiva » dato che gli invarianti numerici (genere aritmetico, genere geometrico, plurigeneri, ecc.) finora noti non permettono affatto (salvo pochi casi) di separare l'una dall'altra le varie famiglie irriducibili di superficie irregolari.

Il prof. Severi ha più volte attirato l'attenzione su questo soggetto e recentemente l'Accademia delle Scienze di Liegi ha indetto un concorso per un lavoro sull'argomento.

Da circa un anno mi sto occupando della questione. I risultati che ho ottenuto e che qui enuncio molto succintamente, andranno a far parte d'una Memoria la quale, insieme a un lavoro che il prof. Conforto aggiungerà al mio, sarà prossimamente pubblicata.

1. SOPRA LE VARIETÀ DI PICARD D'UNA SUPERFICIE ALGEBRICA. – Il primo passo verso un'adeguata trattazione delle superficie irregolari va alla considerazione delle due varietà di Picard che a una superficie F d'irregolarità $q > 0$ possono venire associate.

L'una è la varietà di Picard V_q costruita alla maniera di Severi come varietà abeliana relativa alla matrice dei periodi degli integrali semplici di prima specie della superficie. L'altra V'_q quella costruita alla maniera di Castelnuovo come imagine dei sistemi continui di ∞^q sistemi lineari.

Ebbene, queste due varietà possono benissimo essere distinte. La relazione che tra esse intercede è espressa dal teorema seguente.

La varietà V'_q alla Castelnuovo è la varietà che rappresenta i sistemi continui di ∞^q sistemi lineari della varietà V_q alla Severi. Condizione necessaria e sufficiente perchè queste due varietà coincidano (siano cioè birazionalmente equivalenti) è che siano equivalenti nel senso di G. Scorza le matrici:

$$\Omega \quad \text{e} \quad (\pi i E \mid \mathfrak{A}\mathfrak{D})$$

ove $\Omega = \left(\begin{array}{ccc|c} \delta_1^{-1}\pi i & & 0 & \\ & \ddots & & \mathfrak{A} \\ 0 & & \delta_p^{-1}\pi i & \end{array}\right)$ è la matrice di Riemann relativa a V_q ridotta alla forma normale di Krazer; E è la matrice unitaria; $\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} \delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_p \end{pmatrix}$. Ciò porta la moltiplicazione complessa per Ω se i δ_i non sono tutti uguali ad uno.

(*) Nella seduta del 12 maggio 1951.

La dimostrazione è essenzialmente basata sopra il teorema di Abel [1] per le superficie algebriche dovuto a Severi e sopra una formula dovuta al prof. Conforto [2], la quale appunto permette d'interpretare geometricamente la relazione che esiste tra V_q e V'_q.

Il teorema sussiste non solo per le superficie algebriche, ma per varietà M di dimensione qualsiasi quando V_q rappresenti la varietà di Picard relativa ai periodi degli integrali e V'_q quella relativa ai sistemi continui di ipersuperficie M.

Osservo inoltre che indipendentemente e contemporaneamente al risultato esposto, il prof. A. Weil [3] ha ottenuto un risultato riferentesi alle diverse varietà di Picard che, come discende dai lavori di Hodge, possono venire associate ad una varietà algebrica e dal quale la prima parte del teorema testè enunciato potrebbe dedursi agevolmente, una volta si faccia appello al fatto che la equivalenza algebrica per le ipersuperficie di una varietà algebrica M data e la equivalenza omologica con divisione dei corrispondenti cicli sulla riemanniana di M sono la stessa cosa.

Non sarebbe difficile, combinando il risultato ottenuto da A. Weil e quello ottenuto da me, dedurre una nuova dimostrazione che equivalenza algebrica ed equivalenza per omologia con divisione per le ipersuperficie di M portano allo stesso tipo di equivalenza.

2. SOPRA L'ESTENSIONE DEI TEOREMI DI INVERSIONE DI JACOBI E PICARD ALLE SUPERFICIE ALGEBRICHE. – Il secondo passo verso lo scopo che ci siamo prefissi consiste nello studio dei teoremi di inversione per gli integrali semplici di prima specie d'una superficie algebrica.

In che forma il teorema d'inversione di Jacobi si debba trasportare dalle curve alle superficie è stato indicato da Severi [4]. Il teorema di Severi si estende agevolmente ai sistemi regolari d'integrali riducibili di prima specie come quello di Jacobi nel caso delle curve è stato esteso da Picard. Eccone l'enunciato nella forma *più comprensiva:*

Data una superficie algebrica F d'irregolarità q e siano $u_1, \cdots, u_p$, integrali semplici di prima specie di F individuanti un sistema completo regolare d'integrali riducibili. Sia x un generico punto di F, la condizione perchè in un altro punto y di F valgano le congruenze

$$\begin{cases} u_i(x) \equiv u_i(y) & \text{modulo i periodi ridotti} \\ i = 1, \cdots, p \end{cases}$$

è una condizione algebrica in y sicchè:

a) o i punti y riempiono una curva C (eventualmente riducibile), allora questa varia in un fascio irrazionale $\{C\}$ di genere compreso fra p e q sul

(1) SEVERI, *Il teorema di Abel sulle superficie algebriche*, «Annali di Matematica», s. 3, t. 12, pp. 55–79, (1905).

(2) CONFORTO, *Funzioni abeliane e matrici di Riemann.* Ed. Libreria della Università di Roma, p. 232, (1942).

(3) Al quale porgo i più vivi ringraziamenti per avermi concesso di leggere l'interessantissimo manoscritto del lavoro ormai di imminente pubblicazione.

(4) SEVERI, *Un teorema d'inversione per gl'integrali semplici di prima specie appartenenti ad una superficie algebrica.* «Atti del R. Istituto Veneto», t. 72, pp. 765–772 (1913).

quale gli integrali u dànno luogo a un sistema regolare riducibile di integrali abeliani e la imagine di F descritta dal punto di « coordinate » $u_1(x), \cdots, u_p(x)$ entro la varietà di Piccard V_p relativa alla matrice dei periodi ridotti è una curva birazionalmente equivalente a $\{C\}$;

b) o i punti y sono in numero finito, allora F contiene una involuzione la quale rappresenta F sopra una superficie Φ di V_p nel modo testè indicato e d'irregolarità compresa fra p e q.

La dimostrazione di questo teorema può farsi seguendo sia la via indicata nella Nota citata di Severi e adoperando un ragionamento esposto nel lavoro di Castelnuovo sugli integrali semplici di prima specie d'una superficie algebrica, sia anche in modo assai più diretto osservando che il punto di « coordinate » $u_i(x)$ entro V_p risulta funzione ovunque meromorfa su F dal punto variabile x sicchè l'imagine Φ di F risulta una trasformata razionale di F.

Le applicazioni di questo teorema sono numerose e interessanti. Per esempio una volta si assuma provata l'esistenza di integrali semplici di prima specie, linearmente indipendenti, in numero q uguale alla metà del primo numero di Betti mediante gli integrali armonici di Hodge si ha una nuova dimostrazione trascendente luminosa e lontana da dubbi dell'esistenza su F di sistemi continui di ∞^q sistemi lineari, e quindi della completezza della serie caratteristica per sistemi aritmeticamente effettivi.

Infatti, in virtù del teorema di Abel per le superficie dimostrato da Severi (ed è questo la chiave di tutto) si prova subito che i sistemi continui segati sulla imagine Φ di F entro la varietà di Picard V_q dai sistemi continui di sistemi lineari di ipersuperficie di medesima dànno luogo non solo su Φ, ma anche su F a sistemi continui di ∞^q sistemi lineari.

Anzi di più, se ci si riferisce a sistemi regolari ∞^p d'integrali riducibili, si ha l'esistenza su F di sistemi continui abeliani di ∞^p sistemi lineari, cioè sistemi tali che la somma di due qualunque sistemi lineari del sistema continuo contiene parzialmente ogni altro sistema lineare del sistema continuo medesimo. Fatto questo che dà una interpretazione geometrica dell'esistenza di integrali riducibili come lo fanno le serie abeliane sopra una curva.

3. Ma la applicazione più interessante del teorema di inversione testè enunciato, consiste nell'uso che se ne può fare pel problema della classificazione delle superficie irregolari.

Infatti da cosa dipende la estrema difficoltà di costruire modelli di superficie irregolari? Dipende dal fatto che lo spazio proiettivo ove si cercano di realizzare, ha irregolarità superficiale nulla, sicché la generica (5) superficie di tale spazio è regolare.

Invece il teorema d'inversione di Severi ci mostra come ogni superficie irregolare non contenente un fascio di genere uguale alla irregolarità ammette una imagine semplice o multipla entro la propria varietà di Picard V alla Severi, sicchè questa varietà appare come l'ambiente naturale entro cui la superficie va considerata.

(5) Vedasi pel significato da dare qui alla parola generico la Memoria di Castelnuovo-Enriques, *Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une variété algébrique à plusieurs dimensions*, « Annales de l'École Normale Supérieure », s. 3, t. 23, p. 339 e sgg. (1906).

Il problema di determinare quindi le famiglie di superficie irregolari si riduce essenzialmente ai due punti seguenti:

a) determinare quali superficie si rappresentano semplicemente e quali multiplamente sopra una superficie della loro varietà di Picard;

b) classificare le famiglie di superficie contenute in una data varietà di Picard.

Quanto al primo punto tutto mi porta a ritenere che se l'irregolarità è $q \geqq 3$ e si escludono le superficie con un fascio di genere uguale alla irregolarità e le superficie ellittiche dotate di torsione, la superficie F considerata ammette sempre una imagine *birazionale* entro V.

Non posseggo a tutt'oggi la dimostrazione di questo fatto in generale. Solo sono riuscito a provarlo nel caso di $q = 3$, quando i divisori della matrice dei periodi sono tutti uguali all'unità e la superficie non è ellittica. Per $q > 3$ si può ancora dire qualcosa per quelle superficie la cui varietà di Picard è una varietà jacobiana, sussistendo per queste un teorema analogo, salvo eventuale eccezione per quelle superficie di cui si può realizzare un modello entro la varietà delle $(q-2)$-uple di punti d'una curva di genere q.

Quanto al secondo punto, accantonando pel momento il caso dell'irregolarità 2 (superficie iperellittiche multiple) conviene distinguere il caso $q = 3$ da quello in cui $q > 3$.

4. SUPERFICIE D'IRREGOLARITÀ 3. - Una superficie d'irregolarità 3 immersa nella sua varietà di Picard V_3 è in virtù del teorema di Appel–Humbert la superficie di zero di una funzione theta relativa alla matrice di periodi degli integrali normali semplici di prima specie di V_3.

Ciò permette di determinare completamente le famiglie e i moduli di queste superficie. Il risultato che si ottiene è il seguente:

Le superficie d'irregolarità 3 la cui varietà di Picard V_3 abbia dati divisori $\delta_1 = 1$, δ_2, δ_3 ed immerse in V_3 si distribuiscono in una infinità numerabile di famiglie $\{F\}_l$ dipendenti da un intero l ($6\,Dl^3$ essendo il grado virtuale della superficie entro V_3 e $D = \delta_3^2/\delta_2$).

I caratteri della generica superficie F di $\{F\}_l$ sono:

$$p_g = Dl^3 + 2 \quad ; \quad p_a = Dl^3 - 1 \quad ; \quad p^{(1)} = 6\,Dl^3 - 1 \; ;$$
$$I + 4 = 6\,Dl^3 \quad ; \quad P_k = Dl^3\,(3k^3 - 3k + 1).$$

I moduli di F sono $Dl^3 + 5$ dei quali 6 sono i moduli d'irregolarità da cui dipende V_3 e $Dl^3 - 1$ moduli di regolarità dovuti al variare di F entro V_3 in un sistema lineare.

La generica di queste superficie è senza singolarità entro V_3 e ha il numero σ di Severi uguale ad 1.

Questa classificazione è esaustiva per $D = 1$ escluse sempre le superficie ellittiche e quelle con un fascio di genere 3.

È facile vedere, in virtù di un teorema di Poincaré (6) che tutte queste superficie, eccezion fatta per $l < 3$, ammettono sempre un'imagine canonica.

(6) POINCARÉ, *Remarques diverses sur les fonctions abéliennes.* « Journal de Mathématiques », ser. 5, t. 1, pp. 226–229 (1895).

6. Superficie di irregolarità $q \geqq 4$ ideali di theta. – Quando si passa alla superficie d'irregolarità $q \geqq 4$, non ci soccorre più, come per $q = 3$, il teorema di Appel–Humbert, non trattandosi più di ipersuperficie dentro una varietà di Picard.

La via che qui si presenta naturale è quella di cercare di estendere i metodi di cui si fa uso nello spazio ordinario per la classificazione proiettiva delle curve sghembe.

Ed ecco come. Sia data una matrice di Riemann Ω ridotta alla forma canonica di Krazer:

$$\Omega = \begin{pmatrix} \frac{\pi i}{\delta_1} \cdots 0 & a_{11} \cdots a_{1q} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ 0 \cdots \frac{\pi i}{\delta_p} & a_{q1} \cdots a_{qq} \end{pmatrix}.$$

Consideriamo le funzioni theta relative a questa matrice, come si vede esse formano un anello graduato K nel senso che ad ogni theta è associato il suo ordine e che il prodotto di due theta è sempre una theta d'ordine uguale alla somma degli ordini dei fattori e la somma di due theta *dello stesso ordine* è ancora una theta del medesimo ordine.

Entro questo anello si possono considerare gli ideali *omogenei* di theta e non è difficile provare che:

a) vale il teorema della base di Hilbert, cioè l'anello K possiede la proprietà massimale (ogni catena *crescente* d'ideali ha un numero finito di elementi);

b) vale l'algoritmo delle sizigie di Hilbert, cioè il processo di costruzione delle sizigie successive d'un dato ideale di theta si estingue dopo un numero finito di passi.

Ebbene, ogni superficie entro la varietà V_q può essere definita in infiniti modi (7) mediante un ideale di theta. Basterà allora calcolare la catena delle sizigie e quindi la funzione caratteristica $\chi(l)$ di Hilbert (numero delle theta d'ordine $l\delta_p$ linearmente indipendenti contenuto nell'ideale), *funzione che si calcola per tutti i valori di l.*

Di qui si trovano subito i valori del genere aritmetico e lineare e degli altri invarianti numerici.

Non è che così si esaurisca il problema. Il difficile è determinare le classi complete di questi ideali, il che in generale non è agevole, come lo mostra il fatto che pel più semplice problema analogo della classificazione proiettiva delle curve sghembe dello spazio ordinario, non si hanno ancora metodi generali.

Tuttavia in alcuni casi particolari si riesce a dire qualcosa.

Supponiamo dapprima $q = 4$. – Allora si riescono a classificare e caratterizzare completamente le superficie intersezione complete e quelle di residuale finito.

Segnatamente si dimostra che fissati i divisori $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$, d'una varietà di Picard V_4 le superficie di V_4 che sono intersezione completa di due varietà di di zero di theta d'ordini $l_1\delta_4, l_2\delta_4$ rispettivamente hanno i caratteri

$$q = 4 \quad , \quad p_a = 2\,D l_1 l_2 (2 l_1^2 + 3 l_1 l_2 + 2 l_2^2) - 1 \quad , \quad I + 4 = 24\,D l_1 l_2 (l_1 + l_2)^2$$

(7) Vi sono dei casi in cui si può scegliere fra questi ideali uno privilegiato com'è per esempio il caso delle intersezioni complete.

e dipendono da $M = 2D l^4 + 10$ moduli se $l = l_1 = l_2$; da $M = 2D l_1 l_2 (2 l_1^2 - 3 l_1 l_2 + l_2^2) + 13$ se $l_1 \neq l_2$. Qui $D = \delta_4/\delta_1 \cdot \delta_4/\delta_2 \cdot \delta_4/\delta_3$.

Si estende poi come nel caso delle curve dello spazio [8] ordinario la nozione di residuale come segue: due superficie F, Ψ corrispondenti agli ideali $\mathfrak{U}_F, \mathfrak{U}_\Psi$ si dicono corresiduali rispetto a due theta θ^1, θ^2, se

$$\mathfrak{U}_F = (\theta^1, \theta^2) : \mathfrak{U}_\Psi \text{ e } \mathfrak{U}_\Psi = (\theta^1, \theta^2) : \mathfrak{U}_F .$$

Una superficie intersezione completa è di residuale zero, e per ricorrenza si definisce una superficie di residuale ρ se fra i resti ve ne sono di residuale $\rho - 1$ ma non di residuale minore.

Si prova che una superficie di residuale ρ corrisponde ad un ideale generato dai minori d'ordine massimo di una matrice (θ^{ij}) a $\rho + 1$ righe e $\rho + 2$ colonne, la matrice essendo omogenea e di rango massimo $(= \rho + 1)$ e viceversa.

Si calcolano così facilmente gli invarianti e i moduli di queste superficie. Non ci dilunghiamo su questo; quello che qui mi pare interessante rilevare è la presenza di famiglie di superficie irregolari (le superficie di residuale finito) di data irregolarità 4, dipendenti da un numero alto quanto si vuole di invarianti numerici (sono essenzialmente i « salti » della funzione caratteristica $\chi(l)$ del corrispondente ideale pei valori bassi di l). Fatto analogo alla ipotesi di Halphen per la classificazione delle curve sghembe dello spazio ordinario recentemente dimostrata dal Gaeta [9] per via analoga.

Quando si passa alla irregolarità $q > 4$ analoghe considerazioni portano alla classificazione completa delle superficie intersezioni complete. Viene a cadere la identità delle superficie a ideale matriciale con quelle di residuale finito. Tuttavia per le prime sussistono le considerazioni precedenti inalterate e se ne possono determinare agevolmente invarianti e moduli.

Continua a valere il fatto analogo a quello espresso dalla ipotesi di Halphen, ciò che in certo senso uccide se vogliamo nella sua forma generale il problema di « classificare le superficie irregolari ».

Osserviamo da ultimo come è interessante paragonare il confine superiore assegnato di recente pel numero dei moduli d'una superficie irregolare da Castelnuovo [10] e i valori trovati da noi. In generale se si ha una successione di famiglie dipendenti da uno o più interi, la formula di Castelnuovo coincide nell'ordine d'infinito con il valore vero del numero dei moduli. Per esempio nel caso dell'irregolarità 3, colle notazioni precedenti il valore presunto da Castelnuovo è $M_c = D l^5 + 8$ e quello vero è $M = D l^3 + 5$ sicchè $\lim_{l \to \infty} M_c/M = 1$.

(8) Ved. GAETA, *Nuove ricerche sulle curve algebriche di residuale finito e sui gruppi di punti del piano.* « Annali di Matematica », ser. 4, t. 31, pp. 1-64 (1950).

(9) Loc. cit. in (8).

(10) CASTELNUOVO, *Sul numero dei moduli di una superficie irregolare.* « Rendiconti dell'Accademia dei Lincei », ser. 8, t. 7, pp. 3-11 (1949).

Geometria. — *Forme algebriche sviluppabili e relative hessiane.* Nota di ALFREDO FRANCHETTA, presentata (*) dal Corrisp. B. SEGRE.

1. Sia F_d una forma dello spazio S_{d+1}, dotata di ∞^{d-1} iperpiani tangenti soltanto, ossia contenente un sistema $\Sigma\,\infty^{d-1}$ di rette, lungo ciascuna delle quali l'iperpiano tangente è fisso. Si sa che una F_d siffatta è contenuta nella relativa hessiana H; ci si può chiedere (1) se la forma possa essere componente multipla di H. A tal proposito dimostro (n. 2) il LEMMA seguente:

Condizione necessaria e sufficiente perchè F_d *sia componente multipla di* H *è che ogni piano passante per la retta r generica di* Σ, *e non contenuto nell'iperpiano tangente a* F_d *lungo r, intersechi* F_d, *fuori di r, in una curva avente con r un solo punto in comune* (da contarsi $n-1$ volte, se n è l'ordine di F_d).

Dal lemma si trae facilmente (n. 3) che la sola superficie di S_3 che sia contenuta multiplamente nella propria hessiana è la sviluppabile circoscritta alla cubica gobba, la cui hessiana è la superficie stessa, contata due volte (2). Riguardo alle forme degli spazi superiori, si può dedurre dal lemma che *le* F_d *cercate*, SE ESISTONO, *hanno ordine* $(d-1)^2$; esporrò succintamente nei nn. 4–7 le considerazioni che conducono a questo risultato per gli spazi S_4 ed S_5, mettendo in luce i problemi di carattere algebrico-differenziale cui si va incontro per dare una risposta al problema generale di esistenza, sul quale mi propongo di tornare in un lavoro successivo. Le considerazioni qui svolte prospettano anche una via per giungere alla determinazione delle forme F_d (con $d \geq 3$) aventi l'hessiana indeterminata.

2. Sia F_d^n una forma irriducibile di S_{d+1}, che supporremo d'ordine $n \geq 3$, in quanto i casi $n = 1, 2$ risultano banali. Preso un punto semplice A di F, le rette aventi ivi con F un contatto di ordine superiore al primo formano un cono quadrico Q_{d-1}, detto cono asintotico, oppure riempiono l'iperpiano tangente ad F in A (punto di flesso). Il punto A si dice parabolico se Q è specializzato; più precisamente, si dice h-parabolico se il suo vertice è un S_h $(0 < h < d)$.

La forma hessiana H di F passa per A se, e soltanto se, A è parabolico (in particolare, di flesso). È facile verificare che H ha in A un punto multiplo quando è $h > 1$. Il punto A può essere tuttavia multiplo per H anche quando esso è 1-parabolico per F; come ha dimostrato E. Bompiani (3), ciò avviene

(*) Nella seduta del 12 maggio 1951.

(1) La questione è stata segnalata da B. SEGRE nella Memoria: BERTINI *forms and hessian matrices*. « Journ. of the London Math. Soc. », vol. 26, (1951).

(2) La circostanza che l'hessiana della F^4 sviluppabile si riduce alla superficie stessa, contata due volte, era già nota a CAYLEY (cfr. *On certain developable surfaces*. « Quartely Math. Journ. », t. VI, (1864)); per una semplice dimostrazione gruppale, cfr. B. SEGRE, loc. cit.

(3) Nel corso di geometria differenziale tenuto all'Università di Roma nell'anno accademico 1947–48.

se, e soltanto se, sulla retta vertice r del cono asintotico in A esiste un punto B tale che: 1) la prima polare Φ di B rispetto ad F abbia in A un punto doppio; 2) il cono osculatore a Φ in A passi doppiamente per r.

Supponiamo la F_d^n dotata di ∞^{d-1} iperpiani tangenti soltanto, e indichiamo con r la retta secondo cui il generico di essi tocca F. Dimostriamo il lemma enunciato al n. 1. Nelle ipotesi ammesse, il punto A generico di F è 1–parabolico, perchè se fosse h–parabolico, con $h > 1$, F avrebbe $\infty^{d-h<d-1}$ iperpiani tangenti; la retta r per A è la retta vertice del cono asintotico in A. Se F è componente multipla di H, esiste su r, in corrispondenza ad ogni suo punto A, un punto B soddisfacente alle condizioni 1) e 2) del teorema di Bompiani. Sia α un piano per r, non contenuto nell'iperpiano tangente; la sua sezione con F è costituita da r e da una curva C^{n-1}, che non contiene r. La sezione di α con Φ è formata da r e dalla prima polare φ di B rispetto a C^{n-1}; dato che la curva $r + \varphi$ deve avere in A un punto doppio con tangenti coincidenti in r, φ deve essere tangente a r in A.

Le polari dei punti di r rispetto a C^{n-1} formano un fascio; quindi la condizione precedente può essere soddisfatta in ogni punto A di r solo se qualche curva φ contiene r; ma, come si verifica subito, ciò porta che C^{n-1} ed r debbano avere un solo punto in comune.

La proprietà s'inverte. Supponiamo infatti che il piano α generico per r intersechi F secondo r e una curva C^{n-1} avente con r un solo punto in comune. Questo punto non può variare con α; invero le C^{n-1} sezioni residue di una forma F^n coi piani per una retta r semplice di F segano su r i gruppi di una g_{n-1}; e questa g_{n-1} deve avere dimensione zero se si vuole che ogni suo gruppo consti di un punto contato $n-1$ ($\geqq 2$) volte. Pertanto, detto B il punto comune a r e C^{n-1}, la forma Φ polare di B ha r come retta doppia; le condizioni di Bompiani sono così soddisfatte per ogni punto di r e quindi, al variare di r, per ogni punto di F, sicchè F è contenuta multiplamente in H.

3. Dal lemma si può dedurre in vari modi che la sola superficie di S_3 che sia componente multipla della propria hessiana è la sviluppabile del quart'ordine, circoscritta alla cubica gobba. Basta osservare, ad esempio, che un piano generico passante per una generatrice r di una sviluppabile F^n la interseca, fuori di r, in una curva C^{n-1}, che ha un contatto del second'ordine con r nel punto A in cui r tocca lo spigolo di regresso di F; e che il contatto non può essere di ordine superiore, se r è generica. La condizione del lemma può essere dunque soddisfatta soltanto se è $n = 4$.

La proprietà in discorso può essere anche dedotta dalla seguente proposizione di Cayley, contenuta nella Memoria citata in (2). Si ricordi anzitutto che la curva C^{n-1} secondo cui il piano π tangente ad F^n lungo r sega F^n, fuori di r, ha in A un contatto del prim'ordine con r; e che il contatto non può essere di ordine superiore, se r è generica. La superficie H–F, che Cayley chiama pro–hessiana, interseca r, fuori di A, in un gruppo di punti G, che può essere carat-

terizzato come differenza fra l'hessiano del gruppo $(r, C^{n-2}) + A$ e il punto A, contato quattro volte (4).

Se F^n è contenuta nella pro-hessiana, il gruppo G è indeterminato; e ciò può accadere solo se C^{n-2} non incontra r, fuori di A; cioè se è $n = 4$.

4. Se una forma F_d di S_{d+1} soddisfa alla condizione del lemma, *i fuochi del relativo sistema* Σ *che cadono sulla r generica devono coincidere in un solo punto.* È noto infatti (5) che i fuochi di Σ sono punti multipli di F_d; quindi se sulla r generica ne cadessero due (o più) distinti, la sezione residua C^{n-1} di F_d con un piano per r passerebbe per essi, e la condizione espressa dal lemma non potrebbe essere verificata.

In secondo luogo osserviamo che un punto comune ad r e a un'altra retta $\bar{r}$ di Σ è multiplo per F; quindi *se* F *è contenuta multiplamente nella propria hessiana, ogni retta di* Σ *incidente alla sua retta generica r deve incontrarla nel fuoco appartenente ad r.*

La condizione che i fuochi appartenenti ad r coincidano in un solo punto è di carattere differenziale, e può essere soddisfatta anche da ipersuperficie non algebriche, soddisfacenti ad oppurtune condizioni di regolarità. In relazione a ciò, e per maggior chiarezza, l'ipersuperficie considerata sarà designata con F_d quando occorrerà supporla algebrica; con V_d quando l'ipotesi dell'algebricità potrà essere tralasciata.

5. La caratterizzazione delle ipersuperficie V_d per le quali i fuochi del relativo sistema Σ appartenenti ad una r generica coincidono in un solo punto si ottiene facilmente. Mi limiterò qui ad enunciare i risultati relativi alle ipersuperficie degli spazi S_4 ed S_5.

I fuochi del sistema Σ relativo a una V_3 di S_4 possono coincidere in un punto fisso, e allora la V_3 è un cono: o riempire una curva o una superficie. Se i fuochi riempiono una curva C, V_3 *è luogo di* ∞^1 *piani, passanti per le tangenti di* C; se invece i fuochi riempiono una superfice W, *questa è dotata di un sistema di linee asintotiche, e la* V_3 *è il luogo delle tangenti a tali linee.*

Per un'ipersuperficie V_4 di S_5 può accadere che i fuochi di Σ coincidano in un punto fisso, e allora V_4 è un cono; oppure che costituiscano una curva, o una superficie, o una varietà a tre dimensioni. Se i fuochi riempiono una curva C, V_4 *è il luogo di* ∞^2 *piani, tali che per ogni tangente di* C *ne passino* ∞^1. Se il luogo dei fuochi è una superficie W_2, V_4 è collegata a un sistema di *linee principali* (6) di W_2; precisamente: V_4 *è il luogo del piano secondo cui lo* S_3, *individuato da un piano tangente a* W_2 *in un suo punto* P *e dal piano osculatore alla linea del sistema passante per* P, *incontra lo* S_3 *analogo, relativo al punto* P' *infinitamente vicino a* P *nella direzione della linea stessa.* Infine, se il luogo dei fuochi è una varietà a

(4) Nella Memoria di Cayley, questa proprietà trovasi soltanto enunciata, e non riceve alcuna applicazione.

(5) Cfr. C. Segre, *Preliminari per una teoria delle varietà luoghi di spazi.* «Rend. del Circ. Matem. di Palermo», T. XXX (1910).

(6) C. Segre, loc. cit.

tre dimensioni W_3, *questa è dotata di un sistema di linee asintotiche, e* V_4 *è il luogo delle tangenti a tali linee.*

6. Consideriamo una forma F_3 di S_4 e supponiamo che essa soddisfi alla condizione espressa dal lemma. Se F_3 è un cono, la sua hessiana è indeterminata; se i suoi fuochi riempiono una curva C (e quindi, a norma del risultato enunciato nel n. 5, la F_3 è luogo di ∞^1 piani passanti per le tangenti di C) tenuto conto dell'ulteriore condizione che una retta generica di Σ non incontra altre rette del sistema, fuori del punto che essa ha in comune con C, si vede che C è piana; e di qui si deduce facilmente che *la relativa hessiana è indeterminata.*

Rimane dunque da considerare soltanto il caso in cui la forma F_3^n sia dotata di un sistema Σ, ∞^2, di rette, con superficie W di fuochi. Se F soddisfa alla condizione del lemma, la molteplicità di intersezione della generica r di Σ con la residua intersezione C^{n-1} di F con un piano generico per r, nel fuoco appartenente ad r, è uguale ad $n-1$. Ora si prova con una analisi un po' minuziosa, che qui non sto a riferire, che C^{n-1} *deve passare pel detto fuoco con due rami lineari aventi contatto del terz'ordine con* r; e che il contatto non può essere d'ordine superiore se r è generica, e se F è dotata effettivamente di ∞^2 iperpiani tangenti. Da qui si deduce che *l'ordine di* F, *supposta esistente, è* $n = 9$.

Così, seguendo la via indicata, la ricerca delle forme F_3 di S_4 aventi la proprietà voluta è ricondotta alla determinazione ed allo studio delle superficie (algebriche) dotate di un sistema di asintotiche e tali che le tangenti a queste linee riempiano una forma di ordine 9.

7. Quanto alle forme di S_5, si prova che: 1) se il sistema possiede soltanto ∞^1 fuochi, e la forma soddisfa alla condizione del lemma, *l'hessiana è indeterminata*; 2) se il sistema possiede soltanto ∞^2 fuochi, *la condizione del lemma non può essere verificata*, se gli iperpiani tangenti sono effettivamente ∞^2.

Consideriamo dunque una forma F_4^n tale che i fuochi del relativo sistema Σ riempiano una W_3; si dimostra allora che *la residua intersezione della forma con un piano passante per la retta r generica di* Σ *presenta, nel fuoco appartenente ad r, tre rami lineari, ciascuno dei quali ha contatto del quart'ordine con r* (e il contatto non può essere d'ordine superiore se la forma possiede effettivamente ∞^3 iperpiani tangenti); ne consegue che dev'essere $n = 16$, il che dà adito a considerazioni analoghe a quelle indicate alla fine del n. 6.

Meccanica. — *Sulle mutue azioni fra campo gravitazionale e campo elettromagnetico.* Nota di PAOLO UDESCHINI, presentata (*) dal Corrisp. B. FINZI.

Nell'ordinaria teoria relativistica della gravitazione il campo elettromagnetico ha influenza su quello gravitazionale attraverso al tensore di energia elettromagnetica. Così le generali equazioni del campo gravitazionale sono:

$$(1) \qquad R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = \chi T_{ik} \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3)^{(1)}$$

nelle quali tutti i tensori sono simmetrici, R_{ik} è il tensore di Riemann contratto, g_{ik} il tensore fondamentale, $R = R_{ik} g^{ik}$ (2), χ è una costante connessa con la costante di attrazione universale, e T_{ik} è il tensore energetico, che racchiude in sè ogni forma di energia atta a generare campo gravitazionale, composto quindi del tensore energetico dovuto alla materia e di quello di energia elettromagnetica.

Pertanto, anche nelle regioni vuote di materia, le equazioni gravitazionali sono ancora le (1) dove al tensore energetico reca contributo il campo elettromagnetico attraverso al tensore di energia elettromagnetica.

Se si confrontano gli elementi costitutivi del tensore energetico T_{ik}, secondo il loro ordine di grandezza, si constata che il contributo del campo elettromagnetico è praticamente trascurabile di fronte a quello dovuto alla materia (1). È lecito perciò, nelle equazioni di prima e anche seconda approssimazione, trascurare l'effetto del campo elettromagnetico su quello gravitazionale; così le equazioni gravitazionali in prima e seconda approssimazione nelle regioni vuote di materia, come quelle valide per le regioni vuote di materia e di energia, si deducono dalle (1) ponendo $\chi T_{ik} = 0$, cioè (dopo aver osservato che prendendo l'invariante lineare del primo membro risulta $R = 0$)

$$(2) \qquad R_{ik} = 0.$$

Nella nuova teoria relativistica unitaria, generalizzando le equazioni (2) della pura gravitazione, Einstein scrive ancora le (2), dove però R_{ik} è un tensore doppio non simmetrico che generalizza il tensore precedente e ad esso si riduce allorchè il tensore fondamentale diviene simmetrico. Ma (a differenza dell'ordinaria teoria della gravitazione) pur ritenendo trascurabile l'azione del campo elettromagnetico su quello gravitazionale, attraverso al tensore energetico, nella nuova teoria il campo elettromagnetico può ugualmente influire su quello gravitazionale e viceversa.

(*) Nella seduta del 14 aprile 1951.

(1) EINSTEIN, *The Meaning of Relativity*, Princeton University, (1950).

(2) Si sottintende il segno di sommatoria quando si satura un indice posto in basso con uno, posto in alto dello stesso nome, gli indici assumono d'ordinario i valori 0, 1, 2, 3; la virgola precedente indici è simbolo di derivazione ordinaria.

In prima approssimazione tale influenza non si verifica, come ho mostrato in una recente Nota [3] pubblicata in questi « Rendiconti » nel 1950. Basta però la seconda approssimazione per mettere in evidenza l'interazione fra i due campi fondamentali, come appare dalle equazioni di seconda approssimazione date in due successive Note [4].

Schrödinger, in una recentissima pubblicazione [5], ha dedotto da una sua soluzione approssimata delle equazioni della teoria unitaria, che un debole campo elettromagnetico di primo ordine può generare un campo gravitazionale di secondo ordine attraverso ad un tensore doppio simmetrico costruito con le derivate (prime e seconde) del campo elettromagnetico.

Osservo, fra l'altro, in questa Nota come le equazioni approssimate di Schrödinger si possono dedurre facilmente dalle mie equazioni di seconda approssimazione, e per di più da queste deduco rapidamente una soluzione duale di quella di Schrödinger, col risultato però che un campo gravitazionale di primo ordine non può influire su un campo elettromagnetico di secondo ordine.

1. EQUAZIONI DI PRIMA E SECONDA APPROSSIMAZIONE. – Le equazioni di prima approssimazione nella nuova teoria relativistica unitaria di Einstein, come ho mostrato nella Nota [3], si scindono in due gruppi distinti contenenti ciascuno soltanto gli elementi riguardanti uno dei due campi fondamentali. Il campo elettromagnetico non influisce dunque sul campo gravitazionale e viceversa.

Precisamente, se g_{ik} è il tensore doppio fondamentale, non simmetrico, la cui parte simmetrica individua la metrica e quella emisimmetrica ha per coniugato un tensore che può interpretarsi come tensore elettromagnetico, sia:

$$g_{ik}=a_{ik}+\underline{b}_{ik}+\underset{\vee}{b}_{ik} \qquad (i,k=0,1,2,3) \tag{3}$$

dove $a_{ik}=\begin{cases} 1 \text{ per } i=k=0 \\ -1 \text{ per } i=k=1,2,3 \end{cases}$, $a_{ik}=0$ per $i\neq k$ e il tensore $b_{ik}=\underline{b}_{ik}+\underset{\vee}{b}_{ik}$ è piccolo del primo ordine rispetto ad a_{ik}. Le equazioni del campo unitario di prima approssimazione sono le seguenti:

$$\underline{b}_{ij,j_k}+\underline{b}_{kj,j_i}-\underline{b}_{j,j_{ik}}-\underline{b}_{ki,j^j}=0 \quad , \quad \underset{\vee}{b}_{ik,j^j}=0 \quad , \quad \underline{b}_{ij,j^j}=0 \tag{4}$$

la prima delle quali, per opportuno riferimento, diviene $\underline{b}_{ki,j^j}=0$.

Il campo gravitazionale, caratterizzato dal tensore simmetrico $\underline{b}_{ik}$, come quello elettromagnetico, caratterizzato dal tensore emisimmetrico $\underset{\vee}{b}_{ik}$, obbediscono entrambi all'equazione di d'Alembert. Le equazioni riguardanti il campo elettromagnetico sono le equazioni di Maxwell. Queste non riguardano soltanto un campo neutro, come ho affermato nella Nota [3] citata, ma più generalmente,

(3) P. UDESCHINI, *Le equazioni di prima approssimazione nella nuova teoria relativistica unitaria di Einstein.* « Acc. Naz. dei Lincei », vol. IX, fasc. 5 (1950).

(4) P. UDESCHINI, *Le equazioni di seconda approssimazione nella nuova teoria relativistica unitaria di Einstein.* Nota I e II, « Acc. Naz. dei Lincei », vol. X (1951).

(5) E. SCHRÖDINGER, *Studies in the non-symmetric Generalization of the Theory of Gravitation I.* Comunications of the Dublin Institute for Advanced Studies, Series A, n. 6 (1951).

come mi ha gentilmente osservato Schrödinger e come risulta dalla sua pubblicazione citata [5], un campo il cui vettore I^α, che dà la distribuzione elettrica (quadricorrente), è gradiente di uno scalare armonico nello spazio tempo (funzione d'onda). Infatti il vettore I^α è la metà del rotore di b_{ik} (coniugato del tensore elettromagnetico [3]) e le equazioni (4) del campo elettromagnetico implicano (se non l'annullarsi del rotore di b_{ik}) l'annullarsi della divergenza del rotore di b_{ik}, per cui il vettore I^α è gradiente di uno scalare armonico nello spazio–tempo e cioè soluzione di un'equazione di d'Alembert.

Nelle due Note successive [4] ho dato le equazioni di seconda approssimazione della teoria relativistica unitaria di Einstein col risultato che i due campi fondamentali, gravitazionale ed elettromagnetico, risultano intimamente fusi in un unico campo, quello unitario. Posto

$$g_{ik}=a_{ik}+b_{ik}+b_{ik}+c_{ik}+c_{ik} \tag{5}$$

dove il tensore $c_{ik}=c_{ik}+c_{ik}$ è piccolo di secondo ordine rispetto ad a_{ik}, mentre b_{ik} è noto di primo ordine. Le equazioni del campo unitario che dànno gli elementi di secondo ordine in funzione di quelli di primo ordine, sono le seguenti (oltre all'identità che esprime l'irrotazionalità del tensore elettromagnetico $^*g_{ik}$):

$$c_{ki}{}_{,j}{}^{j}=B_{ki} \quad ; \quad c_{is}{}_{,}{}^{s}=b^{rs}\, b_{ir}{}_{,s}+b^{rs}\, b_{ir}{}_{,s}+b_{ir}\left(b^{rs}{}_{,s}-\frac{1}{2}\,a_{ls}\,b^{ls}{}_{,r}\right) \tag{6}$$

dove il tensore B_{ki} ha l'espressione:

$$B_{ki}=a^{js}\left(b_{rs}\,L^{r}_{(ji)}+b_{ir}\,L^{r}_{(sj)}+b_{jr}\,L^{r}_{(is)}\right)_{,k}+a^{js}\left(b_{rk}\,L^{r}_{(js)}+b_{sr}\,L^{r}_{(kj)}+b_{jr}\,L^{r}_{(sk)}\right)_{,i}-$$

$$-2\,a^{js}\left(b_{rk}\,L^{r}_{(ji)}+b_{ir}\,L^{r}_{(kj)}+b_{jr}\,L^{r}_{(ik)}\right)_{,s}+2\,L^{r}_{(ik)}\,L^{s}_{(rs)}-2\,L^{s}_{(ir)}\,L^{r}_{(sk)}$$

ed $L^{r}_{(ik)}$ sono i coefficienti di connessione di prima approssimazione.

Le (6) mostrano come i due campi fondamentali risultino intimamente intrecciati fra loro, lasciando prevedere come un campo elettromagnetico possa influire sul campo gravitazionale e viceversa, così ad esempio ho mostrato [4] come la velocità della luce dipenda dal campo elettromagnetico.

2. Soluzione approssimata di Schrödinger. – Schrödinger, nella pubblicazione precedentemente citata [5], dà una soluzione approssimata delle equazioni del campo unitario, soluzione che si potrebbe dire intermedia fra quelle di prima e seconda approssimazione. Infatti lo Schrödinger dimostra che è possibile una soluzione del tipo

$$g_{ik}=a_{ik}+c_{ik}+b_{ik} \tag{7}$$

dove il tensore emisimmetrico b_{ik}, che individua il campo elettromagnetico, è ritenuto piccolo del primo ordine rispetto ad a_{ik}, mentre il tensore simmetrico c_{ik}, che individua il campo gravitazionale, è ritenuto piccolo di secondo ordine rispetto ad a_{ik}.

In tale approssimazione Schrödinger mostra come, supposto noto il campo elettromagnetico (di primo ordine), si possa ottenere per quadrature il campo gravitazionale (di secondo ordine). La soluzione è data per campi neutri (vettore quadricorrente nullo) e anche per campi non neutri, in quest'ultimo caso però il vettore quadricorrente deve essere gradiente di uno scalare armonico nello spazio–tempo.

Le equazioni approssimate di Schrödinger, com'è facile prevedere, possono dedursi immediatamente anche dalle (6) quando in esse si ponga

$$b_{ik}=0 \quad , \quad c_{ik}=0. \tag{8}$$

Da (6) scende infatti con le (8)

$$c_{ki}\,,_j{}^j = -\,2\,\Phi_{ki} \tag{9}$$

dove

$$-\,2\,\Phi_{ki}=a^{js}\left[(b_{rs}\,\mathrm{L}^r_{ji})\,,_k+(b_{sr}\,\mathrm{L}^r_{kj})\,,_i-2\,(b_{rk}\,\mathrm{L}^r_{ji}+b_{ir}\,\mathrm{L}^r_{kj})\,,_s\right]-2\,\mathrm{L}^s_{ir}\,\mathrm{L}^r_{sk} \tag{10}$$

$$\mathrm{L}^r_{ki}=\frac{1}{2}\,a^{jr}\,(b_{ji}\,,_k+b_{kj}\,,_i-b_{ik}\,,_j).$$

Le altre equazioni (6) si riducono a identità. Se (distinguendo i due casi di campo neutro oppure no) il campo elettromagnetico è neutro, cioè, se $\mathrm{I}^\alpha=0$ e quindi $s_{ikl}=b_{ik}\,,_l+b_{kl}\,,_i+b_{li}\,,_k=0$, si ottiene $\mathrm{L}^r_{ki}=a^{jr}\,b_{ki}\,,_j$, mentre se il campo non è neutro si può scrivere $\mathrm{L}^r_{ki}=a^{jr}\,(b_{ki}\,,_j-1/2\,s_{kij})$. Nel primo caso il tensore doppio simmetrico Φ_{ki} (10) assume l'espressione:

$$\Phi_{ki}=a^{js}\,a^{rl}\left[b_{rk}\,,_s\,b_{ji}\,,_l-\frac{1}{2}\,(b_{rs}\,b_{jk}\,,_l)\,,_i-\frac{1}{2}\,(b_{rs}\,b_{ji}\,,_l)\,,_k\right] \tag{11}$$

che coincide, con qualche trasformazione, con l'espressione data da Schrödinger al tensore Φ_{ki} (formula (1, 25) p. 12 della pubbl. [5])

$$\Phi_{ki}=a^{js}\,a^{rl}\left[b_{ks}\,,_l\,b_{ir}\,,_j+\frac{1}{4}\,(b_{sl}\,b_{jr})\,,_{ki}\right]. \tag{12}$$

In modo analogo si procede, per il calcolo di Φ_{ki}, se il campo non è neutro, nel qual caso nell'espressione (12) compare un termine aggiuntivo dipendente da s_{ikl}, cioè da I^α (formula (2,17) p. 21 della pubbl. [5]).

Le (9), oltre alle equazioni di primo ordine (4) riguardanti il solo campo elettromagnetico, sono le equazioni approssimate di Schrödinger, con l'espressione (12) per Φ_{ki}, o col termine aggiuntivo se il campo non è neutro. Le (9) riducono alle quadrature (potenziali ritardati) la determinazione del campo gravitazionale (di secondo ordine) quando sia noto quello elettromagnetico (di primo ordine).

Un campo elettromagnetico influisce dunque su un campo gravitazionale, determinato dalle (9) a meno di un campo armonico nello spazio–tempo, e vi influisce tramite il tensore doppio simmetrico Φ_{ki} di nuova struttura, che ha forma

quadratica nelle derivate del campo elettromagnetico. Questo tensore differisce dal tensore di energia elettromagnetica di Maxwell, quadratico nelle componenti del campo elettromagnetico, ed è atto a generare un campo gravitazionale. Esso, a meno di un addendo formato con l'invariante lineare, costituisce un tensore $E_{ik}=\Phi_{ik}-1/2\,a_{ik}\,\Phi_{rs}\,a^{rs}$ a divergenza nulla « the matter tensor for weak fields » e può costituire un tensore aggiunto al tensore energetico totale. Questo infatti è un tensore doppio simmetrico, definito a meno di un tensore doppio solenoidale arbitrario, come ho rilevato in una mia Nota del 1949 (6).

Per ottenere allora la (9) basta porre nella (1) al posto di χT_{ik} semplicemente E_{ik}. La (1) diviene infatti $R_{ik}=\Phi_{ik}$ e quindi (sempre riferendosi alla (1)), per $g_{ik}=a_{ik}+c_{ik}$, poichè $R_{ik}=-1/2\,c_{ik,j}{}^{j}$, si ottiene tosto la (9).

3. Soluzione duale della precedente. – Come un campo elettromagnetico di primo ordine influisce su un campo gravitazionale di secondo ordine, è naturale chiedersi dualmente: un campo gravitazionale del primo ordine può influire su un campo elettromagnetico di secondo ordine? Cerchiamo pertanto una soluzione del tipo:

$$g_{ik}=a_{ik}+\underset{\sim}{b}_{ik}+\underset{\vee}{c}_{ik} \tag{13}$$

dove il tensore simmetrico b_{ik}, che individua il campo gravitazionale, è piccolo del primo ordine rispetto ad a_{ik} e il tensore emisimmetrico c_{ik}, che individua il campo elettromagnetico, è del secondo ordine rispetto ad a_{ik}.

Dalle (6), ponendo $b_{ik}=0$ e $c_{ik}=0$, scende

$$\underset{\vee}{c}_{ik,}{}^{i}=0 \quad , \quad \underset{\vee}{c}_{ki}{}_{,}{}^{j}=0 \tag{14}$$

$$0=a^{js}\left[(\underset{\sim}{b}_{jr}\,\underset{\sim}{\mathrm{L}}{}^{r}_{(is)})_{,k}+(\underset{\sim}{b}_{jr}\,\underset{\sim}{\mathrm{L}}{}^{r}_{(sk)})_{,i}-2\,(\underset{\sim}{b}_{jr}\,\underset{\sim}{\mathrm{L}}{}^{r}_{(ik)})_{,s}\right]+2\,\underset{\sim}{\mathrm{L}}{}^{r}_{(ik)}\,\underset{\sim}{\mathrm{L}}{}^{s}_{(rs)}-2\,\underset{\sim}{\mathrm{L}}{}^{s}_{(ir)}\,\underset{\sim}{\mathrm{L}}{}^{r}_{(sk)} \tag{15}$$

dove $\underset{\sim}{\mathrm{L}}{}^{r}_{(is)}$ sono i simboli di Christoffel costruiti col tensore $\underset{\sim}{b}_{ik}$ il quale è retto dall'equazione di prima approssimazione (la prima delle (4)) che specificando il riferimento diviene:

$$\underset{\sim}{b}_{ik}{}_{,}{}^{j}=0. \tag{16}$$

Le equazioni del campo elettromagnetico si separano da quelle gravitazionali e queste ultime si riducono alle (16) e (15).

Possiamo dunque concludere che mentre un campo elettromagnetico, di primo ordine (neutro o con quadricorrente gradiente di uno scalare armonico nello spazio-tempo) può influire su un campo gravitazionale di secondo ordine, non è altrettanto vero che un campo gravitazionale di primo ordine possa influire su un campo elettromagnetico di secondo ordine, perchè anche quando le (16) e (15) sono compatibili, le equazioni (14) non collegano il campo gravitazionale a quello elettromagnetico.

(6) P. Udeschini, *Sulla indeterminazione del tensore energetico nello spazio-tempo.* « Acc. Naz. dei Lincei », vol. VI, fasc. 2 (1949).

Meccanica. — *Applicazione della teoria dell'ellisse di elasticità trasversale allo studio di un'asta curva elasticamente vincolata agli estremi.* Nota I di FILIPPO LATTANZI, presentata (*) dal Socio G. ARMELLINI.

1. La ricerca, mediante il metodo delle deformazioni, delle sollecitazioni nascenti in un'asta, rettilinea o curva, facente parte di un qualunque sistema elastico continuo reticolare e spaziale, sottoposto a carichi sollecitanti in modo qualsiasi le aste di cui si compone ed i nodi ai quali tali aste fanno capo, è noto essere, in sostanza, strettamente collegata o meglio dipendente dalla possibilità di esprimere i valori delle reazioni di estremità di una tale asta, in funzione delle deformazioni stesse dei nodi ai quali fanno capo le sue due estremità; poichè è dalla condizione di equilibrio intorno ad un nodo, di tutte le forze e di tutti i momenti, uguali e contrari a quelli sollecitanti l'estremità delle aste facenti capo in esso, che scaturiscono le equazioni contenenti come incognite le deformazioni dei nodi stessi; dalla conoscenza delle quali è possibile risalire alla determinazione delle forze e dei momenti dai quali ogni sezione trasversale dell'asta è sollecitata.

Ci proponiamo di condurre la ricerca dei parametri delle reazioni alle estremità di un'asta curva qualsiasi considerata elasticamente vincolata, soggetta a forze perpendicolari al piano π contenente il suo asse geometrico, mediante le proprietà di cui gode l'ellisse terminale di elasticità trasversale; la cui esistenza, come conica centrale nell'antipolarità stabilita sul piano π fra punti, intesi come di applicazione di forze F perpendicolari ad esso, e rette, intese come assi delle rotazioni provocate dalle F, fu dimostrata dal Ricci (1); e della quale riportiamo, per sommi capi, le proprietà fondamentali di cui essa gode e che più immediatamente c'interessano.

« Una forza F perpendicolare al piano di giacenza dell'asse geometrico di un'asta ritenuta rigidamente incastrata ad un'estremo, produce una rotazione, dell'altra sezione terminale libera, intorno alla retta antipolare del punto d'applicazione della F rispetto all'ellisse di elasticità trasversale. Una coppia di asse–momento, giacente sullo stesso piano π, produce una rotazione intorno al diametro coniugato a quello parallelo alla traccia sul piano π, del piano di giacenza della coppia stessa ».

Riferiamo perciò l'asta curva OT ad un sistema di assi cartesiani O (X Y Z), e, senza per ciò nulla togliere alla generalità del caso in questione, supponiamo che la sua corda sia distesa su l'asse X; supponiamo inoltre che il piano π coincida con il piano X Y; ed infine che i due assi principali d'inerzia della sezione trasversale sieno: uno contenuto sul piano X Y, l'altro parallelo all'asse Z.

(*) Nella seduta del 14 aprile 1951.

(1) C. L. RICCI, *L'ellisse di elasticità trasversale.* « R. Accademia delle Scienze », Torino, 1911.

2. Ciò premesso, immaginiamo di aver determinato per l'asta OT, considerata rigidamente incastrata in O, e libera in T, l'ellisse di elasticità trasversale e rispetto ad essa i centri relativi agli assi X, Y, Y'.

Per le proprietà enunciate:

una coppia $(\mu_x^T)'$ di asse–momento applicato in T disposto secondo l'asse X, il cui piano di giacenza ha per traccia sul piano XY l'asse Y', produce una rotazione intorno al diametro coniugato a quello parallelo all'asse Y';

una coppia μ_y^T di asse–momento applicato in T disposto secondo l'asse Y', il cui piano di giacenza ha per traccia sul piano XY l'asse X, produce una rotazione intorno al diametro coniugato a quello parallelo all'asse X;

una forza $(F_z^T)'$ perpendicolare al piano XY applicata in T produce una rotazione intorno alla retta antipolare di T.

Prescindiamo per ora dalla entità di tali rotazioni, che ai fini nostri immediati non ha importanza alcuna e riferiamoci senz'altro alla fig. 1;

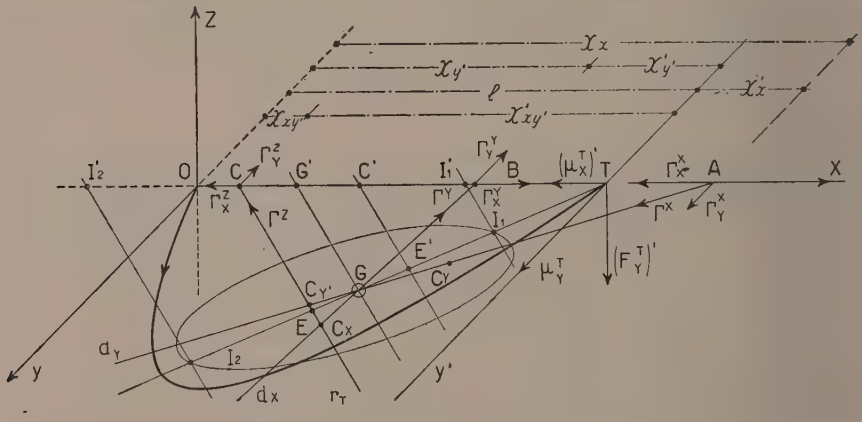


Fig. 1.

Sia G il centro dell'ellisse di elasticità trasversale; c_x il centro relativo all'asse X; c_y quello relativo all'asse Y; e $c_{y'}$ quello relativo all'asse Y'.

Sia inoltre: la retta r_T l'antipolare di T; le rette diametrali d_y e d_x quelle coniugate rispettivamente ai diametri paralleli agli assi Y ed X.

I vettori $\Gamma^x \Gamma^y \Gamma^z$ siano le rotazioni che la sezione T di estremità, supposta rigidamente collegata con G, subisce rispettivamente a causa della coppia di asse–momento $(\mu_x^T)'$, della coppia di asse–momento μ_y^T e della forza $(F_z^T)'$.

Le grandezze di tali rotazioni, essendo proporzionali alle grandezze delle sollecitazioni dalle quali sono provocate, possiamo esprimerle mediante le:

$$\Gamma^x = -(\mu_x^T)' \cdot R^x \qquad \Gamma^y = -\mu_y^T \cdot R^y \qquad \Gamma^z = -(F_z^T)' \cdot R^z$$

ove R^x, R^y e R^z sono grandezze dipendenti dalle caratteristiche fisico–geometriche dell'asta in esame.

Immaginiamo ora di trasportare lungo i propri assi le $\Gamma^x, \Gamma^y, \Gamma^z$ fino ad incontrare rispettivamente in A, B, C l'asse delle X. Considerati tali punti come di applicazione dei vettori Γ decomponiamoli ivi, indicandone con

$$\begin{cases} \Gamma^x_x = -(\mu^T_x)' \cdot R^x_x \\ \Gamma^x_y = +(\mu^T_x)' \cdot R^x_y \end{cases} \qquad \begin{cases} \Gamma^y_x = +\mu^T_y \cdot R^y_x \\ \Gamma^y_y = -\mu^T_y \cdot R^y_y \end{cases} \qquad \begin{cases} \Gamma^z_x = -(F^T_z)' \cdot R^z_x \\ \Gamma^z_y = -(F^T_z)' \cdot R^z_y \end{cases}$$

le rispettive componenti secondo gli assi XY.

Le $\Gamma^x_x, \Gamma^y_x, \Gamma^z_x$ in quanto disposte secondo l'asse delle X e quindi passanti per T, non provocano spostamenti lineari di T; mentre, quelli dovuti alle Γ^x_y, Γ^y_y e Γ^z_y sono rispettivamente:

$$\delta^x_z = -x'_x \cdot \Gamma^x_y = -(\mu^T_x)' \cdot x'_x \cdot R^x_y$$

$$\delta^y_z = -x'_{y'} \cdot \Gamma^y_y = +\mu^T_y \cdot x'_{y'} \cdot R^y_y$$

$$\delta^z_z = -x'_{xy'} \cdot \Gamma^z_y = +(F^T_z) \cdot x'_{xy} \cdot R^z_y.$$

Ora, a causa del noto principio di reciprocità degli spostamenti derivato dal teorema del Betti dovrà essere:

lo spostamento lineare di T a causa di $(\mu^T_x)' = 1$ uguale alla rotazione intorno all'asse X a causa di $(F^T_z)' = 1$;

lo spostamento lineare di T a causa di $\mu^T_y = 1$ uguale alla rotazione intorno all'asse Y a causa di $(F^T_z)' = 1$;

la rotazione di T intorno all'asse Y a causa di $(\mu^T_x)' = 1$ uguale alla rotazione intorno all'asse X a causa di $\mu^T_y = 1$.

Quindi dovrà essere

$$x'_x \cdot R^x_y = R^z_x \qquad x'_{y'} \cdot R^y_y = -R^z_y \qquad R^x_y = R^y_x.$$

Cioè a dire: « Le componenti secondo gli assi X ed Y della rotazione della sezione terminale a causa di $(F^T_z)' = 1$, intorno all'antipolare di T, sono uguali agli spostamenti lineari secondo l'asse Z dovuti alle componenti secondo l'asse Y, rispettivamente della rotazione a causa di $(\mu^T_x)' = 1$, trasportata in A, e di quella a causa di $\mu^T_y = 1$ trasportata in B ».

Cosicchè le precedenti espressioni delle deformazioni potranno essere così scritte e raggruppate:

$$\begin{cases} \Gamma^x_x = -(\mu^T_x)' \cdot R^x_x \\ \Gamma^x_y = +(\mu^T_x)' \cdot R^x_y \\ \delta^x_z = -(\mu^T_x)' \cdot x'_x \cdot R^x_y \end{cases} \qquad \begin{cases} \Gamma^y_x = +\mu^T_y \cdot R^y_x \\ \Gamma^y_y = -\mu^T_y \cdot R^y_y \\ \delta^y_z = +\mu^T_y \cdot x'_{y'} \cdot R^y_y \end{cases} \qquad \begin{cases} \Gamma^z_x = -(F^T_z)' \cdot x'_x \cdot R^x_y \\ \Gamma^z_y = +(F^T_z)' \cdot x'_{y'} \cdot R^y_y \\ \delta^z_z = -(F^T_z)' \cdot x'_{xy'} \cdot x'_{y'} R^y_y. \end{cases}$$

3. Facciamo ora la seguente osservazione:

la retta diametrale r_d uscente da T interseca la conica centrale nei punti I_1, I_2 e la retta antipolare di T nel punto E, del quale E' è il simmetrico rispetto a G.

I punti $T\, I_1\, E'\, I_2$ nell'antipolarità piana di cui l'ellisse di elasticità trasversale costituisce la conica centrale, formano un gruppo armonico di cui sono: $I_1\, I_2$ la coppia di punti coniugati e simmetrici ed $E'\, T$ una coppia di punti coniugati. Se immaginiamo di proiettare tale gruppo dal punto all'infinito della r_T, qualunque retta che intersechi tale fascio proiettivo presenta nei suoi punti di intersezione con le rette stesse del fascio un altro gruppo armonico uguale al primo. In particolare la retta TO presenterà nei suoi punti $T\, I'_1\, C'\, I'_2$ un gruppo armonico nel quale i punti $C'\, T$ sono coniugati e $C\, T$ anticoniugati.

Quindi, come le espressioni:

$$x'_x \cdot R^x_y = S^T \cdot (R^x_y) = S^T \cdot (R^x) \qquad x'_y \cdot R^y_y = S^T \cdot (R^y_y) = S^T \cdot (R^y)$$

rappresentano i momenti statici dei vettori R^x e R^y rispetto a T (che indicheremo, per semplicità simbolica, con S^T_x ed S^T_y); l'espressione:

$$x'_{xy'} \cdot x'_{y'} \cdot R^y_y = x'_{xy'} \cdot S^T \cdot (R^y_y) = S^T \cdot (R^z) = \mathfrak{J}^T \cdot (R^y_y)$$

rappresenterà indifferentemente il momento statico del vettore R^z o il momento d'inerzia del vettore R^y_y rispetto a T (che indicheremo per semplicità con $\mathfrak{J}^T$).

Per quello che potrà interessarci in seguito, riportiamo le relazioni che legano i valori delle grandezze R e dei loro momenti di I° e II° grado rispetto ad O e T, tenendo presente che:

$$x_{y'} - x'_{y'} = l \qquad x_x - x'_x = l \qquad x_{xy'} - x'_{xy'} = l \qquad x_{xy} - x'_{xy} = l$$

$$(1) \quad \begin{cases} l \cdot R^x_y + S^T_x = R^x_y \cdot l + R^x_y \cdot x'_x = R^x_y \cdot (l + x'_x) = R^x_y \cdot x_x = S^O_x \\ l \cdot R^y_y + S^T_y = R^y_y \cdot l + R^y_y \cdot x'_{y'} = R^y_y \cdot (l + x'_{y'}) = R^y_y \cdot x_{y'} = S^O_y \\ l \cdot S^T_y + \mathfrak{J}^T = S^T_y \cdot l + S^T_y \cdot x'_{xy} = S^T_y \cdot (l + x'_{xy'}) = S^T_y \cdot x_{xy'} = \mathfrak{J}^{OT} \\ l \cdot S^O_y + \mathfrak{J}^{OT} = S^O_y \cdot l + S^O_y \cdot x'_{xy} = S^O_y \cdot (l + x'_{xy}) = S^O_y \cdot x_{xy} = \mathfrak{J}^O. \end{cases}$$

4. Supponiamo ora che una serie di forze esterne di linea perpendicolare al piano π comunque disposte, la risultante delle quali indicheremo con F_z, solleciti direttamente o indirettamente l'asta, in modo che la sua sezione terminale T subisca una rotazione $\mathfrak{R}^T$ (le componenti della quale secondo gli assi X ed Y siano rispettivamente $\mathfrak{R}^T_x$ e $\mathfrak{R}^T_y$), ed uno spostamento lineare Δ^T_z secondo la direzione dell'asse Z. Tali spostamenti vengano assunti tutti positivi.

Supponiamo inoltre che a seguito di tutte le azioni sollecitanti l'asta il vincolo d'incastro perfetto nella sezione di estremità O non sia più in grado di mantenersi tale; ma la sezione stessa O subisca un cedimento angolare $(\varphi^O_y)'$, che riterremo positivo, intorno all'asse Y.

A questa rotazione $(\varphi^O_y)'$ parteciperà ovviamente anche la sezione terminale T e per di più questa subirà uno spostamento lineare $(\varphi^O_y)' \cdot l$ di direzione Z.

Le componenti della deformazione complessiva della sezione terminale T risulteranno quindi:

$$\begin{cases} \rho_x^T = -(\mu_x^T)' \cdot R_x^x + \mu_y^T \cdot R_y^x - (F_z^T)' \cdot S_x^T + \mathfrak{R}_x^T \\ (\rho_y^T)' = +(\mu_x^T)' \cdot R_y^x - \mu_y^T \cdot R_y^y + (F_z^T)' \cdot S_y^T + (\rho_y^0)' + \mathfrak{R}_y^T \\ \delta_z^T = -(\mu_x^T)' \cdot S_x^T + \mu_y^T \cdot S_y^T - (F_z^T)' \cdot \mathfrak{I}^T + (\rho_y^0)' \cdot l + \Delta_z^T. \end{cases}$$

Se ora poniamo la condizione che il momento di asse Y nella sezione O, dovuto sia ai carichi esterni applicati, M_y^0, che alle μ_y^T, $(F_z^T)'$, e cioè:

$$\mathfrak{M}_y^0 = -(F_z^T)' \cdot l - \mu_y^T + M_y^0$$

sia nullo, il valore della $(F_z^T)'$ risulterà dover essere:

$$(2) \quad (F_z^T)' = -\frac{\mu_y^T}{l} + \frac{M_y^0}{l} \qquad \text{mentre} \qquad (3) \quad (F_z^0)'' = (F_z^T)' - F_z$$

Per cui sostituendo nelle precedenti a $(F_z^T)'$ il valore trovato, si ha:

$$\begin{cases} \rho_x^T = -(\mu_x^T)' \cdot R_x^x + \mu_y^T \left(R_y^x + \frac{S_x^T}{l} \right) - M_y^0 \cdot \frac{S_x^T}{l} + \mathfrak{R}_x^T \\ (\rho_y^T)' = +(\mu_x^T)' \cdot R_y^x - \mu_y^T \left(R_y^y + \frac{S_y^T}{l} \right) + M_y^0 \cdot \frac{S_y^T}{l} + (\rho_y^0)' + \mathfrak{R}_y^T \\ \delta_z^T = -(\mu_x^T)' \cdot S_x^T + \mu_y^T \left(S_y^T + \frac{\mathfrak{I}^T}{l} \right) - M_y^0 \cdot \frac{\mathfrak{I}^T}{l} + (\rho_y^0)' \cdot l + \Delta_z^T. \end{cases}$$

Ponendo ora:

$$(4) \quad a = \mathfrak{R}_x^T - M_y^0 \cdot \frac{S_x^T}{l} \qquad b = \mathfrak{R}_y^T + M_y^0 \cdot \frac{S_y^T}{l} \qquad c = \Delta_z^T - M_y^0 \cdot \frac{\mathfrak{I}^T}{l}$$

e ricordando le (1) avremo:

$$\begin{cases} \rho_x^T = -(\mu_x^T)' \cdot R_x^x + \mu_y^T \cdot \frac{S_x^0}{l} + a \\ (\rho_y^T)' = +(\mu_y^T)' \cdot R_y^x - \mu_y^T \cdot \frac{S_y^0}{l} + (\rho_y^0)' + b \\ \delta_z^T = -(\mu_x^T)' \cdot S_x^T + \mu_y^T \cdot \frac{\mathfrak{I}^{0T}}{l} + (\rho_y^0)' \cdot l + c \end{cases}$$

dalla prima delle quali ricaviamo:

$$(5) \quad (\mu_x^T)' = -\rho_x^T \frac{1}{R_x^x} + \mu_y^T \cdot \frac{S_x^0}{l R_x^x} + \frac{a}{R_x^x} \qquad \text{mentre} \quad (\mu_x^0)'' = (\mu_x^T)' - M_x^0$$

M_x^0 essendo il momento di asse X nella sezione O dovuto ai carichi esterni.

Ponendo nelle due rimanenti:

$$(6) \quad \beta = (\mu_x^T)' \cdot R_y^x - \mu_y^T \cdot \frac{S_y^0}{l} + b \qquad (7) \quad \varepsilon = -(\mu_x^T)' \cdot S_x^T + \mu_y^T \cdot \frac{\mathfrak{I}^{0T}}{l} - \delta_z^T + c$$

avremo:

$$(\rho_y^T)' - (\rho_y^O)' = \beta \qquad\qquad (\rho_y^O)' \cdot l = \varepsilon$$

dalle quali:

(8) $\quad (\rho_y^O)' = -\frac{\varepsilon}{l}$ $\qquad$ (9) $\quad (\rho_y^T)' = \frac{1}{l}(l\beta - \varepsilon).$

5. Consideriamo ora l'asta incastrata in T e libera in O nella quale sezione sieno applicate la $(\mu_x^O)'$, la μ_y^O e la $(F_z^O)'$.

Poichè la posizione dei centri relativi agli assi X, Y ed Y' non muta, la direzione delle rotazioni dovute a $(\mu_x^O)'$ e μ_y^O è la stessa della precedente ipotesi (O incastrata e T libera); se ne inverte solo il verso e la grandezza in dipendenza della inversione del senso e del variare della grandezza di $(\mu_x^O)'$ e μ_y^O nei confronti di $(\mu_x^T)'$ e μ_y^T. Cambierà invece la direzione dell'antipolare rispetto a O, che sarà ora la congiungente i centri relativi agli assi X e Y.

Per cui, ripetendo un ragionamento analogo al precedente, ma essendo ora $(\rho_y^T)''$ il cedimento angolare supposto all'estremo T e l'asta scarica, si ha:

$$\begin{cases} \rho_x^O = +(\mu_x^O)' \cdot R_x^x - \mu_y^O \cdot R_y^x + (F_z^O)' \cdot S_x^O \\ (\rho_y^O)'' = -(\mu_x^O)' \cdot R_y^x + \mu_y^O \cdot R_y^y - (F_z^O)' \cdot S_y^O + (\rho_y^T)'' \\ \delta_z^O = +(\mu_x^O)' \cdot S_x^O - \mu_y^O \cdot S_y^O + (F_z^O)' \cdot \vartheta^O - (\rho_y^T)'' \cdot l. \end{cases}$$

Ponendo, anche qui, la condizione che il momento nella sezione T, intorno ad Y' risulti nullo, cioè che sia:

(10) $\quad (F_z^O) = \frac{1}{l}\mu_y^O$ $\qquad$ e quindi $\qquad$ (11) $\quad (F_z^T)'' = (F_z^O)'$

sostituendo nelle precedenti alla $(F_z^O)'$ il valore trovato, ricordando le (1), si ha:

$$\begin{cases} \rho_x^O = +(\mu_x^O)' \cdot R_x^x + \mu_y^O \cdot \frac{S_x^T}{l} \\ (\rho_y^O)'' = -(\mu_x^O) \cdot R_y^x - \mu_y^O \cdot \frac{S_y^T}{l} + (\rho_y^T)'' \\ \delta_z^O = +(\mu_x^O) \cdot S_x^O + \mu_y^O \cdot \frac{\vartheta^{OT}}{l} - (\rho_y^T)'' \cdot l. \end{cases}$$

Dalla prima delle quali ricaviamo:

(12) $\quad (\mu_x^O)' = \rho_x^O \frac{1}{R_x^x} - \mu_y^O \cdot \frac{S_x^T}{l R_x^x}$ $\qquad$ mentre $(\mu_x^O)'' = (\mu_x^O)'$.

Dalla seconda e terza, ponendo:

(13) $\quad \beta' = -(\mu_x^O)' \cdot R_y^x - \mu_o^y \cdot \frac{S_y^T}{l}$ $\qquad$ (14) $\quad \varepsilon' = -\delta_z^O + (\mu_x^O)' \cdot S_x^O + \mu_y^O \cdot \frac{\vartheta^{OT}}{l}$

si avrà: $\quad (\rho_y^O)'' - (\rho_y^T)'' = \beta' \qquad (\rho_y^T)'' \cdot l = \varepsilon'$ $\quad$ da cui:

(15) $\quad (\rho_y^T)'' = \frac{\varepsilon'}{l}$ $\qquad$ (16) $\quad (\rho_y^O)'' = \frac{1}{l}(l \cdot \beta' + \varepsilon').$

Chimica biologica. — *Determinazione dell'attività perossidasica nei vegetali* (*). Nota di GIOVANNI PETROSINI, presentata (**) dal Socio F. GIORDANI.

È nota la diffusione delle perossidasi nel mondo vivente. È pure nota la importanza che alle perossidasi viene attribuita nel decorso del metabolismo vegetale. Si capisce quindi la ragione per la quale era stata sempre sentita, nel campo della biochimica, la necessità di metodi atti a determinarne l'attività.

Già nel 1873 Struve (1) aveva accennato alla possibilità che si potesse ricorrere, per commisurare l'attività di una perossidasi, agli effetti che la perossidasi medesima esplica sul pirogallolo.

Al pirogallolo si riportano pure, a distanza di un trentennio, Bach e Chodat (2) nel 1903.

Chi però, attraverso l'ossidazione del pirogallolo, riuscì alla elaborazione di un metodo che permette determinazioni di alta attendibilità è stato Willstätter (3) nel 1918. Perciò il metodo al pirogallolo è andato sempre sotto il titolo di metodo Willstätter, per quanto l'Autore stesso abbia in seguito proposto delle modificazioni rispetto alla laboriosità del metodo originale, modificazioni consistenti, fra l'altro, nella sostituzione del pirogallolo con verde malachite (Willstätter e Weber) (4) e nella riduzione dei volumi di liquidi da maneggiare.

Questo dopo che altri Autori, sempre per rendere più maneggevoli le operazioni del metodo, avevano proposto la sostituzione del pirogallolo chi con guaiacolo (Bach e Zubkow) (5), chi con p–fenilen diammina e naftolo (v. Gutrie) (6), chi con benzidina (Reuter e Willstaedt) (7). Ulteriormente, ma molto più di recente, è stata proposta anche l'o–fenilen–diammina (Wallerstein e Collaboratori) (8).

Successivi Autori, nell'intento di sottrarre queste determinazioni alle esigenze delle determinazioni per via colorimetrica, hanno fatto ricorso ad altri metodi ritenuti di maggiore semplicità di esecuzione: potenziometrici (metodo dell'idrochinone di Sitharaman e Rengachari (9), nel quale metodo veniva introdotto l'impiego della catalasi estratta dal rene di bue per eliminare l'acqua ossigenata residua all'atto della misura potenziometrica); manometrici (Ettori) (10), che determina

(*) Lavoro eseguito nella Facoltà di Agraria (Università di Napoli).

(**) Nella seduta del 12 maggio 1951.

(1) H. STRUVE, «Lieb. Ann.»; *163*, 160 (1873).

(2) A. BACH, R. CHODAT, «Ber. Deut. Chem. Ges.», *36*, 600 (1903).

(3) R. WILLSTÄTTER, «Lieb. Ann.», *416*, 21 (1918).

(4) R. WILLSTÄTTER e H. WEBER, «Lieb. Ann.», *449*, 156 (1926).

(5) A. BACH, S. ZUBKOW, «Biochem. Z.», *125*, 283 (1921).

(6) J. D. VON GUTRIE, «Jour. Am. Chem. Soc.», *53*, 242 (1931).

(7) F. REUTER e H. WILLSTAEDT, «Biochem. Z.», *245*, 290 (1932).

(8) J. S. WALLERSTEIN, R. T. ALBA, M. G. HALE e H. LEVY, «Biophis. Acta», *1*, 327 (1947).

(9) M. V. SITHARAMAN e S. RENGACHARI, «Jour. Indian Chem. Soc.», *14*, 278 (1937), «Ref. Chem. Ztbl.», *11*, 4053 (1937).

(10) ETTORI, «Biochem. J.», *44*, 35 (1949).

l'anidride carbonica liberata dalla ossidazione del pirogallolo mediante un apparecchio Brinkman; titrimetrici (Smirnow)[11], Wolff e Stoecklin[12] modificato da Khun e Braun[13].

Come è facile capire, quelli capaci di portare a più sostanziali semplificazioni di operazioni sarebbero i metodi titrimetrici, sia perchè potrebbero permettere titolazioni dirette, sia perchè non richiedono speciali apparecchiature. Ma nel caso specifico vanno incontro alla difficoltà che risiede nel dover titolare il substrato ossidato in presenza di acqua ossigenata.

Tale difficoltà non si verificherebbe per il metodo di Wolff e Stoecklin modificato da Khun e Braun, perchè con questo metodo l'iodo liberato dal ioduro potassico, in presenza di acqua ossigenata e perossidasi, viene titolato con tiosolfato. Ma Jayle[14] ha fatto osservare che sia l'iodio che il tiosolfato sono capaci di esercitare azione inibitrice sull'attività funzionale delle perossidasi.

Smirnow invece provoca una più abbondante formazione di purpurogallina col prolungare l'ossidazione del pirogallolo per 20 ore; quindi opera la filtrazione e il lavaggio della purpurogallina medesima, che sottopone a titolazione con permanganato. Ma questo metodo va incontro ad un altro inconveniente, in quanto solo per alcuni vegetali come per esempio il grano provato dall'Autore ed i tralci di vite provati da noi, fornisce un precipitato di purpurogallina di assoluta purezza e di facile filtrazione.

Occorreva quindi un altro substrato che, accanto alla sua specificità, da circostanziare in ordine alle condizioni analitiche, offrisse il vantaggio di poter venire sottoposto a titolazione direttamente e in presenza di acqua ossigenata.

L'opportunità di una simile semplificazione ed eventualmente la possibilità di modificazioni di metodo, dopo le proposte degli Autori qui sopra ricordati, oltre che del Willstätter stesso, si delineò alla nostra attenzione durante le nostre ricerche sulla vitaminologia meridionale, essendocisi presentata la necessità di addentrarci, con operazioni condotte in serie, sopra prodotti facilmente deperibili, sui rapporti fra contenuto vitaminico dei tessuti vegetali e loro attività perossidasica.

Ci accorgemmo che poteva servire allo scopo lo stesso 2–6–diclorofenolindofenolo che viene impiegato nelle determinazioni dell'acido ascorbico o, meglio, la sua leucobase, quando avessero avuto a verificarsi le seguenti due condizioni:

1° esistenza di una proporzionalità diretta fra ossidazione delle leucobase e attività perossidasica;

2° possibilità di titolare in presenza di acqua ossigenata con acido ascorbico il 2–6–diclorofenolindofenolo ripristinato per ossidazione della leucobase.

Ciò era da presumere data l'enorme differenza di affinità che l'acido ascorbico ha verso il 2–6–diclorofenolindofenolo che non rispetto all'acqua ossigenata. La verifica sperimentale di questi due presupposti riuscì facile attraverso prove in

(11) Smirnow, «J. Biochem. Z.», *155*, 1 (1925).

(12) J. Wolff e E. Stoecklin, «Ann. Inst. Pasteur», *1*, 313 (1911).

(13) R. Khun e L. Braun, «Ber. D. Chem. Ges.», *59*, 2370 (1926); «Ztschr. für Physiol. Chem.», *157*, 164 (1926); *192*, 45 (1927).

(14) M. F. Jayle, «Bull. Soc. Chim. Biol.», *21*, 14 (1939).

bianco, nel corso delle quali, come del resto non poteva essere altrimenti, affiorò la necessità di circostanziare le condizioni analitiche allo scopo di condensarle in un metodo di pratica e spedita esecuzione.

I fattori presi sperimentalmente in esame sono stati: concentrazione dell'enzima, concentrazione dell'acqua ossigenata, concentrazione idrogenionica, temperatura, a parte la preparazione della leucobase che abbiamo trovato conveniente di apprestare volta per volta per ogni determinazione.

All'uopo noi preleviamo da una microburetta 2 c. c. di una soluzione corrispondente esattamente a 1 mg. di acido ascorbico per c. c. e vi facciamo arrivare goccia a goccia mediante un'altra microburetta, fino al punto di viraggio, una soluzione di 2-6-diclorofenolindofenolo preparato sciogliendo 100 mg. del reattivo in 100 c. c. di acqua distillata e opportunamente filtrando prima dell'impiego. Insomma come nelle comuni titolazioni di acido ascorbico in vitaminologia. In tal modo disponiamo di una quantità di leucobase stechiometricamente corrispondente a 2 mg. di acido ascorbico che, insieme con l'acqua ossigenata, rappresenta il substrato su cui facciamo agire l'enzima.

La quantità di leucobase ossidata per l'attività della perossidasi sull'acqua ossigenata viene titolata con acido ascorbico, l'attività perossidasica viene espressa in milligrammi di acido ascorbico.

EFFETTO DELLA CONCENTRAZIONE DELL'ENZIMA. – Per la verifica sperimentale della validità dei principî che informano l'elaborazione del metodo, occorreva innanzi tutto indagare se ed entro quali limiti corresse proporzionalità diretta fra concentrazione enzimatica e quantità di leucobase ossidata. Per questa prova siamo partiti da un estratto di ravanello preparato mediante triturazione del vegetale in mortaio di porcellana con sabbia silicea, e portando al volume con acqua distillata. L'estratto, addizionato di pochi c. c. di etere, veniva lasciato per 24 ore esposto all'aria. Tale operazione era necessaria per eliminare qualsiasi influenza delle sostanze riducenti e, principalmente, nel nostro caso dell'acido ascorbico [15]. Si capisce che prima delle misure veniva bene accertato se l'estratto avesse perduto ogni potere riducente al 2-6 diclorofenolindofenolo.

Ciò accertato, quantità crescenti di estratto venivano trattate per un minuto con quantità costanti di leucobase, preparata come sopra è stato detto, e di acqua ossigenata (3,5 c. c. al 0,3 %).

La durata del contatto veniva limitata ad un minuto, perchè saggi preliminari ci avevano dimostrato che un minuto era sufficiente a provocare l'ossidazione di quantità ben apprezzabile di leucobase.

Per il bloccaggio della reazione, alla fine del minuto, veniva impiegato un c. c. di acido solforico 1 : 2 che faceva cadere il pH a valori ai quali l'attività enzimatica rimaneva completamente inibita. Avendo voluto controllare che, anche dopo la inibizione, e quindi anche in assenza di azione enzimatica, non si avessero reazioni parallele decorrenti fra leucobase e acqua ossigenata, ci siamo serviti di misure di trasmissione eseguite con lo spettrofotometro di Coleman ed abbiamo

(15) G. PETROSINI e T. ESCHENA, *Quaderni della Nutrizione*, 10 (1948).

potuto osservare che durante il tempo di pochi secondi, che si riteneva sufficiente a portare a termine la titolazione, si aveva diminuzione di trasmissione del tutto trascurabile. L'esistenza di questa lieve diminuizione di trasmissione faceva pensare che fosse opportuno affiancare la determinazione con una prova in bianco, per tener conto della influenza che può esercitare una reazione parallela nell'intervallo di un minuto, prescelto per la durata d'azione dell'enzima. I valori ricavati sono riportati nella fig. 1.

Risulta così che, nei limiti degli errori sperimentali, ed entro il campo delle concentrazioni esplorato, esista una relazione lineare diretta fra concentrazione dell'enzima e quantità di leucobase ossidata e che l'ordinata corrispondente alla concentrazione nulla dell'enzima è di 0,3 milligrammi di acido ascorbico, valore corrispondente alla media dei risultati della prova in bianco.

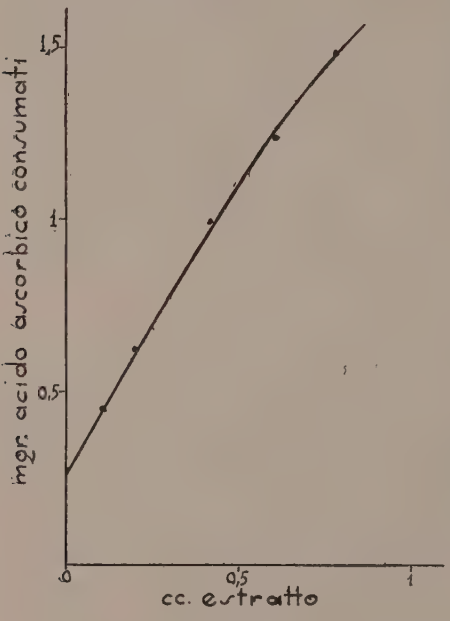


Fig. 1.

Influenza della concentrazione dell'acqua ossigenata. – In questo altro gruppo di prove, nelle quali rimanevano costanti la quantità di estratto adoperato e la quantità di leucobase, si facevano invece variare le quantità di acqua ossigenata. Si è ricavato così una curva che riproduceva il noto andamento della influenza della concentrazione dell'acqua ossigenata sulle reazioni perossidasiche.

In base a questi risultati abbiamo prescelto la concentrazione di 10 mg. di acqua ossigenata in 20 c. c., concentrazione che è prossima a quella corrispondente al valore massimo raggiungibile.

Influenza del pH. – In queste prove, mantenendo costante la concentrazione dell'enzima e dell'acqua ossigenata, si faceva variare la concentrazione idrogenionica dei tamponi adoperati.

Dal seguente grafico risulta che l'attività perossidasica è sensibilmente proporzionale al pH nell'intervallo tra 2,39 e 6,09.

Per comodità di operazioni abbiamo scelto pH = 4,62 corrispondente al tampone di Michaelis che è il più facile da preparare e assicura la massima precisione (*).

(*) Il tampone di Michaelis si prepara agevolmente nel seguente modo: si neutralizzano 100 c. c. di acido acetico circa normale con idrossido di sodio in presenza di fenolftalina. Si aggiungono 100 c. c. dell'acido acetico prima adoperato e si porta ad un litro.

Tutte le predette prove sono state eseguite alla temperatura di 20°, prescelta anche come temperatura del saggio, essendo possibile, con facili precauzioni, di mantenerla costante anche durante le manipolazioni eseguite fuori del termostato.

Arrivati in possesso degli elementi essenziali per inquadrare il metodo analitico, ecco come ne può essere esposta in tutti i suoi particolari la sistematica.

Secondo il presumibile contenuto in perossidasi dei tessuti vegetali da esaminare, da due a 20 grammi di sostanza fresca si triturano in mortaio di por-

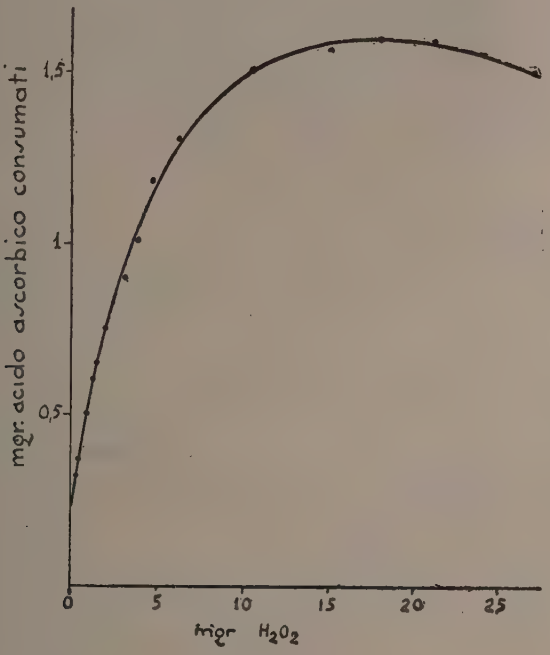


Fig. 2.

cellana con quarzo lavato e calcinato e si porta con acqua in un pallone da 200. (Se l'estratto acquoso risulta acido si neutralizza con idrossido di sodio alla tocca al tornasole allo scopo di favorire l'ossidazione all'aria delle sostanze riducenti e particolarmente dell'acido ascorbico). Si aggiungono 2 o 3 c. c. di etere etilico, si agita, e si porta a volume. Si lascia in riposo fino a che l'estratto non presenta più potere riducente al 2–6–diclorofenolindofenolo. Si filtra per carta.

In una beutina da 100 c. c. si introduce tanto tampone acetico a pH 4,62 quanto necessario per raggiungere 20 c. c. insieme con altri reattivi da adoperare. Si addizionano 2 c. c. di una soluzione di acido ascorbico a 100 mg °/₀ esattamente preparata, e si lascia gocciolare da una microburetta la soluzione al 2–6–diclorofenolindofenolo fino al viraggio. Preparata così la leucobase, si porta a 20° gradi mediante immersione della beutina in bagno d'acqua e si aggiungono

da 0,5 a 1,5 c. c.(*) di estratto e una quantità di soluzione di acqua ossigenata corrispondente a 10 mg. Dopo un minuto esatto si interrompe il decorso del processo enzimatico mediante l'aggiunta di un c. c. di acido solforico 1 : 2. La

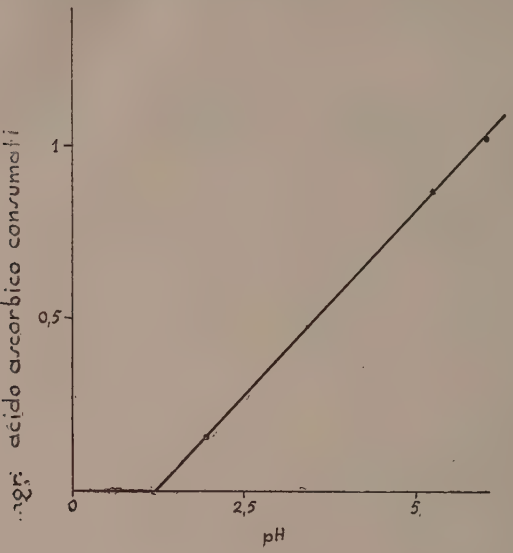


Fig. 3.

quantità di colorante formatasi, si titola con la soluzione di acido ascorbico a mezzo di una microburetta. Si esegue parallelamente una prova in bianco, senza cioè l'aggiunta dell'estratto vegetale.

Natura del vegetale	su 100 g. di vegetale fresco		mg. acido asc. / mg. P.
	mg. purpurogal.	mg. acido asc.	
Limone	55,00	1028	18,7
Aglio	44,23	805	18,2
Ravanello	260,00	4919	18,8
Granturco	20,00	368	18,3
Grano	250,00	4725	18,9
		Media . . .	18,6

La differenza fra i mg. di acido ascorbico consumati nella titolazione e quelli richiesti nella prova in bianco, riportata a 100 grammi di vegetale fresco, fornisce

(*) La scelta della quantità di estratto da sottoporre alla prova viene fatta in modo da ricadere sempre nel tratto sensibilmente rettilineo della figura 1.

un indice (espresso in milligrammi di acido ascorbico), proporzionale alla attività perossidasica della sostanza vegetale in esame.

Converrà ora indagare quali rapporti corrano fra i risultati ottenuti con questo nostro metodo al 2-6-diclorofenolindofenolo, espresso in mg. di acido ascorbico, e quelli che si ottengono col metodo originale di Willstätter al pirogallolo, espressi in mg. di purpurogallina.

Abbiamo all'uopo eseguito una serie di prove comparative col nostro metodo e con quello di Willstätter, adoperando gli estratti di alcuni vegetali. I risultati ottenuti, figurano nella precedente tabella, dove per il metodo di Willstätter sono riportati i prodotti numerici (Menge-Werte-Produkte) relativi a 100 grammi di vegetale fresco, espressi in milligrammi di purpurogallina, e, per il metodo nostro, in milligrammi di acido ascorbico. Nell'ultima colonna della tabella sono riportati i valori dei rapporti fra i numeri ottenuti con i due metodi. I valori differiscono al massimo del 2% dalla media complessiva di 18,6.

Chimica fisica. — *Spettrometria indiretta* (*). Nota di LUIGI SACCONI, presentata (**) dal Socio L. ROLLA.

Lo studio degli equilibri chimici in sistemi omogenei può essere spesso eseguito, come è noto, per via colorimetrica o spettrofotometrica.

Se in un equilibrio del tipo:

$$(1) \qquad pA + qX + \cdots \rightleftarrows pB + rY + \cdots$$

due componenti, ad esempio A e B, manifestano capacità selettive nell'assorbimento dell'energia luminosa, la via spettrometrica permette di conoscere la composizione del sistema rispetto ai due componenti suddetti, e ciò a due condizioni:

1° Deve essere nota la concentrazione stechiometrica totale A + B.

2° Debbono potersi isolare le due sostanze A e B allo scopo:

a) di preparare le due soluzioni limite standard da essere comparate colle soluzioni miscuglio contenenti i componenti A e B nel rapporto incognito c_{i_A}/c_{i_B} (metodo colorimetrico);

b) di determinare le corrispondenti curve di estinzione limite. Infatti, per una data lunghezza d'onda ε_i si avrà allora:

$$c_{i_A}/c_{i_B} = \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_B}{\varepsilon_A - \varepsilon_i}$$

in cui ε_A ed ε_B indicano i valori delle estinzioni limite corrispondenti alle sostanze pure A e B mentre ε_i rappresenta il coefficiente di estinzione misurato sul sistema nello stato di equilibrio *i*.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisica dell'Università di Firenze.

(**) Nella seduta del 14 aprile 1951.

In pratica, non essendo sempre possibile spostare completamente l'equilibrio (1) verso gli estremi, non è sempre possibile, di conseguenza, isolare i due componenti A e B e quindi impiegare i metodi di indagine fotometrici.

I metodi indiretti di colorimetria e spettrofotometria da me proposti [1] hanno appunto lo scopo di permettere lo studio di sistemi del tipo (1) anche nei casi sfavorevoli enunciati.

Si può dimostrare che la condizione necessaria affinchè il problema generale sia risolvibile è la seguente: il rapporto fra le concentrazioni stechiometriche dei

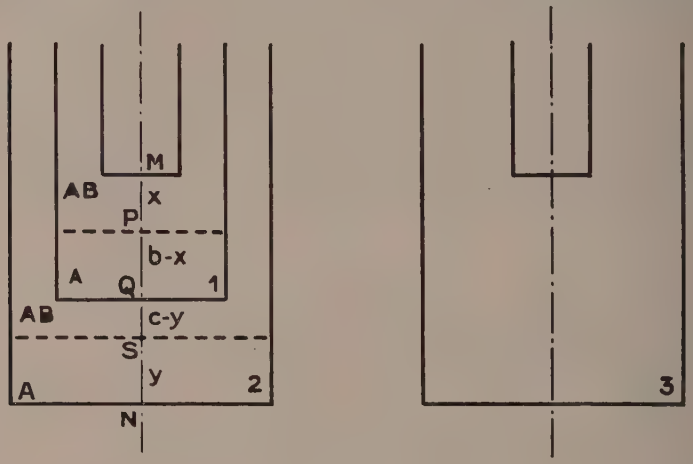


Fig. 1.

due componenti attivi rispetto all'assorbimento della luce deve essere funzione di una variabile a direttamente misurabile o calcolabile in funzione di noti parametri. Si deve cioè avere:

$$c_{i_A}/c_{i_B} = f(a) \qquad (2)$$

in cui f rappresenta una funzione incognita, giacchè altrimenti il valore di c_{i_A}/c_{i_B} potrebbe essere direttamente calcolato in funzione di a.

Nel caso di un equilibrio di dissociazione del tipo $AB \rightleftarrows A + B$ in cui AB ed A siano i componenti attivi nei riguardi dell'assorbimento dell'energia luminosa, una tale condizione è verificata giacchè si ha:

$$c_A/c_{AB} = K\,(1/c_B) \qquad (3)$$

dove K è la costante classica di equilibrio del sistema. In questo caso quindi, anche se è impossibile isolare i due componenti AB ed A, le concentrazioni dei due componenti stessi possono essere determinate per via indiretta insieme al valore di K.

(1) Cfr. L. Sacconi, «Gazz. chim. ital.», *78*, 192, 303 (1948); «Rend. Accad. Lincei», [8], VIII, 376 (1950).

METODO COLORIMETRICO INDIRETTO. - Le condizioni necessarie e sufficienti per la risoluzione del problema sono le seguenti:

a) Possibilità di realizzare tre stati di equilibrio 1, 2, 3 del sistema (nel caso più generale soluzione).

b) Conoscere il valore rispettivamente di $c_{1_B}, c_{2_B} c_{3_B}$ (B = componente otticamente inattivo).

La risoluzione del problema può essere mostrata nella maniera seguente: Si disponga di un colorimetro del tipo di Gillespie [2]. Siano nelle vaschette 1, 2, 3 le tre soluzioni nei corrispondenti stati di equilibrio e le vaschette 1 e 2 siano aggiustate in modo tale che il colore risultante dalla sovrapposizione delle due soluzioni eguagli il colore della soluzione 3 (fig. 1).

Si immagini ora di separare, in ognuna delle vaschette 1 e 2, i due componenti AB ed A con due piani ideali paralleli al fondo delle vaschette e situati in maniera tale da delimitare in ogni vaschetta due zone in cui le rispettive concentrazioni dei componenti AB ed A siano uguali. Precisamente esista nella zona superiore di ogni vaschetta il componente AB e nella zona inferiore il componente A.

Allora, ammesso che sia valida la legge di Beer e posto MQ = b, MP = x, QN = c, SN = y, avremo:

$$(4) \qquad \frac{b-x}{x} = \frac{c_{1_A}}{c_{1_{AB}}} \quad ; \quad \frac{y}{c-y} = \frac{c_{2_A}}{c_{2_{AB}}} \quad ; \quad \frac{b-x+y}{c-y+x} = \frac{c_{3_A}}{c_{3_{AB}}} .$$

Ricordando che il sistema ammette una costante di equilibrio K si può scrivere:

$$(5) \qquad K = \frac{c_{1_B} \cdot c_{1_A}}{c_{1_{AB}}} = \frac{c_{2_B} \cdot c_{2_A}}{c_{2_{AB}}} = \frac{c_{3_B} \cdot c_{3_A}}{c_{3_{AB}}}$$

e sostituendo i valori forniti dalla (4) si ottiene:

$$(6) \qquad K = \frac{c_{1_B} \cdot (b-x)}{x} = \frac{c_{2_B} \cdot y}{c-y} = \frac{c_{3_B}(b-x+y)}{c+x-y} .$$

Le determinazioni colorimetriche ci forniscono i valori di b e di c, e siccome c_{1_B}, c_{2_B} e c_{3_B} sono noti, si ha un sistema di tre equazioni a tre incognite (K, x ed y) pienamente risolvibile. Infatti, ponendo $c_{2_B}/c_{1_B} = h_2$, $c_{3_B}/c_{1_B} = h_3$, si ottiene il sistema:

$$(7a) \qquad \frac{h_2 y}{c-y} = \frac{b-x}{x}$$

$$(7b) \qquad \frac{h_3(b-x+y)}{c+x-y} = \frac{b-x}{x}$$

da cui

$$y = \frac{c(b-x)}{h_2 x + b - x} .$$

(2) J. L. GILLESPIE, « J. Bact. », *6*, 399 (1921); « J. Chem. Soc. », *122*, ii, 157 (1922).

Sostituendo questo valore nella (7 b) si ha:

$$h_3 \frac{b-x+(c\,(b-x))/(h_2 x+b-x)}{c+x-(c\,(b-x))/(h_2 x+b-x)} = \frac{b-x}{x}$$

donde:

$$h_3 \frac{(b-x)(h_2 x+b-x)+c\,(b-x)}{(c-x)(h_2 x+b-x)-c\,(b-x)} = \frac{b-x}{x},$$

$$h_2 h_3 x^2 - h_3 x^2 - h_2 x^2 + x^2 + h_3 bx + h_3 cx - h_2 cx - bx = 0$$

che fornisce la seguente risoluzione:

$$x = \frac{b + h_2 c - h_3 (b+c)}{h_2 h_3 - (h_2 + h_3) + 1}.$$

Noti così x ed y si può quindi conoscere il valore di K e quello dei tre rapporti c_A/c_{AB}, cioè a dire la composizione del sistema.

Nel caso favorevole che uno dei componenti colorati sia isolabile (ad esempio AB) il metodo risulta più semplice. In questo caso basta realizzare due stati di

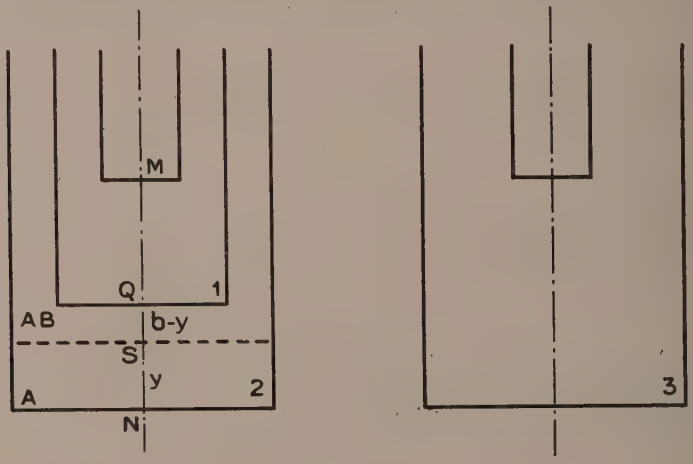


Fig. 2.

equilibrio 2 e 3 del sistema e portare il sistema stesso nello stato limite realizzabile AB. Se le due soluzioni, nei due suddetti stati di equilibrio, si trovano nelle vaschette 2 e 3 (cfr. fig. 2), mentre il sistema nello stato limite AB si trova nella vaschetta 1, con ammissioni analoghe alle precedenti, posto $MN = c$, $QN = b$, $SN = y$, si ha:

(8) $$K = \frac{c_{2_B}\, y}{b-y} = \frac{c_{3_B}\, y}{c-y}.$$

Ponendo $c_{3_B}/c_{2_B} = q$ si ottiene allora:

$$x = \frac{qb-c}{q-1}$$

che, sostituito nelle (8) ci fornisce il valore di K:

$$K = c_{2_B} \frac{qb-c}{c-b}.$$

Nel caso che lo stato limite realizzabile corrisponda al componente A, si può operare in maniera analoga giungendo a formule risolutive corrispondenti.

Il metodo colorimetrico indiretto può essere attuato anche impiegando un colorimetro a cunei del tipo di Bjerrum (3). In tal caso i piani ideali di separazione delle due forme limite nelle vaschette contenenti le due soluzioni limite fittizie originano dai vertivi delle due vaschette a cuneo appaiate.

METODO SPETTROFOTOMETRICO INDIRETTO. – Mediante questo metodo, se nessuno dei due componenti AB ed A è isolabile, la composizione del sistema può essere ugualmente conosciuta.

Per questo è sufficiente, oltre alla realizzazione delle condizioni *a*) e *b*):

c) determinare le tre corrispondenti curve di estinzione e_1 , e_2 , e_3 del sistema nei tre stati 1 , 2 , 3 e in particolare (per una data lunghezza d'onda λ_i)

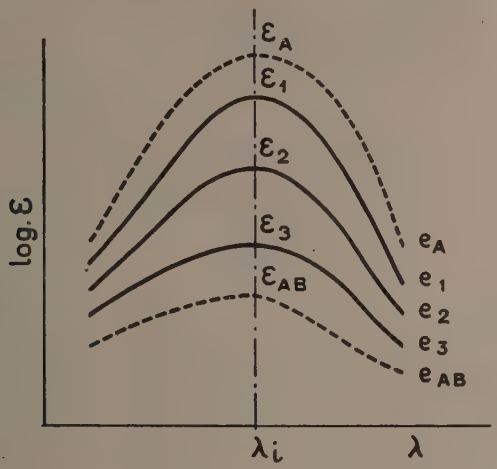


Fig. 3.

i tre corrispondenti valori delle estinzioni ε_1 , ε_2 , ε_3 (estinzioni limite fittizie) (cfr. fig. 3).

In questo caso la (5) si esprime:

$$K = c_{1_B}\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_{AB}}{\varepsilon_A - \varepsilon_1} = c_{2_B}\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_{AB}}{\varepsilon_A - \varepsilon_2} = c_{3_B}\frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_{AB}}{\varepsilon_A - \varepsilon_3} \tag{9}$$

che, ponendo

$$\varepsilon_A - \varepsilon_1 = a \quad , \quad \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = b \quad , \quad \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = c \quad , \quad \varepsilon_3 - \varepsilon_{AB} = d,$$

diviene:

$$K = c_{1_B}\frac{b + c + d}{a} = c_{2_B}\frac{c + d}{a + b} = c_{3_B}\frac{d}{a + b + c} \tag{10}$$

(3) N. BJERRUM, «Z. anal. Chem.», *56*, 81 (1917); I. M. KOLTHOFF, «Rec. trav. chim.», *43*, 144 (1924).

da cui, ponendo $b + c = m$, si ha il sistema:

$$(11\,a) \qquad c_{1_B} d + c_{1_B} m = Ka$$

$$(11\,b) \qquad c_{2_B} d + c_{2_B} c = Ka + Kb$$

$$(11\,c) \qquad c_{3_B} d = Ka + Kc.$$

Sostituendo nella (11 b) il valore di Ka fornito dalla (11 a), si ottiene:

$$(12) \qquad d = \frac{K b - c_{2_B} c + c_{1_B} m}{c_{2_B} - c_{1_B}}.$$

Sostituendo nella (11 c) il valore di K a che si ricava dalla (11 a) si ottiene ancora:

$$c_{3_B} d = c_{1_B} d + c_{1_B} m + Km$$

da cui:

$$(13) \qquad d = \frac{c_{1_B} m + Km}{c_{3_B} - c_{1_B}}.$$

Ponendo $c_{2_B} - c_{1_B} = h_2$, $c_{3_B} - c_{1_B} = h_3$ ed uguagliando la (12) e la (13) si ha:

$$\frac{c_{1_B} m + Km}{h_3} = \frac{Kb - c_{2_B} c + c_{1_B} m}{h_2}$$

e infine:

$$K = \frac{m c_{1_B} (h_2 - h_3) + h_3 c_{2_B} c}{h_3 b - h_2 m}.$$

Come si vede, il valore di K è ora espresso in funzione di grandezze tutte misurabili, non comparendo più nell'espressione le grandezze non misurabili, ε_A ed ε_{AB} ed i loro parametri a e b. Conoscendo così il valore di K si può risalire, attraverso le equazioni (5) ai tre valori di c_A/c_{AB}, cioè alla composizione del sistema, il che appunto era lo scopo del metodo spettrofotometrico indiretto.

Applicazioni. – La validità dei metodi colorimetrici e spettrofotometrici indiretti suggeriti è stata verificata per sistemi in equilibrio costituiti da indicatori acido-base (1). I valori di pK trovati coincidono, entro gli errori sperimentali, con quelli già determinati per la via colorimetrica e spettrofotometrica usuale, mentre l'accuratezza del metodo è risultata dello stesso ordine di grandezza.

I metodi indiretti si adattano molto bene allo studio degli equilibri degli indicatori, giacchè, come è noto, spesso questi equilibri non sono completamente spostabili verso gli estremi a meno di decomposizione delle sostanze, dimodochè, in questi casi, la separazione delle forme limite è irrealizzabile. Altre volte poi, nel caso di viraggi sovrapposti, non esiste mai nel sistema, per un qualsiasi stato di equilibrio, la presenza di una sola forma intermedia che pertanto non risulta isolabile.

Attraverso la determinazione sperimentale dei valori di b, x ed y (metodo colorimetrico indiretto) è stato possibile verificare graficamente il metodo, infatti i valori di x ed y, per un dato valore di pH, nel colorimetro di Bjerrum, risultano

allineati lungo una retta che è appunto la traccia del piano ideale di separazione delle due forme limite previamente ammesso allo scopo di dimostrare il metodo.

Col metodo colorimetrico indiretto sono state determinate le costanti di dissociazione apparenti di due indicatori a viraggio doppio sovrapposto che hanno rivelato interessanti qualità e cioè: l'[α -ammino-benzal] -4-nitrofenilidrazina e il suo 2-metilderivato [4].

Collo stesso metodo indiretto è stato eseguito lo studio del mono- e del 2-6-dinitroidrochinone [5]. A queste due sostanze erano state attribuite tre costanti di dissociazione corrispondenti a tre viraggi. Col metodo indiretto è stata invece accertata l'esistenza di soli due viraggi e le corrispondenti costanti apparenti di dissociazione sono state determinate correggendo così i valori determinati col metodo usuale. Così pure sono stati corretti i valori delle costanti di dissociazione dell'acido alizarin-3-solfonico già determinati coi metodi noti.

In definitiva i metodi indiretti introdotti hanno dimostrato di poter essere impiegati con successo in quei casi in cui, per le ragioni suesposte, i metodi usuali falliscono lo scopo.

Fisiologia. — *Effetti della stimolazione del corpo striato nel piccione* [*]. Nota di XENIA MACHNE, presentata [**] dal Corrisp. G. C. PUPILLI.

I dati sperimentali concernenti le funzioni dello striato negli Uccelli sono scarsi e contrastanti. Nelle linee generali si ammette che i *corpora striata* provvedano alle funzioni più elevate del S. N. C. e adempiano i compiti che nei Mammiferi spettano alla corteccia cerebrale [Ten Cate [1]]. Secondo Rogers [2] e Langworthy [3], l'estirpazione del telencefalo provoca nel piccione disturbi dell'equilibrio e della coordinazione motoria, e una esagerazione del tono dei muscoli estensori degli arti pelvici; van Essen [4] ha confermato l'influenza degli emisferi sul tono e Hunter [5] ha constatato, in esperimenti eseguiti sul gabbiano e sul pollo, una rigidità generale dopo aver estirpato il corpo striato di un solo lato, lasciando integra la corteccia cerebrale.

Lo striato degli Uccelli è suddiviso nelle seguenti parti: *a*) il paleostriato, in cui si distinguono il paleostriato primitivo e il paleostriato aggiunto; *b*) l'archistriato; *c*) il neostriato, di cui un campo laterale e posteriore è denominato da molti autori ectostriato; *d*) l'iperstriato. Le vie di connessione delle diverse

(4) L. SACCONI, « Gazz. chim. ital. », *78*, 674 (1948).
(5) L. SACCONI, « J. Phys. e Colloid Chem. », *54*, 829 (1950).
(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Bologna.
(**) Nella seduta del 14 aprile 1951.
(1) J. TEN CATE, « Ergebn. Biol. », XIII, 93 (1936).
(2) F. T. ROGERS, « J. comp. Neurol. », XXXV, 21 e 61 (1922-23).
(3) O. R. LANGWORTHY, « Amer. J. Physiol. », LXXVIII, 34 (1926).
(4) J. VAN ESSEN, « Z. ges. Neurol. Psychiat. », CXXXV, 510 (1931).
(5) J. I. HUNTER, « Med. J. Australia », I, 86 (1924).

parti dello striato degli Uccelli, sono ampiamente descritte nel trattato di Ariëns Kappers, Huber e Crosby [6], in quello del Beccari [7] e in quello di Ariëns Kappers [8].

Secondo Gerebtzoff [9] la stimolazione faradica del neostriato, nei Mammiferi, inibisce la risposta dell'area masticatrice della corteccia ipsilaterale, e anche quella a carattere epilettico; l'azione si svolgerebbe a livello dei neuroni corticali. Esperimenti di stimolazione faradica [Ferrier [10]] e chimica [Kschischkowski [11]; Martino [12]; Moruzzi [13]] hanno dimostrato che ai lobi ottici degli Uccelli spettano importanti funzioni motorie. Con le presenti ricerche ho inteso indagare quale influsso eserciti il neostriato sulle risposte motorie tettali, negli Uccelli.

Le indagini sono state condotte sul piccione, qualche ora dopo l'asportazione di uno degli emisferi cerebrali, effettuata in narcosi eterica. Su alcuni animali l'esperimento è stato eseguito dopo aver asportato solo una porzione del lobo occipitale di uno degli emisferi: la sezione era fatta secondo un piano formante con la superficie superiore del lobo ottico un angolo di circa 70°, aperto rostralmente, e passante per il solco che separa l'emisfero dal peduncolo cerebrale. Di particolari interventi eseguiti nel corso di alcune esperienze, dirò nell'esporre i risultati.

Le operazioni descritte non provocano, almeno apparentemente, asimmetrie posturali. Dopo l'intervento operatorio si fissava alla teca cranica, mediante viti, un leggiero supporto per elettrodi, costruito secondo il modello ideato da Hess [14]. Sono stati usati elettrodi d'acciaio, secondo Hess [14]. Gli elettrodi erano collegati con un induttorio a slitta (4 Volt nel circuito primario) graduato in unità Kronecker (U. K.).

In ogni singola esperienza si procedeva come segue. Il lobo ottico, rimasto scoperto in conseguenza dell'ablazione totale o parziale dell'emisfero cerebrale corrispondente, veniva sottoposto al trattamento stricnico locale secondo il metodo del Baglioni e si attendeva la comparsa del tipico clono estensorio delle ali. Ottenuto un clono costante e regolare, si stimolava il *corpus striatum* di un lato e si osservava il comportamento del clono stricnico; quando l'emisfero corrispondente al lobo stricninizzato era stato asportato completamente, veniva stimolato lo striato dell'emisfero contralaterale integro; nei casi in cui si era provveduto soltanto all'ablazione parziale del lobo occipitale, si stimolava il *corpus striatum* dell'emisfero corrispondente.

(6) C. U. Ariëns Kappers, G. C. Huber a. E. C. Crosby, *The comparative anatomy of the nervous system of vertebrates, including man.* New York, The Macmillan Co. (1936).

(7) N. Beccari, *Neurologia comparata.* Firenze, Sansoni (1943).

(8) C. U. Ariëns Kappers, *Anatomie comparée du système nerveux.* Paris, Masson (1947).

(9) M. Gerebtzoff, « Arch. int. Physiol. », LI, 333 (1941).

(10) D. Ferrier, *Die Funktionen des Gehirnes.* Braunschweig (1879).

(11) C. Kschischkowski, « Zbl. Phyiol. », XXV, 557 (1911).

(12) G. Martino, « Arch. Fisiol. », XXIV, 282 (1926).

(13) G. Moruzzi, « Arch. Fisiol. », XLV, 110 (1946).

(14) W. R. Hess, *Die Metodik der lokalisierten Reizung und Ausschaltung subkortikaler Hirnabschnitte.* Leipzig, Thieme (1932).

Comunemente si registravano le scosse cloniche del *M. pectoralis secundus* dello stesso lato del *corpus striatum* stimolato; in alcuni esperimenti è stato registrato anche il clono del muscolo contralaterale.

La sede di stimolazione era determinata con la reazione istochimica del ferro.

I fenomeni che saranno descritti, compaiono durante la stimolazione della parte rostrale del neostriato; la intensità di stimolazione era pari a U. K. 40-60.

La stimolazione del neostriato di un solo emisfero cerebrale esercita un'azione inibitrice sul clono estensorio di tutte e due le ali. Gli effetti si manifestano con una riduzione della frequenza e dell'ampiezza delle scosse cloniche; a volte si è osservata anche la completa scomparsa del clono. I fenomeni si manifestano qualche secondo (da 3 a 10) dopo l'inizio della stimolazione dello striato e scompaiono d'ordinario parecchi secondi, fino a 1 min., dopo la cessazione dello stimolo; eccezionalmente ho osservato la scomparsa dei fenomeni soltanto 2–3 secondi dopo che lo stimolo era cessato. In assenza del clono, la stimolazione della zona responsabile degli effetti ora descritti, non provoca nessuna reazione motoria.

Sono stati eseguiti esperimenti per delimitare ancor meglio gli agglomerati neuronici responsabili dell'inibizione del clono stricnico e a fine d'individuare le vie per le quali gl'impulsi inibitori si trasmettono. Le indagini sono state compiute sul piccione dopo aver asportato l'emisfero cerebrale da un lato e le seguenti strutture dall'altro: l'iperstriato; l'eminenza sagittale, dalla quale proviene la via discendente corticale ossia il fascio cortico–setto–mesencefalico; la porzione laterale de neostriato che è denominata ectostriato; una porzione del lobo occipitale e una parte dell'archistriato. Da quest'ultimo lato era effettuata la stimolazione del neostriato. La parziale ablazione dell'archistriato veniva eseguita esclusivamente per ragioni tecniche, che esporrò nel lavoro *in extenso*. L'azione inibitrice sul clono stricnico delle ali si è osservata anche nelle condizioni ora descritte e con tutte le caratteristiche indicate in precedenza.

Questi risultati permettono in primo luogo di escludere che l'iperstriato sia responsabile degli effetti inibitori sul clono. La presenza dei fenomeni dopo l'ablazione di tutta la porzione del neostriato, dove si originano le fibre del fascio occipito–mesencefalico, dimostra che questo fascio non è indispensabile al prodursi dei fenomeni stessi. È poco verosimile che gl'impulsi inibitori scendano per le scarse fibre strio–tettali che rimangono integre dopo l'ablazione dell'ectostriato; tale opinione è suffragata, come si vedrà poi, dal fatto che l'azione inibitrice non sembra svolgersi al livello tettale. Ho ritenuto perciò che l'azione inibitrice si produca per via indiretta e cioè per l'influenza esercitata dal neostriato sul paleostriato. A favore di una via composta da parecchi neuroni, parla anche la notevole latenza con cui i fenomeni si manifestano.

Nel paleostriato si originano i fasci strio–tegmentale, strio–talamico interno e strio–cerebellare. Ho esaminato l'importanza che ha quest'ultimo fascio, provvedendo a recidere il peduncolo cerebellare superiore di ambo i lati: in tale penducolo, i fasci strio–cerebellare, tetto–cerebellare e spino–cerebellare ventrale si trovano accollati ai fasci cerebello–tegmentale e cerebello–reticolare superiore. L'animale presentava, dopo la recisione dei peduncoli cerebellari superiori, netto ipertono

estensorio: in queste condizioni l'inibizione del clono si è verificata come di norma. Si deduce che il fascio strio-cerebellare non è indispensabile per la produzione del fenomeno; inoltre, che l'azione dello striato sull'attività fasica dei muscoli striati è indipendente dal tono posturale dei medesimi. Sembra dunque che gl'impulsi discendenti dal paleostriato percorrano i fasci strio–tegmentale e strio–talamico interno; a quest'ultimo fascio, che in parte s'incrocia nella commessura anteriore, sarebbe da attribuire la bilateralità degli effetti.

Mi sono chiesta, infine, se le azioni striatali si svolgano a livello dei lobi ottici, livello dove si origina il clono. Ho misurato i valori della soglia faradica per la risposta tettale, durante la stimolazione dello striato, prendendo come indice dell'attività di ogni lobo ottico l'abbassamento della palpebra inferiore dell'occhio contralaterale [Moruzzi [13]; Zanchetti [15]]. Si è visto che la stimolazione dello striato non modifica l'eccitabilità del tetto ottico. Dobbiamo quindi ritenere che l'inibizione striatale avvenga ad un più basso livello d'integrazione delle funzioni motorie, e probabilmente nei centri motori bulbopontini.

Fisiologia. — *L'influenza della differenza di potenziale (D. P.) della cute sul passaggio di acqua attraverso la cute di Rana.* Nota di Vittorio Capraro e Mario Tiengo, presentata [*] dal Corrisp. R. Margaria.

In una Nota precedente [1], in base a dati sperimentali sulle modificazioni del passaggio di acqua attraverso la cute di Rana, in seguito ad acidificazione dell'ambiente interno, si è prospettata l'ipotesi che il passaggio dell'acqua debba considerarsi, almeno in parte, un fenomeno attivo oltre che osmotico, e presumibilmente elettroosmotico e quindi dipendente dalla D. P. della cute.

Un dato di fatto che si accorda con questa ipotesi è anche il seguente: se il passaggio di acqua fosse solo in relazione al gradiente osmotico, la sua entità dovrebbe variare proporzionalmente ad esso; tale passaggio cioè dovrebbe diminuire linearmente con l'aumentare della concentrazione molare di NaCl nell'ambiente esterno, fino ad annullarsi quando la concentrazione dell'ambiente esterno eguaglia quella dell'ambiente interno. Invece il passaggio di acqua attraverso la cute non è funzione lineare della concentrazione (fig. 1).

I dati riportati sono stati ottenuti con cute dorsale di Rana esculenta (ibernante), isolata ed applicata su un piccolo osmometro, con la tecnica già descritta [2], alla temperatura di 28° C ± 1. L'ambiente interno era dato da Ringer con $NaHCO_3$ a pH 7,80 ± 0,05; l'ambiente esterno era dato da una soluzione di NaCl a varia concentrazione molare o da acqua di fonte; in questi esperimenti è l'interno

(15) A. Zanchetti, «Boll. Soc. it. Biol. sper.», XXII, 1175 (1946).

(*) Nella seduta del 14 aprile 1951.

(1) V. Capraro, P. Pennella e M. Tiengo, «Rend. Acc. Naz. Lincei», in corso di stampa.

(2) V. Capraro, «Rend. Acc. Naz. Lincei», vol. IX, fasc. 3-4 (1950).

dell'osmometro che funge da ambiente esterno a differenza degli esperimenti fatti nel lavoro citato.

Anche Huf e collaboratori [3] hanno ottenuto di recente dei dati di trasporto di acqua in condizioni di ambiente esterno a diversa concentrazione, ma non è possibile, a nostro avviso, utilizzare questi dati per il nostro piano di ricerche, essendo le condizioni sperimentali molto diverse nei due casi.

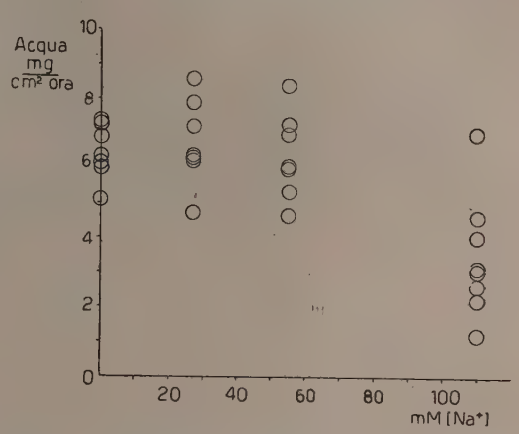


Fig. 1. – Passaggio di acqua (ordinate) in funzione della concentrazione esterna (ascisse).

Il comportamento del passaggio dell'acqua in relazione alla concentrazione dell'ambiente esterno, non sembra neppure essere in relazione con la D. P. della cute. La variazione della D. P. in rapporto alla concentrazione dell'ambiente esterno è rappresentata nella fig 2. I dati riportati sono stati ottenuti disponendo la cute di rana tra due capsule di vetro, dove veniva posta la soluzione di Ringer risp. la soluzione clorosodica o l'acqua; l'apparecchio [4] è simile a quello adoperato da Ussing [5]. La D. P. veniva misurata con un potenziometro a valvola Metrohm; sulla stessa cute si misuravano in successione i potenziali a differente concentrazione esterna di NaCl, sempre alla temperatura di 28° C ± 1. L'ambiente interno era dato da Ringer con $NaHCO_3$ a pH 7,90 ± 0,05, l'ambiente esterno da soluzioni a varia concentrazione molare di NaCl o da acqua di fonte.

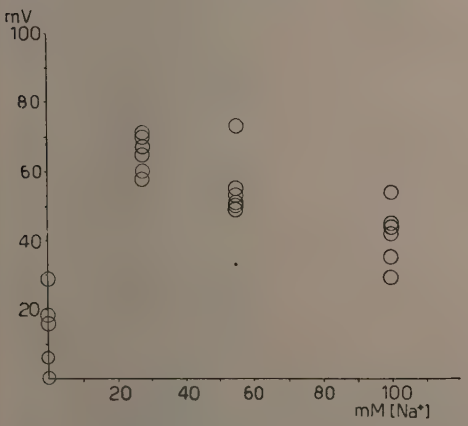


Fig. 2. – Differenza di potenziale della cute (ordinate) in funzione della concentrazione esterna (ascisse).

Dalla considerazione di questi dati ci sembra più verosimile l'ipotesi che il passaggio dell'acqua sia l'effetto della sovrapposizione dei due fattori, quello puramente osmotico e quello elettroosmotico.

Per controllare l'importanza del fattore elettroosmotico e quindi della

(3) E. HUF, J. PARRISH e C. WEATHERFORD, « The Am. J. Physiol. », *164*, 137 (1951).

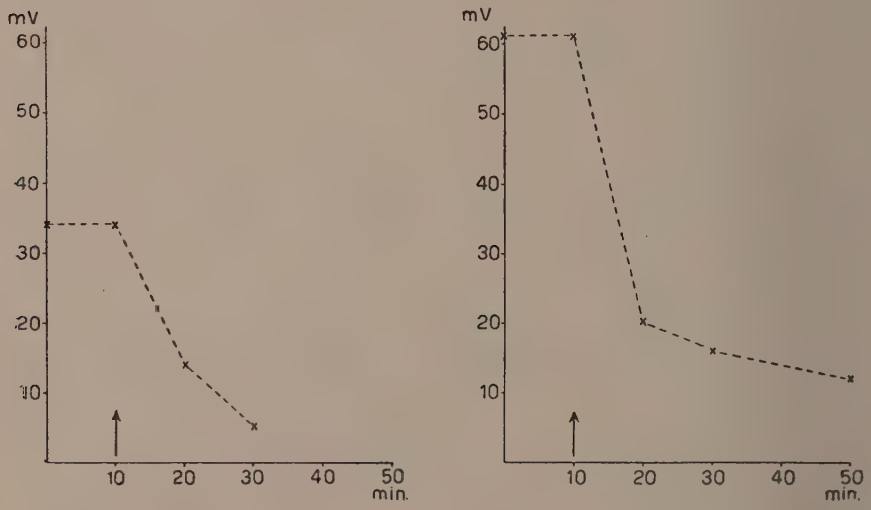
(4) Ci è gradito qui ringraziare la Ditta ing. Terzano & C. che si è molto cortesemente adoperata nel metterci a disposizione il materiale occorrente.

(5) H. H. USSING, « Acta Physiolog. Scand. », vol. 17, fasc. 1 (1949).

D. P. della cute, abbiamo misurato il passaggio di acqua attraverso la cute di rana, aggiungendo all'ambiente interno adrenalina, che ha, come è noto (cfr. Ussing, loc. cit.), l'effetto di deprimere il grado di polarizzazione della cute. Si è usata la solita tecnica sulla cute isolata di Rana. L'ambiente interno era dato da Ringer con $NaHCO_3$ a pH 7,85 ± 0,05, con aggiunta di adrenalina HCl in concentrazione 10^{-5}; l'aggiunta di adrenalina in tale concentrazione sposta il pH di circa 0,10 in senso acido. L'ambiente esterno era dato da una soluzione di NaCl al 6,5 ‰ o da acqua di fonte. La temperatura era di 28 ± 1° C.

I dati sono raccolti nella tabella I.

Da essi appare che l'adrenalina oltre a determinare una depolarizzazione della cute (figg. 3-4), ha come effetto di invertire il passaggio dell'acqua, in maniera



Figg. 3-4. – Andamento della differenza di potenziale della cute (ordinate) dopo introduzione (freccia) nell'ambiente interno di adrenalina; ambiente esterno dato da acqua di fonte (fig. 3), ambiente esterno dato da soluzione isotonica di cloruro di sodio (fig. 4).

più evidente nel caso che l'ambiente esterno è isotonico che nel caso che l'ambiente esterno è ipotonico.

Questi risultati fanno presumere: *a*) che l'adrenalina provocando una depressione della polarizzazione della cute, forse in conseguenza di un aumento della permeabilità ai sodio-ioni e ai cloro-ioni (Ussing, loc. cit.), deprime anche il meccanismo elettroosmotico normale dell'entrata dell'acqua; *b*) che ci sia anche normalmente un passaggio di acqua in senso contrario o che l'adrenalina ne provochi la comparsa; *c*) che anche quest'ultimo passaggio avvenga a mezzo di un processo attivo, forse in un substrato diverso da quello in cui avviene il passaggio di acqua ordinario; difatti detto passaggio in senso inverso presuppone che siano vinte o controbilanciate delle forze osmotiche (ed elettroosmotiche) contrarie.

TABELLA I.

Passaggio di acqua in mg per cm² e per ora alla temp. di 28° C: + passaggio normale (esterno → interno), — passaggio invertito (interno → esterno).

Ambiente interno					
Ringer + adrenalina 1 : 10⁻⁵ pH 7,75		Ringer solo pH 7,80		Ringer + KCN 0,004 M pH 7,70 – 8,05	
A. esterno NaCl 6,5‰	A. esterno acqua font.	A. esterno NaCl 6,5 ‰	A. esterno acqua font.	A. esterno NaCl 6,5 ‰	A. esterno acqua font.
— 1.24	— 3.20	+ 2.20	+ 7.34	+ 2.07	+ 4.35
— 3.60	— 1.20	+ 1.20	+ 6.40	0.00	+ 4.10
— 3.20	— 0.21	+ 4.60	+ 6.00	— 1.87	+ 3,84
— 3.20	+ 0.40	+ 7.05	+ 6.94	— 0.96	+ 2.46
— 1.30	— 0.09	+ 3.06	+ 7.30	+ 1.60	+ 4.20
— 3.59	— 1.04	+ 3.13	+ 5.10	—	+ 5.03
— 4.59	+ 1.00	+ 4.03	+ 6.16	—	—
—	—	+ 2.60	—	—	—
MED. — 2.96 ± 0.84	— 0.63 ± 1.09	+ 3.48 ± 1.12	+ 6.45 ± 0.44	+ 0.17 ± 1.0	+ 3.98 ± 0.52

Anche nel caso della cute di rana avvelenata con cianuro, secondo Huf (6) si nota passaggio in senso contrario, e qui non è certo il caso di parlare di meccanismo attivo. Secondo l'A. citato il fatto sarebbe da ascriversi all'equilibrarsi della pressione idrostatica con il dispositivo sperimentale da lui adottato.

Con la tecnica usata da noi, invece, la pressione idrostatica avrebbe dovuto favorire il passaggio in senso normale, e così pure la pressione osmotica quando l'ambiente esterno era dato da una soluzione ipotonica; invece si è avuto egualmente passaggio invertito.

Inoltre come appare dalla tabella I, il KCN, nei nostri esperimenti, ha determinato un passaggio di acqua, in senso normale, quasi nullo nel caso di ambiente esterno isotonico, e di minore entità nel caso di ambiente esterno ipotonico. La differenza fra i due fenomeni appare, nel suo complesso, significativa, e quindi conforta l'ipotesi espressa in *b*) e *c*) di cui sopra.

Se l'azione del KCN consiste solo nel deprimere il metabolismo cutaneo, senza modificare la resistenza al passaggio dell'acqua, il passaggio dell'acqua sotto l'azione del KCN, da ambiente ipotonico, rappresenterebbe quella quota di pas-

(6) E. HUF, «Pfluegers Arch. f. die ges. Physiol.», *236*, 1 (1935).

saggio, che, in condizione di cute non avvelenata, avviene unicamente in forza del gradiente osmotico; come si può constatare dai dati riportati questa quota è sensibilmente inferiore all'entità del passaggio in condizioni normali, ciò che lascia presumere che anche il passaggio da un ambiente ipotonico sia in parte di natura diversa da un semplice fenomeno osmotico, come era apparso anche da altri indizi (1–2).

Il fatto che il passaggio in senso inverso, sotto l'azione dell'adrenalina, appaia meno evidente quando l'ambiente esterno è ipotonico, che quando esso è isotonico, può essere interpretato considerando che nel primo caso il passaggio

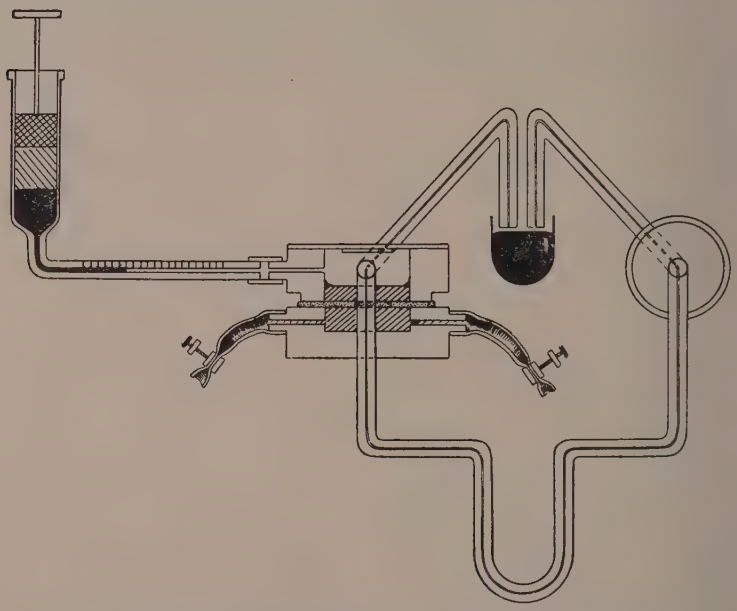


Fig. 5. – Schema del respirometro usato per misurare il consumo di ossigeno della cute di Rana in condizioni di lavoro osmotico. Il materiale in cui è fatta la camera respiratoria è di plexiglas. Il principio del metodo e il modo di usarlo sono gli stessi di quelli del microrespirometro descritto in « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », 25, 693 (1949).

in senso inverso deve controbilanciare un passaggio in senso normale di natura osmotica: in queste condizioni le due forze press'a poco si bilanciano e appare scarso spostamento d'acqua.

Si può ora chiedersi se l'effetto dell'adrenalina sia accompagnato o non da una diminuzione del ricambio energetico.

Abbiamo cercato perciò di determinare contemporaneamente al passaggio di acqua anche il consumo di ossigeno della cute di Rana; abbiamo usato allo scopo il dispositivo respirometrico rappresentato nella fig. 5. Si tratta di un respirometro a pressione costante con la camera respiratoria divisa in due dalla cute di Rana, la sezione rivolta verso la superficie interna, è riempita di Ringer (1 ml) la sezione rivolta verso l'esterno contiene 0,4–0,5 ml di NaCl al 6,5 ‰, o acqua di fonte nel caso degli esperimenti fatti con KCN: il diametro della camera è

di 20 mm. La durata dell'esperimento respirometrico era di 1–1,5 ore. I dati sono raccolti nella tabella II.

TABELLA II.

	Consumo di O_2 alla temperatura di 28,5 ± 0,1 °C		
	Ambiente interno		Ambiente interno: Ringer + KCN 0.004M pH 8,05 Ambiente esterno: Acqua di fonte
	Ringer pH 7,90–8,10	Ringer + adrenalina $1/10^5$ pH 7,75	
	consumo O_2 mm^3/g–ora	consumo O_2 mm^3/g–ora	consumo O_2 mm^3/g–ora
	68.9	54.5	0.0
	115.6	30.2	0.0
	87.0	51.5	—
	83.2	135.0	—
	63.5	92.0	—
	69.0	—	—
	80.3	—	—
	82.0	—	—
	102.5	—	—
	57.9	—	—
	79.6	—	—
MED.	80.5 ± 9 (1)	72.5 ± 26.7 (1)	0.0

(1) Si osserva che i valori di ossigeno qui ottenuti sono inferiori a quelli dati per la cute del dorso nella Nota precedentemente pubblicata (Capraro loc. cit.) ciò è dovuto verosimilmente al fatto che nelle presenti condizioni sperimentali l'ossigenazione della cute è meno efficiente che nelle precedenti condizioni; difatti se con il respirometro qui adottato si misura il consumo di ossigeno della cute appena umettata di Ringer e non disposta a membrana tra due ambienti acquosi, si trovano gli stessi valori più elevati come quelli precedentemente riportati.

Da questi dati ci sembra poter concludere che l'adrenalina non modifica in maniera sensibile e significativa il metabolismo energetico: ciò fa supporre che l'adrenalina non eserciti un'azione deprimente sui meccanismi chimici della cute nel suo insieme, ma ne modifichi l'effetto sul passaggio dell'acqua, forse agendo in senso antagonistico su due substrati diversi aventi la funzione di assorbire risp. di espellere acqua.

Invece il KCN annulla il metabolismo aerobico della cute di rana.

Conclusioni.

1° Il comportamento del passaggio dell'acqua e della D. P. della cute di Rana in rapporto alla concentrazione dell'ambiente esterno confortano l'ipotesi che detto passaggio sia in parte di natura osmotica e in parte attivo (di natura elettroosmotica).

2° Il comportamento del passaggio di acqua sotto l'azione del KCN in confronto con il passaggio in condizioni di cute normale, è in armonia con quanto detto sopra.

3° La depolarizzazione da adrenalina non è solo accompagnata da una scomparsa del passaggio di acqua in senso normale, ma anche dalla comparsa di un passaggio in senso contrario, che deve pure considerarsi un processo attivo e non di natura osmotica.

4° Il metabolismo della cute di Rana sotto l'azione dell'adrenalina non si sposta sensibilmente; ciò lascia presumere che l'adrenalina agisca forse, sia deprimendo il meccanismo di entrata dell'acqua in senso normale, sia esaltando il meccanismo di trasporto dell'acqua in senso opposto.

Biologia. — *Sulle proteine dell'organo elettrico di Torpedine.* Nota di Roberto Arosio e Annamaria Orlandi, presentata (*) dal Socio L. Cambi.

Le ricerche da tempo in corso nel nostro Istituto (1) sulla miosina della muscolatura di vari animali, ci hanno suggerito l'idea di vedere se nell'organo elettrico di Torpedine (*Torpedo ocellata* Rud.) restasse qualche ricordo chimico della sua origine embriologica dall'abbozzo muscolare (2).

È noto infatti da tempo (3) che gli elementi dell'organo elettrico sono una particolare trasformazione del tessuto muscolare.

L'esistenza di miosina nell'organo elettrico differenziato era già stata esclusa dalle ricerche di alcuni Autori (4). Ma alcune osservazioni nel corso delle nostre ricerche ci hanno portato a riesaminare questo problema.

Abbiamo iniziato le nostre ricerche sull'organo elettrico di *Torpedo ocellata* Rud. applicando il metodo per l'estrazione della actomiosina descritto dai lavori di Weber ed Edsall secondo la tecnica usata da Cigada, Citterio, Orlandi, Ranzi

(*) Nella seduta del 14 aprile 1951.

(1) M. Cigada, P. Citterio, L. Tosi e S. Ranzi, « Istituto lombardo (Rend. Sc.) », *80*, 236 (1947).

(2) Ricerche eseguite nell'Istituto di Zoologia e Anatomia comparata dell'Università di Milano. Siamo grati al prof. Dohrn che ci ospitò presso la Stazione Zoologica di Napoli dove venne raccolto il materiale e al prof. G. Montalenti direttore del Centro di Biologia di Napoli che ci dette una borsa di studio.

(3) J. C. Ewart, « Philos. Trans. Royal Soc. London », B *179*, 539 (1888); ibidem, B *183*, 389 (1892).

(4) E. Baldwin, « Biochem. J. », *32*, 888 (1938); K. Bailey, « Biochem J. », *33*, 255 (1939)

e Tosi[5] con qualche piccola modificazione. La precipitazione, invece che per diluizione, era ottenuta per mezzo di dialisi contro acqua bidistillata gelata a pH 7,4–7,5 (tamponata a fosfati e acido citrico, di forza ionica pari a $\mu = 0{,}007$). A questo pH si ottiene infatti un precipitato che dalla centrifugazione è nettamente diviso in due strati: giallastro e soffice il superiore, biancastro e più consistente l'inferiore. Ambedue le frazioni possono essere riprese a 0° C in liquido di Weber ed Edsall con aggiunta di KCl 2 mol. in parti uguali. La prova di trafilare queste frazioni, come fece Weber[6] per l'actomiosina, stirandole in 0,05 mol. KCl risultò negativa per la soluzione dello strato superiore, positiva per la soluzione dello strato inferiore. I fili ottenuti con la soluzione di questa frazione sono belli e ben delimitati e si conservano per parecchi giorni (Fig. 1). Possono essere di

Fig. 1. – *A*) Filo ottenuto con actomiosina estratta da muscolatura di *Scyllium canicula* L. – *B*) Filo ottenuto con la frazione actomiosinosimile estratta da organo elettrico di *Torpedo ocellata* Rud.

nuovo sciolti in liquido di Weber ed Edsall. Se la dialisi è fatta contro acqua a pH 6,4–6,9 si ha un precipitato che non può venir tirato in fili. Abbiamo eseguito parecchi esperimenti precipitando la proteina a pH che vanno da un minimo di 7,2 a un massimo di 7,9 con optimum a pH 7,4–7,5 ottenendo sempre un precipitato con le caratteristiche sopra descritte. Ci è sembrato interessante saggiare sui fili da noi ottenuti con proteina di organo elettrico, l'azione di una soluzione all'1 % di adenosintrifosfato di Na (ATP) che, come è noto, ha la proprietà di far contrarre i fili di actomiosina. L'azione contratturante dell'ATP è nel nostro caso ben evidente, ma piccola con valori che variano da un minimo del 10 % a un massimo del 20 % nel senso longitudinale, del 20–30 % in senso trasversale. L'azione contratturante dell'ATP provata anche sui fili di actomiosina

(5) M. CIGADA, P. CITTERIO, A. ORLANDI, S. RANZI e L. TOSI, «Istituto lombardo (Rend. Sc.)», *82*, 351 (1949).

(6) H. H. WEBER, «Naturwiss.», *27*, 33 (1939).

ottenuti da muscolatura di *Scyllium canicula* L. e dalla coda di Torpedine, si è dimostrata comunque inferiore a quella da noi riscontrata in Mammiferi, Uccelli e Teleostei (7).

Al microscopio polarizzatore il filo ottenuto dall'organo elettrico dopo azione di ATP, presenta una debolissima birifrangenza, molto più debole di quella ottenuta col filo contratto di actomiosina. La frazione proteica che può essere tirata in fili è stata estratta anche da organo elettrico conservato dopo essere stato congelato e disidratato. In questo caso, però, abbiamo ottenuto risultati migliori sottoponendo la sostanza a un breve lavaggio in acqua bidistillata prima dell'estrazione in liquido di Weber ed Edsall. Il lavaggio in acqua ha lo scopo di eliminare l'urea che è presente nei Selaci e che notoriamente ha azione denaturante le proteine. Abbiamo sottoposto anche l'organo elettrico fresco a un lavaggio in soluzione 0,03 mol. KCl tenendo in ghiacciaia per alcune ore (5–6 ore). I fili ottenuti con questo trattamento erano migliori di quelli che si potevano avere senza lavaggio.

Data la forte somiglianza della frazione proteica, estratta dall'organo elettrico, con l'actomiosina abbiamo voluto esaminare anche altre caratteristiche fisico-chimiche.

È noto che la actomiosina si presenta, all'analisi viscosimetrica eseguita col metodo messo a punto nel nostro laboratorio (8) come costituita da particelle filamentose: la viscosità specifica diminuisce per l'aggiunta di KSCN alla soluzione. Analisi viscosimetriche della frazione proteica che ci interessava hanno mostrato una diminuzione di viscosità col metodo descritto in detto lavoro per azione di KSCN, e cioè la proteina è filamentosa.

Al microscopio polarizzatore anche questa soluzione presentava birifrangenza di flusso sebbene meno intensa di quella delle soluzioni di actomiosina della muscolatura.

Le reazioni di Dische e di Bial, risultate negative, e la curva allo spettrofotometro che, per la lunghezza d'onda corrispondente agli acidi nucleici, dà un leggero plateau invece dell'innalzamento a picco tipico delle soluzioni di questi acidi, escludono la presenza di nucleoproteine.

La quantità di proteina actomiosinosimile che si può ottenere con questo metodo è molto scarsa. Le percentuali espresse in grammi per 100 grammi di tessuto fresco sono le seguenti:

peso secco	gr. 11,8 %	
N totale coagulabile . . .	» 0,44 %	(= proteine gr. 2,75)
N estraibile in Edsall . . .	» 0,26 %	
N della frazione actomiosinosimile per cento dell'N coagulabile	» 3,9 %	

(7) Cigada, Citterio, Tosi e Ranzi, op. cit.; Cigada, Citterio, Orlandi, ecc., op. cit.
(8) S. Ranzi, « Boll, Soc. ital. Biol. sper. », *24*, 398 (1948).

Abbiamo tentato l'estrazione isolata della frazione corrispondente all'actina secondo il metodo di Guba descritto da Szent-Györgyi (9).

Si è estratta così una proteina actinosimile, che, come l'actina, in soluzione acquosa è globulare e non dà birifrangenza di flusso. Aggiungendo KCl in modo da raggiungere la concentrazione di 0,1 mol. nel tutto (concentrazione alla quale avviene la polimerizzazione dell'actina) si ha buona birifrangenza di flusso.

Le variazioni di viscosità al viscosimetro per aggiunta di KCl o KSCN confermano tale cambiamento di forma. Questi dati sono riassunti nella seguente tabella I.

TABELLA I.

Soluzione di proteina estratta seguendo il metodo di Guba per l'actina	La viscosità è più elevata in	Birifrangenza di flusso	Forma particelle
Soluzione in acqua senza CO_2 .	KSCN	assente	globulare
La precedente più KCl fino alla concentrazione 0,1 mol nel tutto.	KCl	presente	filamentosa

La stessa variazione di forma delle particelle per cambiamento del solo pH descritta da Szent-Györgyi per l'actina, è stata da noi riscontrata su questa frazione proteica.

TABELLA II.

Forma delle particelle di actina in soluzione acquosa.

Origine dell'actina	Globulare a pH	Filamentosa a pH	Globulare a pH
Organo elettrico	8,1	6,4	5,6
Muscolatura di:			
Coniglio	7,2	6,9-6,2	6,0
Colombo	7,4	6,8-6,3	5,8
Rana	—	6,7	
Teleosteo	7,9	7,0-6,4	5,9
Aragosta	7,2	6,9-6,0	

(9) A. SZENT-GYÖRGYI, *Chemistry of muscular contraction*, pp. 142-144, New York, 1947.

La soluzione ottenuta in acqua bidistillata senza CO_2 a pH 8,1 è infatti a particelle globulari; abbassando il pH a 6,4 con acido acetico diluito, queste divengono filamentose per ritornare globulari ad un ulteriore abbassamento a pH 5,6.

Le varie forme sono sempre state determinate col citato metodo viscosimetrico controllato con lo studio della birifrangenza di flusso alla cella di Gerandàs. I dati sono raccolti nella tabella II e da noi comparati coi dati dell'actina di varie muscolature desunti da Cigada, Citterio, Orlandi, Ranzi e Tosi [10].

Abbiamo tentato la combinazione della frazione actinosimile dell'organo elettrico con miosina solubile di topo secondo quanto già fatto da Cigada, Citterio, Ranzi e Tosi [11] per actina e miosina della muscolatura di varie specie zoologiche. Aggiungevamo cioè ad actina a pH 6,4 una soluzione di miosina di topo. Anche in questo caso si è avuta una combinazione delle due proteine con formazione di una unità biochimica nuova, insolubile in acqua e solubile in liquido di Weber ed Edsall. Con soluzioni di questa proteina si sono potuti tirare fili ben consistenti e ben individuati.

Concludendo: le presenti ricerche hanno potuto dimostrare che:

dall'organo elettrico di torpedine può essere estratta una frazione proteica trafilabile in fili consistenti, che per azione dell'ATP si contraggono del 10–20% in senso longitudinale, del 20–30% in senso trasversale;

questa frazione proteica actomiosinosimile che comprende circa il 3,8% dell'azoto coagulabile presenta birifrangenza di flusso e, col metodo viscosimetrico messo a punto nel nostro Istituto, si dimostra a particelle filamentose;

l'analisi allo spettrofotometro di questa frazione proteica esclude si tratti di nucleoproteine;

sempre dall'organo elettrico può venire estratta una frazione actinosimile che, estratta in ambiente alcalino, presenta particelle di forma globulare; queste si polimerizzano per aggiunta di KCl fino a 0,1 mol. La forma è stata determinata col metodo viscosimetrico e confermata dai dati della birifrangenza di flusso;

la stessa variazione di forma si ha per il cambiamento del pH: pH 8,1 globulare; pH 6,4 filamentosa; pH 5,6 globulare;

è possibile ottenere la combinazione di questa frazione actinosimile con miosina di topo; si ottiene una nuova unità biochimica che presenta solubilità diversa da quella dei due componenti e può venir trafilata in fili consistenti e ben individuati.

(10) Op. cit.

(11) M. Cigada, P. Citterio, S. Ranzi and L. Tosi, «Experientia», *4*, 480 (1948).

Biologia. — *Ergastoplasma e acidi nucleici nel ciclo secretorio di alcune ghiandole.* Nota (*) di LEA URBANI-MISTRUZZI e VALERIA PACINI, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

Oggetto di questa Nota è l'esposizione di alcune osservazioni sul comportamento degli acidi nucleici e dell'ergastoplasma durante il ciclo secretorio del pancreas, delle parotidi e sottomascellari di ratto albino *(Mus norvegicus* var. *albina)*. Queste ricerche fanno parte di un piano di lavoro sulle modificazioni strutturali ed istochimiche di ghiandole sia a secrezione esterna che a secrezione interna in rapporto a particolari condizioni funzionali.

Per poter osservare le varie fasi di elaborazione e di eliminazione del secreto delle cellule esocrine abbiamo seguìto la tecnica usuale di iniettare per via sottocutanea a ratti albini dello stesso sesso, digiuni da 24 h., approssimativamente della stessa età e dello stesso peso (200 gr. circa) una soluzione all'1% di cloridrato di pilocarpina in ragione di 3cc per Kg. di animale, secondo le indicazioni di Loreti e Perroncito (1938)(1). Gli animali (dieci) di una prima serie di osservazioni iniettati tutti contemporaneamente, sono stati sacrificati ad intervalli di un ora dall'iniezione stessa (1-2-3-4-ore dopo) mentre quelli di una seconda serie (cinque) sono stati uccisi $1^1/_2$-4-7-10 ore dopo l'iniezione di pilocarpina. Frammenti di una stessa ghiandola sono stati fissati in Zenker acetico o formolico, Bouin, Flemming; altri sono stati, appena prelevati, messi in coloranti vitali per osservare a fresco, seguendo la tecnica di Hirsch (2) e di Ries (3), il comportamento dei granuli di secrezione. Le sezioni di 5 e 7 *micron* sono state colorate nella seguente maniera: quelle fissate in Flemming con l'ematossilina ferrica, quelle in Zenker formolico o acetico con il verde di metile-pironina secondo la tecnica di Brachet per gli acidi nucleici o con il bleu di toluidina e quelli in Bouin con la reazione di Feulgen per l'acido timonucleico. Per il controllo dei preparati colorati con il verde di metile-pironina abbiamo colorato contemporaneamente due preparati sui quali erano attaccate sezioni successive di ghiandola per tutti e cinque gli stadi considerati: uno dei preparati era stato precedentemente trattato con ribonucleasi cristalizzata priva di attività proteasica (Worthington Biochemical Laboratory, New Jersey, U. S. A.) alla concentrazione di 2 mgr circa in 5 cc di acqua tridistillata per 1 h. a 65° C. Allo scopo di poter controllare il più esattamente possibile la intensità di colorazione delle sezioni di ghiandole fissate a vari intervalli dalla iniezione di pilocarpina, sezioni del pancreas e delle salivari di controllo e dei vari stadi considerati sono state

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata «G. B. Grassi» della Università di Roma.

(**) Nella seduta 14 aprile 1951.

(1) F. LORETI e G. PERRONCITO, «Zeitschr. f. Zellf. und Mikr. Anat.», *28*, p. 12 (1938).

(2) G. Ch. HIRSCH, «Zeitschr. f. Zellf. und Mikr. Anat.», *15*, p. 36 e 290 (1932).

(3) E. RIES, «Zeitschr. f. Zellf. und Mikr. Anat.», 22, p. 523 (1935).

poste sullo stesso vetrino in modo da essere sottoposte per gli stessi tempi all'azione delle varie sostanze adoperate per la colorazione.

Nel pancreas degli animali di controllo la colorazione con la ematossilina ferrica ha messo in evidenza diversi stadi funzionali: alcuni acini presentano grossi granuli di secreto accumulati al centro mentre altri sono ancora nella fase elaborativa del secreto. L'ergastoplasma si trova alla base della cellula, in quantità maggiore nelle cellule degli acini che presentano pochi granuli di secreto che in quelli che ne sono stipati.

Dopo un'ora dalla iniezione di pilocarpina quasi tutti gli acini si trovano nella stessa fase di lavoro: assenti sono i granuli di secreto che sono stati eliminati in seguito allo stimolo pilocarpinico. L'ergastoplasma si estende dalla base della cellula al di sopra del nucleo sfogliandosi in lamelle; il nucleo si presenta intensamente colorato con masse cromatiniche centrali e addensate intorno alla membrana. Dopo 4 ore dall'iniezione si ha il massimo di idratazione (Loreti e Perroncito 1938) [1] del citoplasma e del nucleo. L'ergastoplasma è ridotto ad un sottile strato alla base della cellula, i granuli grossi di secreto sono invece condensati in quantità notevole al di sopra del nucleo; in altri acini si notano invece granuli più piccoli sparsi nel citoplasma più o meno uniformemente. Il nucleo delle cellule degli acini con secreto granulare grosso si presenta chiaro con cromatina diffusa mentre quello delle cellule degli acini a secreto granulare fino si presenta con zolle intensamente colorate che lo riempiono quasi completamente. I nuclei ricchi di cromatina sono più piccoli (5 *micron* circa) di quelli che ne sono poveri (6-7 *micron*). Nel pancreas dei ratti iniettati da 7 ore ha già avuto inizio la eliminazione del secreto che non è contemporanea in tutti gli acini: alcuni infatti presentano ancora grossi granuli mentre altri ne sono privi. Il nucleo si presenta grande (7-7,5 *micron*) con scarsissima cromatina. In questa fase l'ergastoplasma non è messo in evidenza dalla ematossilina ferrica. Dopo 10 ore la cellula è completamente priva di granuli di prozimogeno e la parte verso il lume dell'acino si presenta chiara a maglie lasse mentre la parte basale presenta lamelle ergastoplasmatiche molto sviluppate e il nucleo è piccolo e intensamente colorato come all'inizio del ciclo.

La colorazione con il bleu di toluidina ha riconfermato la basicità delle formazioni ergastoplasmatiche, quella con la pironina ha messo in evidenza il loro contenuto in acido ribonucleico controllato con preparati precedentemente trattati con la ribonucleasi. La reazione di Feulgen e il verde di metile hanno rivelato quale parte l'acido timonucleico abbia nelle variazioni cromatiniche del nucleo precedentemente esposte, aumentando nella fase di elaborazione del secreto e diminuendo durante l'eliminazione di esso.

Le osservazioni al microscopio a contrasto di fase di preparati fissati e sezionati non colorati, hanno messo in evidenza la diversa consistenza delle formazioni ergastoplasmatiche e nucleari nelle varie fasi funzionali della ghiandola confermando in pieno i reperti ottenuti su preparati colorati con i metodi specifici.

Gli stessi metodi di osservazione applicati allo studio delle ghiandole salivari sierose e miste (parotidi e sottomascellari) non hanno permesso per ora di osservare un netto ciclo secretorio.

Nelle ghiandole salivari si osserva una grande variabilità nelle dimensioni nucleari che si accentua in seguito ad iniezione di pilocarpina la quale inoltre eccita la divisione nucleare non seguìta dalla citodieresi, per cui si hanno cellule polinucleate. La colorazione con il verde di metile-pironina ha rivelato delle particolarità di questi nuclei: alcuni si presentano ricchi di acido timonucleico, altri di ribonucleico pur trovandosi nella stessa cellula e per ora non siamo in grado di precisare le eventuali relazioni di questa diversa composizione nucleare né con la divisione dei nuclei né con l'attività secretoria della cellula. La diversa composizione dei nuclei in acidi timonucleico e ribonucleico può essere un indice di una trasformazione di un acido in un altro, ma questa ipotesi necessita di ulteriori e più approfondite osservazioni (cfr. Urbani, 1950)[4].

Queste osservazioni sul contenuto in diversi acidi nucleici dei nuclei sono state confermate dall'esame dei preparati colorati con la Feulgen. L'ergastoplasma nelle ghiandole salivari sierose è molto sviluppato e si presenta variamente orientato nei preparati di ghiandole dei ratti di controllo e trattati. Nei ratti iniettati da 1 1/2 h. l'ergastoplasma è ridotto e presenta una struttura reticolare piuttosto lassa; dopo 4 h. in alcuni acini si presenta più sviluppato, in altri meno e si vede una certa corrispondenza tra presenza di maggiore quantità di cromatina nei nuclei e sviluppo dell'ergastoplasma. Dopo 7 h. l'ergastoplasma si presenta intrecciato nella parte centrale della cellula e più compatto alla base dove costituisce un groviglio. Dopo 10 h. l'ergastoplasma è limitato alla base cellulare presentando lamelle orientate parallelamente ai limiti della cellula. È da tener presente che questa descrizione dell'ergastoplasma nelle ghiandole salivari sierose si riferisce all'aspetto generale della ghiandola e che nelle cellule di uno stesso acino l'ergastoplasma può essere più o meno sviluppato per cui è difficile poter stabilire una relazione fra esso e l'attività secretoria dell'acino *in toto*. Probabilmente la differenza è in rapporto al ciclo di secrezione in uno stesso acino delle singole cellule.

Queste osservazioni riguardano il comportamento dell'ergastoplasma nella parotide e nella parte sierosa delle sottomascellari; la parte secernente mucosa non presenta particolari caratteristiche ed è povera di acidi nucleici.

Le nostre osservazioni sulle ghiandole salivari di ratto albino coincidono con quelle di Loreti e Perroncito (loc. cit.) per quanto riguarda la diversa grandezza dei nuclei e la presenza di più nuclei nelle cellule di animali trattati; noi però abbiamo osservato queste particolarità anche nei controlli, sebbene con minor frequenza. Inoltre abbiamo osservato l'ergastoplasma indipendentemente sia nei controlli che negli animali pilocarpinizzati: la sua estensione dipende dallo stadio funzionale della cellula. Loreti e Perroncito tolgono all'ergastoplasma e al paranucleo il valore di « organuli » cellulari attribuendo loro il « significato di semplici atteggiamenti del citoplasma di cellule in condizioni di particolare attività funzionale » perchè non reperibili nelle cellule in attività cariocinetica e generalmente assenti nelle cellule non sottoposte all'azione stimolante della pilocarpina. Anche il Ries (1935 e sgg.) ha notato la scomparsa dell'ergastoplasma durante la eliminazione del

(4) E. URBANI, « Rivista di Biologia », *42* p. 413 (1950).

secreto nel pancreas mentre Caspersson e Collaboratori (1941) [5] in base all'assorbimento dell'U. V. concludono per una persistenza dell'ergastoplasma e considerano questo un costituente costante delle cellule ghiandolari.

Inoltre sempre secondo Caspersson, sono proprio i pentoso–nucleotidi a conferire all'ergastoplasma la caratteristica basofilia.

Le ricerche di Noback e Montagna (1947) [6] hanno confermato che la basofilia delle ghiandole salivari e del pancreas è dovuta alle ribonucleoproteine. Secondo le nostre osservazioni sulle parotidi ed in particolare sul pancreas l'ergastoplasma con la sua struttura lamellare caratteristica si forma e si estende durante l'elaborazione dei granuli di proenzima e si riduce fino a scomparire quando la sintesi del secreto è terminata ed ha inizio la sua eliminazione per poi ricostituirsi durante il ciclo successivo. Al microscopio a contrasto di fase si nota però sempre una zona opaca più o meno estesa alla base della cellula che sta ad indicare una diversa condizione del citoplasma in essa. Anche la colorazione con il verde di metile–pironina o con il bleu di toluidina mettono in evidenza la basofilia della parte basale della cellula: basofilia che seppure ridottissima in alcune fasi del ciclo non scompare mai. Resta quindi da appurare se la zona opaca al contrasto di fase, nettamente basofila, che però non si colora con l'ematossilina ferrica, sia costituita da un particolare aspetto dell'ergastoplasma oppure no.

L'ergastoplasma ha secondo gli studi più recenti una composizione nucleoproteica che si avvicina per questa caratteristica ad alcune formazioni tipiche di alcuni oociti in crescita quali le fasce vitollogene (Cotronei, 1910, 1911) [7] ed i nuclei vitellini lo studio comparativo citochimico dei quali è stato oggetto di numerosi lavori nel nostro Istituto (Urbani, 1949) [8]: a tale proposito rinvio alla recente rassegna di Cotronei (1950) [9] nella quale i rapporti tra acidi nucleici e determinate formazioni cellulari sono inquadrati da un punto di vista generale e viene criticamente prospettato il loro reale valore.

Che gli acidi nucleici intervengano nei processi di sintesi proteica (Brachet, Caspersson, Pollister, ecc.) [10] è cosa ormai generalmente accettata e può sembrare strano a questo proposito che le isole di Langherans che secernono l'insulina (che ha struttura proteica) presentino debole assorbimento nell'U. V. e debole basofilia in confronto alla parte esocrina e ciò può dipendere dal fatto (Caspersson, Landstrøm–Hyden e Aquilonius 1941) [5] che il contenuto in nucleotidi della parte endocrina del pancreas è inferione ad 1/100 del contenuto in proteine mentre quello della parte esocrina è di 1/4 circa. Sarebbe interessante esten-

(5) T. Caspersson, H. Landstrøm–Hyden e L. Aquilonius, «Chromosoma», *2*, p. 111 (1941).

(6) C. R. Nobak e W. Montagna, «Amer. J. Anat.», *81*, p. 343 (1947).

(7) G. Cotronei, «Boll. Soc. Nat. Napoli», *24*, p. 155 (1910); «Arch. Zool.», *23*, p. 11 (1911).

(8) E. Urbani, «Rivista di Biologia», *41*, p. 331 (1949); «Boll. Zool.», *16*, p. 151.

(9) G. Cotronei, «Acc. Naz. Lincei. Rend. adunanza solenne del 4 giugno 1950», *5*, fasc. 5 (1950).

(10) J. Brachet, *Embryologie chimique*. Masson, Paris (1947).

dere questi studi al pancreas esclusivamente insulare dei Petromizonti dove Cotronei (1927)[11] ha dimostrato l'esistenza di isole chiare ed isole scure, onde apportare un contributo alla spiegazione del significato funzionale di queste formazioni.

Nel materiale da noi studiato è particolarmente evidente una concentrazione di acido ribonucleico in una zona perinucleare e ciò in accordo con le osservazioni di Caspersson e Schultz (1938-39)[12], (su materiali diversi cfr. anche Hyden, Thorell ecc.)[13] dove questi autori con l'assorbimento nell'U. V. hanno dimostrato che i nucleotidi citoplasmatici appaiono in un primo tempo intorno alla membrana nucleare. Anche il particolare comportamento del nucleo in relazione allo stadio di secrezione della ghiandola è una conferma della partecipazione delle sostanze nucleari ai processi di secrezione. Che il nucleo prendesse viva parte ai processi di sintesi che si operano nel citoplasma era stato già insistentemente prospettato nei casi di vitellogenesi da Cotronei (1910, 1911)[7] e le ricerche recenti mettono in evidenza dei rapporti molto stretti tra acidi nucleici nucleari e citoplasmatici. Infatti sul materiale da noi studiato si vede che finchè le cellule sono in fase elaborativa e nel loro interno si formano granuli di proenzina, il nucleo è ricco di acidi nucleici mentre man mano che i granuli si versano nel lume ghiandolare il nucleo diviene più povero di questi composti: terminato lo svuotamento gli acidi timonucleico e ribonucleico sono estremamente ridotti.

Le nostre osservazioni sul ciclo secretorio del pancreas dei ratti albini concordano con quelle di Hirsch e di Ries per quanto riguarda la formazione e la completa evoluzione dei granuli di proenzina e la partecipazione a questo processo dell'ergastoplasma; nel nostro materiale il ciclo risulta più breve (8,9 h.) in confronto di quello riscontrato (10,13 h.) dagli Autori tedeschi. Uniformità di aspetto della ghiandola si ha solamente nelle prime ore dopo l'iniezione, in seguito alcune parti sintetizzano il secreto più rapidamente delle altre in modo che la sincronia di lavoro viene perduta dalla ghiandola *in toto* e si limita alle cellule di alcuni acini, però anche tra queste talvolta se ne nota qualcuna che sfugge alla sincronia. Nel pancreas perciò si può parlare, per quanto ci siano delle deviazioni, di una sincronia di lavoro delle cellule esocrine dello stesso acino, mentre nelle ghiandole salivari le osservazioni per ora eseguite non permettono di stabilire una netta sincronia di lavoro tra le singole cellule di uno stesso acino data la spiccata variazione individuale.

Il ciclo di secrezione si osserva molto bene nei preparati che mettono in evidenza la formazione dei granuli, come l'ematossilina ferrica, colorazione che rivela anche il diverso aspetto del nucleo e dell'ergastoplasma.

L'acido ribonucleico si trova sempre in maggior quantità nella parte basale della cellula legato all'ergastoplasma, ma è sempre reperibile, sia pure in quantità minima, anche quando non si può mettere in evidenza la caratteristica struttura

(11) G. COTRONEI, « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », *8*, p. 1 (1927).
(12) T. CASPERSSON e J. SCHULTZ, « Nature », *142*, p. 294 (1938); IBIDEM, *143*, p. 602 (1939).
(13) H. HYDEN, « Acta Physiol. Scand. », *6*, suppl. XVII (1943).

lamellare dell'ergastoplasma stesso. Non è stata mai osservata reazione Feulgen positiva, indicante la presenza di acido timonucleico, né a livello dell'ergastoplasma né in qualsiasi settore citoplasmatico. Il nucleo partecipa attivamente alle varie fasi di elaborazione e produzione del secreto modificando la sua morfologia e la sua composizione chimica nei riguardi degli acidi nucleici, ma non si può

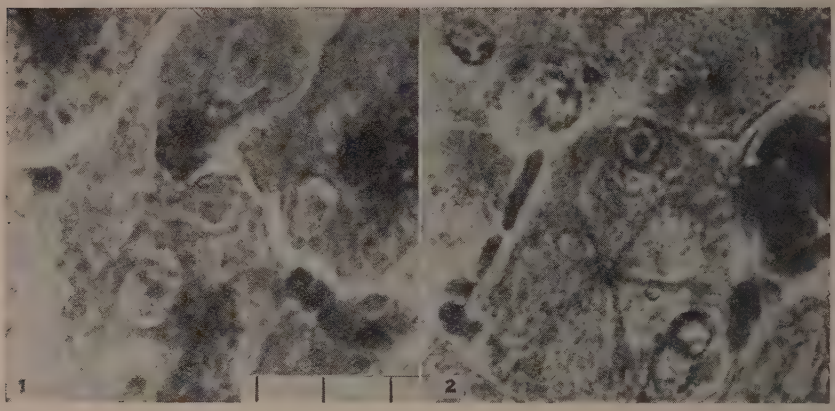


Fig. 1. – Pancreas, 7 h dopo l'iniezione di pilocarpina: ha avuto inizio lo svuotamento dei granuli di proenzima. La parte basale della cellula non presenta formazioni ergastoplasmatiche; il nucleo grande e vescicolare presenta scarse zolle cromatiniche.

Fig. 2. – Pancreas, 10 h dopo l'iniezione di pilocarpina. Tutti i granuli di secreto sono stati eliminati. Nella parte basale della cellula si notano lamelle ergastoplasmatiche; il nucleo è più piccolo intensamente colorato alla periferia e con un grosso nucleolo al centro sul quale si trovano addensate zolle di cromatina. Preparati fissati in Flemming, sezioni di 5 micron, color. Ematossila ferrica-Ob. 8 Koriska-oc. 5 ×. L'ingrandimento della fotografia può essere valutato considerando che ogni divisione della scala corrisponde a 10 micron.

parlare nemmeno nel nostro caso di una formazione diretta dal nucleo di granuli di secrezione.

Il nucleolo, per il particolare comportamento, meriterebbe uno studio e una descrizione minuziosa: quello che possiamo per ora dire è che esso si presenta di notevoli dimensioni e ricco di acido ribonucleico all'inizio del processo di secrezione e che al termine di questo le sue dimensioni e il suo tenore in acido ribonucleico sono ridotti.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Senatore Castelnuovo porge il saluto suo e della Classe al Prof. Royo, Vice Segretario del Consiglio delle Ricerche di Madrid.

Il Presidente presenta il fascicolo n. 4 dei « Rendiconti » (aprile 1951).

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente informa i Colleghi che è pervenuta all'Accademia la dolorosa notizia della morte del Prof. ELIE CARTAN, Socio Straniero della Categoria I.

Il Presidente ricorda che il compianto Socio è stato uno dei più grandi matematici francesi ed ha lasciato profonde traccie nella scienza con le sue ricerche sulla teoria della struttura dei gruppi continui, sui sistemi differenziali e nella geometria differenziale, a cui ha fissato nuovi indirizzi.

Il Presidente, mentre invia alla famiglia del compianto scienziato e all'Accademia delle Scienze di Parigi della quale il Cartan era uno dei più eminenti membri, l'espressione del più vivo cordoglio dell'Accademia dei Lincei, assicura che questa commemorerà degnamente il Collega scomparso. Prega pertanto il Socio Ugo Amaldi di voler tenere in una delle prossime sedute, il discorso commemorativo.

Il Socio Amaldi accetta.

PLICHI SUGGELLATI

Il Senatore Castelnuovo presenta un plico suggellato consegnato all'Accademia dal Signor Tupone, unitamente ad una lettera in data 30 aprile c. a., con la quale il predetto Signore esprime il desiderio che detto plico sia aperto nella presente seduta. Constatata l'integrità dei sigilli, si procede all'apertura del plico di cui trattasi che risulta contenere due fogli dattiloscritti, concernenti l'indicazione di due meccanismi relativi a «Moto translatorio con forze centrifughe composte e creazione di energia».

Il Presidente prega il Socio Signorini di voler esaminare detto studio e di riferire in una prossima seduta.

Il Socio Signorini accetta.

Il Senatore Castelnuovo presenta quindi un plico suggellato, inviato dall'ing. Beniamino Midulla, con una lettera in data 19 aprile 1951. La Classe, constatata l'integrità dei sigilli, delibera che il plico di cui trattasi sia conservato negli archivi accademici a disposizione dell'interessato.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Pensa, riferendosi alla presentazione, avvenuta nella seduta di Classe del 10 dicembre 1949, del Vol. I dell'Edizione Nazionale dell'Epistolario di Alessandro Volta, presenta e offre in omaggio il II volume dell'Epistolario stesso, edito sotto gli auspici dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e della Società Italiana di Fisica.

Il Socio Pensa ricorda che detto II volume, contenente 411 lettere, si estende dal 12 settembre 1780 al 7 agosto 1788 e si riferisce pertanto a quel

periodo nel quale Alessandro Volta, nominato professore di Fisica nell'Università di Pavia, continuò fervidamente la sua preparazione e il suo affinamento scientifico specialmente nel campo delle misure elettriche. Mentre dal I volume si desumono le vicende che condussero il Volta, dalle prime prove di giovane fisico all'eminente posizione conquistata tra gli scienziati più celebri, nel II volume appare un Volta desideroso di conoscere tanto le cose della natura quanto gli studiosi di essa e il loro pensiero.

Il Socio Pensa, dopo aver rivolto un ringraziamento al Collega Polvani e al prof. Francesco Massardi, che all'Edizione Nazionale hanno dato una collaborazione veramente preziosa, annunzia che il III volume dell'Epistolario è in corso.

Il Socio U. Amaldi offre in omaggio la parte I del volume II delle « Lezioni di meccanica razionale » del compianto prof. Tullio Levi-Civita e dello stesso prof. Amaldi, il I volume delle quali è stato già presentato all'Accademia nella seduta del 9 dicembre 1950, facendo presente che la seconda parte del volume II, che comprenderà la dinamica dei solidi, le equazioni canoniche, i principi variazionali e gli impulsi, già si trova in corso di stampa.

Il Socio Bompiani presenta un volume contenente gli Atti del 3° Congresso dell'Unione Matematica Italiana (Pisa 23–24 e 25 settembre 1948; Livorno e Lucca 26 settembre 1948) e il I volume delle « Opere » di Felice Casorati, mettendo in evidenza che la pubblicazione delle Opere del Casorati, raccolte in due volumi per iniziativa dell'Unione Matematica Italiana e sotto gli auspici dell'Università di Pavia, comprende tutti gli scritti dati alle stampe dal compianto studioso, ad eccezione di uno, ed inoltre due brevi scritti inediti.

Il Socio Boaga offre in omaggio e illustra brevemente la pubblicazione n. 3 della Rivista del Catasto e dei Servizi Tecnici Erariali dal titolo « Ricerche analitiche sulla distribuzione della proprietà fondiaria in Italia ».

Il Socio Redaelli offre in omaggio il volume del suo assistente e collaboratore dott. Luigi Piantoni dal titolo « Bioergia e Allobioergia Prolegomeni all'Allergia », mettendo in particolare evidenza che tale opera originale è del tutto nuova nella letteratura italiana e straniera e contiene gli elementi basilari per la comprensione dei fenomeni che governano l'organismo umano di fronte agli stimoli ambientali, con particolare riferimento ai concetti fondamentali dei processi che all'allergia fanno capo direttamente o indirettamente.

Il Socio Segre presenta un volumetto, dal titolo « Arithmetical Questions on Algebraic Varieties », contenente alcune conferenze, da lui tenute all'Università di Londra sull'opportunità di stabilire intimi contatti e nuove relazioni tra la geometria algebrica e l'aritmetica. Detta pubblicazione è il primo studio matematico edito dalla ripristinata casa editrice dell'Università di Londra.

L'Accademico Segretario presenta le pubblicazioni inviate in omaggio, mettendo in particolare rilievo i due volume della VI edizione dell'importante

opera « Biochimica » del Socio Rondoni, i tre tomi dell'interessante lavoro del Socio Feruglio dal titolo « Descripcion geologica de la Patagonia », a cura del Ministero dell'Industria e Commercio della Repubblica Argentina, con due allegate grandi carte geologiche dell'Argentina e della Patagonia, il volume « Cathode ray tube dispays », a cura dei proff. T. Soller, M. A. Starr e G. E. Valley jr., pubblicato sotto gli auspici del « Massachusetts Institute of Technology », la relazione tenuta dal Socio A. Russo, nella sua qualità di Presidente dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali di Catania, in occasione dell'inaugurazione dell'anno accademico 1951 dell'Accademia stessa (« estratto del Bollettino delle sedute dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania », serie IV, fascicolo VII, gennaio–marzo 1951), uno studio del predetto Socio dal titolo « Potere germinativo del soma e germi embrionali nelle proliferazioni cellulari preblastomatose » (estratto c. s.), un lavoro del Socio Trotter dal titolo « La micolichenologia e la fitopatologia nel quadro del popolamento bio–geografico della Libia (estratto da « Delpinoa », nuova serie del « Bullettino dell'Orto Botanico dell'Università di Napoli » – Vol. III – Tomo XX – 1951) e una pubblicazione della Società Geografica di Lisbona in occasione del settantacinquesimo anniversario della Società stessa.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci U. Amaldi, G. Levi, Giordani, Crocco, Segre, Bonino, Carrelli e Perucca.

Il Socio Meneghetti presenta la Memoria di Benigno e Berti dal titolo « Influenza dei detergenti sullo sviluppo, sulla divisione e sulla respirazione di germi gram–negativi ».

Sarà nominata una apposita Commissione.

Il Segretario Accademico legge l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

Bonino G. B. e Chiorboli P. – Studi sull'aldeide pirrolica. I. – Spettro Raman dell'aldeide pirrolica allo stato cristallino (pres. dal Socio G. B. Bonino).

Bonino G. B. e Marinangeli A. U. – Studi sull'aldeide pirrolica. II. – Momento elettrico molecolare dell'aldeide pirrolica (Pres. dal Socio G. B. Bonino).

Crocco G. A. – La barriera delle temperature nei missili geodetici. (Traiettoria durante la combustione). II Nota introduttiva.

Margaria R. – La respirazione di miscele d'aria e CO_2 a bassa pressione barometrica.

Boni A. – Notizie preliminari sulla tettonica del margine sud–orientale della regione fra il Sebino e l'Eridio (pres. dal Corrisp. Gb. Dal Piaz).

Cennamo F. – Diffrazione di raggi X nel benzolo al variare della temperatura (pres. dal Socio A. Carrelli).

FANTAPPIÈ L. – Calcolo esatto degli autovalori e delle autofunzioni di un nucleo « variato », per una variazione di tipo elementare (pres. dal Socio F. SEVERI).

GAMBA A. – Su di una interessante deduzione dalla teoria unitaria di Einstein (pres. dal Socio E. PERUCCA).

ROTH L. – Sugli invarianti d'una varietà algebrica a tre dimensioni (pres. dal Corrisp. B. SEGRE).

ROWINSKI P. e MANUNTA G. – Influenza dell'ovaio sulla sopravvivenza di ratti paratiroidectomizzati (pres. dal Socio G. LEVI).

RUGGIERI G. – Sul Piano Calabriano Gignoux 1910 (pres. dal Socio M. GORTANI).

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 12 maggio 1951

AMALDI Ugo. — Vedi: LEVI-CIVITA Tullio.

Atti del terzo Congresso dell'Unione Matematica Italiana tenuto in Pisa nei giorni 23-26 settembre 1948. Roma, Cremonese, 1951. Pp. 265, in-8°.

BOAGA Giovanni. — *Ricerche analitiche sulla distribuzione della proprietà fondiaria in Italia*. Roma, Istit. Poligr. dello Stato, 1950. Pp. 66, in-4°. (Pubblicazione n. 3 della « Rivista del Catasto »).

BONAIUTO Giuseppe. — *La longevità*. Catania, Tip. Sorace e Siracusa, 1939. Pp. 8, in-16°.

— *Il moto perpetuo relativo*. Ferla (Siracusa), Tip. Garro, 1918, Pp. 3, in-8°.

— *Saggio critico di astronomia*. Catania, Tip. Frat. Viaggio-Campo, 1951. Pp. 14, in-8°.

CASORATI Felice. — *Opere*. A cura dell'Unione Matematica Italiana. Vol. I. Roma, Cremonese. 1951. Pp. XIII-420, in-8°.

Cathode Ray Tube Displais. Edided by Theodore Soller, Merle A. Starr, George E. Valley. New York ecc., McGraw-Hill Book Company, 1948. Pp. XVII-476, in-8°, con figg.

DEJŠA, Adrian. — *Kritika neevklidovoj geometrii i dokazatel'stvo pjatogo postulata*. Pariž, Maison du livre étranger, 1951. Pp. 19, in-16°.

DE VONDERWEID Edoardo. — *Ipparco e il tempo. L'astronomia di domani*. (Opera postuma). Todi, Tip. Tiberini, 1950. Pp. 122, in-8°, con figg.

DI RAIMONDO Giovanni. — *La ricostruzione delle F. S. alla fine del 1950*. Estr. da « Ingegneria Ferroviaria », 1951, n. 1.

Epistolario di Alessandro Volta. Ed. Nazionale sotto gli auspici dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e della Società Italiana di Fisica. Vol. II. Bologna, Zanichelli, 1951. Pp. XXIII-568, in-4°, con tavv.

FERUGLIO Egidio. — *Descripción geológica de la Patagonia*. Buenos Aires, « Coni », 1949-50. Voll. 3, in-8°, con tavv. e carte annesse.

GOSSELIN O. — *Contribution à l'étude de l'invasion des organismes maternel et fœtal par les microbes des voies génitales inférieures au cours du travail*. (*Invasion du liquide amniotique du sang maternel et du sang fœtal*). Liège, Impr. H. Vaillant-Carmanne, 1945. Pp. 123, in-8°.

LEVI-CIVITA Tullio e AMALDI Ugo. — *Lezioni di meccanica razionale*. Vol. II: *Dinamica dei sistemi con un numero finito di gradi di libertà*. Parte I. Nuova ed. Bologna, Zanichelli, 1951. Pp. IX-510, in-8°.

PIANTONI Luigi. — *Bioergia e Allobioergia. Prolegomeni all'Allergia*. Milano, Casa Ed. Ambrosiana, 1951. Pp. XX-425, in-8°. (Saggi di Bioteoretica, 1).

RONDONI Pietro. — *Biochimica*. Sesta ed. Torino, U.T.E.T., 1951. Voll. 2, in-8°.

RUSSO Achille. — *Inaugurazione dell'Anno Accademico 1951 dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania. Relazione del Presidente.* Estr. da « Bollettino delle Sedute dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania », ser. 4ª, 1951, fasc. 7.

— *Potere germinativo del soma e germi embrionali nelle proliferazioni cellulari freblastomatose.* Estr. da « Bollettino delle Sedute dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania », ser. 4ª, 1951, fasc. 7.

— *Potere germinativo dei tessuti somatici e germi embrionali nell'origine dei neoplasmi.* Estr. da « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, ser. 8ª, vol. X, 1951, fasc. 2.

SEGRE Beniamino. — *Arithmetical Questions on Algebraic Varieties.* London, University, 1951. Pp. 58, in-8°.

SOCIEDADE DE GEOGRAFIA DE LISBOA. – *75 anos de actividades ao serviço da Ciência e da Nação. 1875-1950.*

SOLLER Theodore. — Vedi: *Cathode Ray Tube Displays.*

STARR Merle A. – Vedi: *Cathode Ray Tube Displays.*

TROTTER Alessandro. — *La Mico-lichenologia e la fitopatologia nel quadro del popolamento biogeografico della Libia.* Estr. da « Delpinoa », vol. III, 1951.

UNIVERSITÉ DE LIÈGE. — *Hommage de la Faculté des Sciences Appliqués à l'Association des Ingénieurs sortis de l'École de Liège à l'occasion de son Centenaire.* Liège, Georges Thone Ed., 1947, Pp. 43, in-4°, con tavv.

VALLEY George E. — Vedi: *Cathode Ray Tube Displais.*

VERONESE Gino. — *Il servizio idrico durante la prima guerra mondiale.* Estr. da « Bollettino dell'Istituto Storico e di Cultura dell'Arma del Genio ».

VIGNERON Guy. — *Contribution à l'étude du spectre infra-rouge de la roténone.* Estr. da « Annales de la Société Scientifique de Bruxelles », 1951, fasc. 1.

D. DE BLASI.

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 6 giugno 1951

Presidenza del Socio G. Castelnuovo

NOTE DI SOCI

Geologia. — *Sull'origine e i viaggi delle ofioliti appenniniche.* Nota (*) del Socio Gaetano Rovereto.

Ritorno su alcune mie vedute che ritengo valevoli per risolvere parecchi problemi aventi relazione con le ofioliti mesozoiche dell'Appennino.

In questi ultimi trentanni si sono a mano a mano riconosciute per le rocce ofiolitiche delle consistenze dalle quali si sono derivate delle deduzioni petrogenetiche, tettoniche, stratigrafiche che hanno sostituito le sintesi del passato, che erano l'opera di due generazioni dei nostri vecchi geologi.

Da parte mia ho dimostrato, per quanto si riferisce alla tettonica e alla stratigrafia in area ligure:

che la formazione del *flysch* ofiolitifero da sola, senza il restante del *flysch* appenninico, è di età titonico–cretacea (gli altri invece la credevano, o tutta eocenica, o tutta cretacea);

che la stessa formazione costituisce una falda, la falda da me detta ligure–toscana, la quale si può ritenere una falda di scorrimento, su di una monoclinale, verso una fossa (pochi sono quelli che persistono nel credere che il tutto sia radicato, ossia autoctono);

che le ofioliti imballate in tale falda giunsero, prima del loro trasloco laterale, ad affiorare sul fondo marino durante il titonico, e che su di esse continuò la sedimentazione cretacea;

che il viaggio della falda avvenne posteriormente al luteziano medio, e prima del priaboniano, ossia nel luteziano superiore, e ciò ho affermato dopo aver precisato l'età del sopporto e della copertura di tale falda;

(*) Presentata nella seduta del 6 giugno 1951.

che il periodo orogenico alpino si verificò, per l'Appennino Settentrionale, nel priaboniano, e che di tal tempo, le ofioliti, sotto l'azione delle spinte tangenziali fecero un terzo viaggio, e subirono le ultime accentuate modificazioni.

Per quanto si riferisce alla petrogenesi, le deduzioni nuove ed essenziali sono le seguenti:

le ofioliti giunte alla superficie erano in gran parte ammassi *autometamorfici*, che per effetto della idratazione avevano perduto ogni potere intrusivo, per modo che il loro viaggio è da considerarsi una *estrusione*;

le rocce eruttive unite alle autometamorfiche, ma non tali, sono invece da considerarsi delle intrusioni avvenute in un secondo tempo sui perimetri dell'ammasso autometamorfico;

tali intrusioni perdurarono finchè l'ammasso autometamorfico rimase unito al domo *paramagmatico* dal quale derivava.

Ed ecco alcuni particolari riguardanti le condizioni sulle quali si basano queste premesse.

Se nel paleozoico si preparò l'arrivo nella strato–litosfera di ammassi in prevalenza granitici, avvenuto poi nel periodo orogenico erciniano, nel mesozoico, invece, si preparò l'arrivo delle rocce ofiolitiche, in particolar modo delle serpentiniti, che poi terminarono nelle pieghe alpine dell'area mediterranea e altrove, sino all'estremo delle pieghe stesse, ossia sino alla Nuova Zelanda. E l'arrivo delle serpentiniti nella strato–litosfera rappresenta l'insieme fenomenologico più accertato e più interessante di quanto si può riferire allo spostamento per estrusione delle rocce plutoniche, come l'ho immaginato, pur cercando di tenermi, quanto più era possibile, vicino alla realtà.

Inoltre, questo fu l'ultimo episodio di un grande sommovimento magmatico, al quale occorse la durata di tutti i tempi mesozoici, per conseguire la carica sufficiente a produrre un diastrofismo che interessò tutti i continenti, e che minacciò di ridurre in pezzi la strato–litosfera, senza che si possa conoscere quale fu la vera natura e l'origine delle forze che così operarono nell'interno del globo, mentre che il mondo organico dell'esterno subiva due grandi modificazioni: l'una nell'ambiente continentale, con la sparizione dei grandi rettili ossuti di clima steppico, sostituiti da mammiferi di clima umido; l'altra nell'ambiente marino, con una accentuata modificazione nel plancton, forse perchè i mari erano diventati più agitati; ma non vi fu, al contrario di quanto da molti si ripete, un'espansione glaciale, ossia un massimo di mutazione climatica, perchè tale espansione si verificò parecchi milioni di anni dopo, quando, non solo la vera orogenesi, ma anche i movimenti epirogenetici accentuati erano terminati: i ghiacciai del gunziense appariscono, quando i laghi epirogenetici villafranchensi stanno già colmandosi.

Ma ritornando all'essenziale della nostra ricerca, troviamo che l'associazione, quasi costante, negli ammassi ofiolitici di un certo volume, di più specie litologiche dimostra, che l'estrusione è cominciata dopo le differenziazioni di un magma, che per la sua natura, era parte della strato–litosfera, o della crosta a miscuglio sialico–simaico, a non più di 40 km. di profondità.

Con questa profondità non si giunge alla zona magmatica dunitica o peridotica, ma ad una zona *paramagmatica*, da cui si partì una *intumescenza autome-*

tamorfica per idratazione, differenziata in serpentiniti, in gabbri saussuritizzati, in diabasi uralitizzati, che non tardò a produrre un vario numero di intumescenze minori o pustole, più o meno ravvicinate e di differente volume, che in seguito avranno molta influenza sulla forma, l'entità e la distribuzione delle masse estruse.

Tuttavia non siamo ancora in fase orogenica propria; ma energiche tensioni, in varie direzioni, sono già in atto, e i domi e le altre protuberanze autometamorfiche sotto l'influenza di tali tensioni, si staccano dalla zona paramagmatica, per compiere il viaggio estrusivo di almeno venti chilometri.

Ma prima del distacco avviene un altro fenomeno, quello di intrusioni, o iniezioni, periferiche, di rocce non idratate, di peridotiti, diabasi, gabbri franchi. Queste intrusioni le osserviamo ora formare tutto un ammasso, in vario modo consociato, con le rocce autometamorfiche, idratate. In un'ultima fase si verificano fenomeni batidrici, consistenti in acque silicifere, carbonicate, magnesiache, alluminifere, boracifere che produrranno, associate alla cataclasi e alla milonitizzazione derivanti dalle tensioni in opera, ftaniti, ofisilici, oficalci, clorititi, albititi, calcefiri, ganghe datolitiche, episodi finali della litogenesi.

Col distacco le iniezioni eruttive periferiche cessano, e la massa in prevalenza idratata e isolata non possiede più alcun potere eruttivo proprio, e per muoversi ha ormai bisogno di spinte provenienti da un regime di tensioni sinorogeniche, che la spingono verso le regioni di minore densità, ossia verso l'esterno. È questa la condizione dell'estrusione, come io da tempo l'ho immaginata, che da un rigonfiamento paramagmatico passa a laccoliti e simili, scagliate sui margini, e poi ad ammassi lentiformi, e mandorle più o meno grandi, sino a piccolissime, lisciate, laminate, frantumate, di rado con resti troncati di filoni e vene di eruzione e metallifere.

Siccome questo sviluppo di fenomeni si è ripetuto nel mesozoico almeno tre volte, di tre tempi sono i sedimenti che ricettano le ofioliti: carnico–norico, liassico, titonico–cretaceo, con differenziazioni magmatiche, di cui ho già ripetutamente detto, e di varia localizzazione, per modo che l'arrivo più recente sta a sè, e gli altri due sono in parte concomitanti, ma senza miscuglio. Ciò vuol dire, che le vie di estrusione si sono ripetutamente spostate, sempre attingendo dallo stesso magma, ma con variazioni di profondità e di pressione, e che si sono chiuse dopo ogni passaggio.

Dove, per la grande attività delle intrusioni perimetrali, non è avvenuto lo stacco del nucleo autometamorfico, e la via eruttiva o estrusiva non si è occlusa, il fenomeno si è tramutato in vulcanico, come in Bosnia; ma nell'Appennino ciò non si è verificato.

Dei sedimenti che ricevettero queste tre estrusioni, i due più antichi, del trias e del lias, si sono metamorfosati in grado *benigno*, sericitizzandosi, il più recente si è solo solidificato.

Nell'area ligure, a fianco delle ofioliti, le rocce eruttive e gli scisti cristallini paleozoici si sono modificati, come ovunque, subendo un metamorfismo differente, e con diverso sviluppo dei fenomeni petrogenetici e tettonico–orogenetici. Riconosciuto da me e dal Conti, tale sviluppo, corrisponde a quello precisato

per altrove anche dagli autori più recenti, ad esempio da Read [1], Niggli [2], Kennedy [3], Bailey [4].

Le sue fasi sono le seguenti:

metamorfismo precoce, contemporaneo ai movimenti iniziali (paragneiss, parascisti);

eventi migma–magmatici dell'acme orogenica, granitizzazioni sinmetamorfiche; assorbimenti sinorogenici e laminazioni (graniti e migmatiti, gneiss e micascisti ultra metamorfici);

iniezioni alcaline e metasomatiche, come episodi finali paramagmatici;

milonitizzazioni, cataclasi e simili dai movimenti orogenici tangenziali finali e più esterni, a spese di tutto l'insieme cristallino.

Manca sino ad ora un rilievo delle maggiori masse ofiolitiche appenniniche fatto con i criteri ora esposti; ma lo si può facilmente eseguire adattandolo, per guadagnar tempo, a quelli già esistenti in grande scala; per la Liguria, ad esempio, a quelli di Issel e Mazzuoli.

E nemmeno è stato ancora raccolto il materiale, di cui ho già qualche indizio, che dimostri l'intervento migmatitico, ossia la presenza di iniezioni di differenziazione peridotica, diabasica, gabbrica, letto per letto, nell'imballaggio sedimentizio, o nel perimetro del nucleo autometamorfico.

Fisiologia. — *La respirazione di miscele d'aria e* CO_2 *a bassa pressione barometrica* [*]. Nota [**] del Corrisp. Rodolfo Margaria.

È noto che Mosso, avendo scoperto l'acapnia da bassa pressione barometrica, attribuì a questa il disturbo del mal delle altitudini, e cercò di rimuovere questo male, somministrando all'individuo che ne era colpito non ossigeno, ma CO_2.

Una miscela di aria e CO_2 contiene necessariamente meno ossigeno che l'aria pura, ed il fatto che i soggetti si avvantaggiassero dalla respirazione della miscela di CO_2 costituiva per Mosso la prova che il mal delle altitudini non era da attribuire all'anossia ma all'acapnia. La polemica sulla causa del mal delle altitudini, se cioè questo fosse da attribuire all'anossia o all'acapnia si potrasse per circa mezzo secolo.

Margaria (1938) mise in evidenza che se pure l'aria inspirata alla quale è stata addizionata CO_2 contiene meno O_2 dell'aria comune, pure per l'iperventilazione prodotta dal CO_2 e per la diminuzione dell'azoto, provocata dall'aggiunta di CO_2 all'aria, essa esercita una pressione parziale di O_2 negli alveoli maggiore

(1) « Quart. Journ. Geol. Soc. », London, n. 417, p. 136 (1949).
(2) « Washington Acad. Sc. », vol. 38, p. 289 (1948).
(3) « Geolog. Magaz. », vol. 86, p. 43 (1949).
(4) « Geolog. Magaz. », vol. 86, p. 73 (1949).
(*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisiologia dell'Università di Milano.
(**) Presentata nella seduta del 12 maggio 1951.

di quando si respira aria pura, mentre la pressione parziale negli alveoli non può variare apprezzabilmente (ved. Barcroft e Margaria, 1931) proprio per l'azione stimolante che il CO_2 ha sul centro respiratorio e per l'aumento della ventilazione polmonare che ne segue. Quindi, respirando la miscela di Mosso, il sangue che scorre nei polmoni si viene a trovare a contatto con una miscela gasosa in cui la pressione parziale dell'ossigeno non è affatto diminuita, ma anzi è aumentata.

Per questo meccanismo, il vantaggio offerto da una respirazione di una miscela di CO_2 non è più riconducibile ad un aumento del CO_2 nel sangue, ma può essere convenientemente ricondotta all'aumento dell'O_2. Questa ipotesi ha in seguito trovato numerose conferme sperimentali (Talenti, 1940, ecc.).

La rappresentazione diagrammatica delle condizioni respiratorie data recentemente da Fenn e collaboratori (1946) sulla base dell'equazione dell'aria alveolare, elaborata particolarmente da autori americani (ved. Boothby, 1944), permette di circoscrivere questo problema e di impostarlo su basi matematiche, in modo da averne una soluzione sicura, semplice, e quantitativa.

L'equazione dell'aria alveolare, espressa in termini di pressione del CO_2 negli alveoli ($P_{A_{CO_2}}$) in funzione della pressione parziale dell'O_2 negli alveoli ($P_{A_{O_2}}$) è la seguente:

$$(1) \qquad P_{A_{CO_2}} = \frac{P_{I_{O_2}} Q + P_{I_{CO_2}}}{1 - F_{I_{O_2}}(1 - Q)} - \frac{F_{I_{CO_2}}(1 - Q) + Q}{1 - F_{I_{O_2}}(1 - Q)} P_{A_{O_2}}$$

ove con P_I si intende la pressione del gas nell'aria inspirata satura di H_2O, con F la frazione del gas nell'aria alveolare (F_A) o inspirata (F_I) e con Q il quoziente respiratorio.

Ad una determinata altezza, e respirando aria di nota composizione, per un determinato valore di Q l'equazione (1) diventa l'equazione di una retta, del tipo $y = a - bx$: variando il valore di Q variano le costanti a e b e si hanno varie rette per ogni valore di Q, che irradiano tutte a ventaglio da un punto del diagramma definito da $P_{A_{O_2}} = P_{I_{O_2}}$ e da $P_{A_{CO_2}} = P_{I_{CO_2}}$.

Nella fig. 1 sono stati tracciati tre ventagli di rette iso-Q calcolate dalla (1) per un individuo che si trovi ad una altezza di 6000 m. s. l. m. e che respiri *a*) aria o *b*) una miscela di aria più il 10 % di O_2 o *c*) una miscela di aria più il 10 % di CO_2.

Supponendo che questo individuo consumi 312 ml di O_2 per minuto ed abbia un Q. R. di O. 8 possono essere calcolate, secondo Fenn e collaboratori (1946), le linee iso-ventilazione alveolare sul presupposto della costanza dell'O_2 consumato (V_A) o sul presupposto della costanza del CO_2 prodotto ($V_{A'}$): tali linee sono state calcolate dalle seguenti formule ed introdotte nel grafico

$$P_{A_{CO_2}} = \frac{P_{I_{O_2}}(1 - F_{I_{O_2}}) + F_{I_{CO_2}} P_{I_{CO_2}}}{F_{I_{O_2}}} - \frac{864\, X_o (1 - F_{I_{O_2}} - F_{I_{CO_2}})}{V_A F_{I_{O_2}}} - \frac{1 - F_{I_{CO_2}}}{F_{I_{O_2}}} P_{A_{O_2}}$$

$$P_{A_{CO_2}} = P_{I_{CO_2}} + \frac{864\, Y_o (1 - F_{I_{O_2}} - F_{I_{CO_2}})}{V_{A'}(1 - F_{I_{O_2}})} + \frac{F_{I_{CO_2}} P_{I_{CO_2}}}{1 - F_{I_{CO_2}}} - \frac{F_{I_{CO_2}}}{1 - F_{I_{O_2}}} P_{A_{O_2}}.$$

Y_o X_o indicano in ml/min la produzione di CO_2 e rispettivamente il consumo di O_2.

Se l'individuo respira aria, le sue condizioni saranno definite dal ventaglio di linee iso–Q che si trova a sinistra ed in basso del diagramma: se gli si somministra una miscela al 10 % di O_2 in aria, la nuova condizione sarà definita

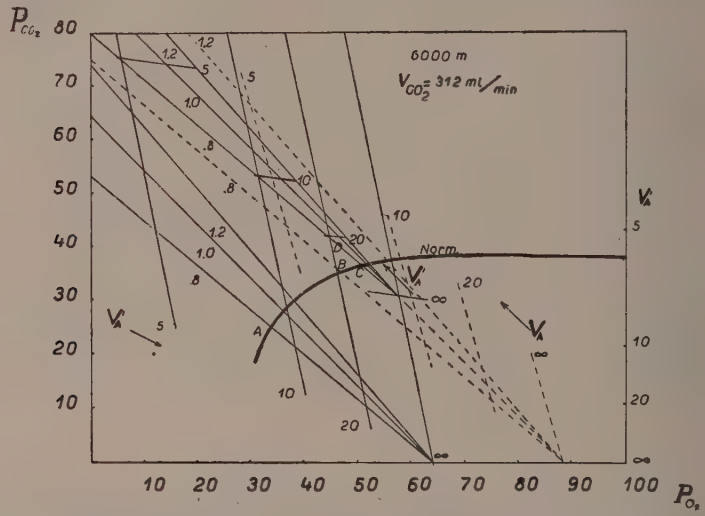


Fig. 1. – Diagramma alveolare per un individuo che a 6.000 m. di altezza s. l. m. consumi 312 ml/min di O_2 con un Q. R. = 0.8. Il ventaglio di rette in basso e a sinistra si riferisce alla respirazione di aria pura. Quelli di destra si riferiscono alla respirazione di una miscela di O_2 al 10 % in aria (rette tratteggiate) o di CO_2 al 10 % in aria (rette in tratto pieno). I tre ventagli di linee iso–Q sono costituiti di tre rette ciascuno, corrispondenti ai tre valori di Q. R. indicati, 0.8, 1.0, e 1.2. Delle due serie di linee iso–V_A, calcolate cioè sulla costanza dell'ossigeno consumato, quelle in tratto pieno valgono per le condizioni di respirazione di aria pura e della miscela al 10 % di CO_2: quelle tratteggiate valgono per le condizioni della respirazione della miscela di O_2 al 10 % in aria. Le linee iso–$V_{A'}$ parallele all'ascissa (non disegnate) i cui valori sono indicati a destra nel diagramma si riferiscono alla respirazione di aria o di O_2 al 10 %. Quelle riferentesi alla respirazione della miscela al 10 % di CO_2 in aria sono disegnate per un breve tratto e intersecano le corrispondenti linee iso–Q: esse non sono più parallele alle ascisse, ma inclinate in basso e a destra. Si noti come il comportamento delle linee iso–Q per la miscela di CO_2 offre molta più analogia con quelle corrispondenti alla miscela al 10 % di O_2 che non con quelle corrispondenti alla respirazione di aria, malgrado che il punto di incrocio delle rette iso–Q, corrispondente al valore sull'ascissa di P_{O_2}, sia per la miscela di CO_2 spostato ancora più a sinistra rispetto all'aria.

dal ventaglio di rette tratteggiate a destra nella fig. 1. Il nostro soggetto passerà dalla condizione definita dal punto A lungo la linea indicata con « Norm. », a quella definita dal punto B, alla quale corrisponde lo stesso valore di Q. R.

Le linee iso–$V_{A'}$ (scala sull'ordinata a destra), sono comuni per le due condizioni, mentre le iso–V_A sono differenti, e indicate in tratteggio per la nuova condizione.

Appare come dal passaggio dalla condizione A alla condizione B, diminuisca la ventilazione alveolare da circa 9 a circa 6 l/min., mentre il CO_2 aumenta

da 26 a 36 mm Hg, e la pressione parziale di O_2 negli alveoli aumenta più sensibilmente, da 33 a 47 mm Hg.

Se a questo soggetto, anzichè fargli respirare una miscela al 10 % di O_2 in aria, gli si somministra una miscela al 10 % di CO_2 in aria, il ventaglio di curve iso-Q sarà quello definito dal ventaglio di rette in tratto pieno, che si trova in alto nel diagramma, e che sono comprese nel ventaglio di rette caratteristiche per la respirazione della miscela al 10 % di O_2 (fig. 1).

Queste linee iso-Q si irradiano da un punto corrispondente a $P_{A_{CO_2}} = 31$ mm Hg, $P_{A_{O_2}} = 58$ mm Hg, valori corrispondenti alle pressioni parziali che questi gas hanno nell'aria inspirata umida, satura di vapore acqueo.

Per questo nuovo ventaglio di curve valgono ancora le linee iso-V_A che valgono per la respirazione in aria pura, mentre le linee iso-$V_{A'}$ sono quelle linee leggermente inclinate in basso e a destra, che segano il ventaglio di rette.

Un soggetto nelle condizioni definite dal punto A, che passi alla respirazione dell'aria contenente il 10 % di CO_2 in aria, tende a portarsi nelle condizioni definite dal punto C, che non è molto lontano dal punto B.

Le condizioni respiratorie nella condizione C sono leggermente migliori che nella condizione B: la pressione parziale dell'O_2 negli alveoli è 3 mm Hg superiore e la pressione del CO_2 negli alveoli è 1 mm Hg superiore.

Però la ventilazione sarà molto aumentata, poichè sarà salita a circa 40 l/min come è indicato dalle linee iso-V_A e iso-$V_{A'}$. Ma le condizioni di pO_2 e pCO_2 alveolari definite dal punto C, non sono sufficienti a mantenere un valore così elevato di ventilazione polmonare: difatti corrispondono normalmente ad un valore di ventilazione di soli 6 l/min.

La ventilazione perciò diminuirà, e conseguentemente il punto C tenderà a spostarsi in alto e a sinistra, lungo la linea corrispondente ad un quoziente = 0,8.

Ora risulta dalle determinazioni eseguite da Talenti (1941) da Margaria (1941) che quando si respiri aria contenente CO_2 alla pressione parziale di 31 mm Hg a 6000 m., la pressione parziale del CO_2 negli alveoli sale a 41 mm Hg. Il punto C si porterà quindi definitivamente nella posizione D. Ma anche tra i punti B e D, cioè tra le condizioni di aria arricchita in O_2 o di aria arricchita nella stessa misura di CO_2, la differenza non è grande: la pressione parziale dell'O_2 negli alveoli è pressochè la stessa, e la pressione parziale del CO_2 negli alveoli è di 5 mm Hg superiore, se si respira la miscela di CO_2.

Un aumento del solo pCO_2 alveolare può tornare utile in casi di acapnia, ma nella condizione B non esiste acapnia.

La differenza sostanziale tra la condizione B e quella D sta nella ventilazione polmonare, che è di soli 6 l/min nel primo caso, e di oltre 20 l/min nel secondo.

Il centro respiratorio dell'individuo che respira la miscela di CO_2 si viene dunque a trovare abnormente sollecitato, per mantenere una pressione parziale dell'O_2 negli alveoli, che non è superiore a quella che si ottiene respirando ossigeno puro.

Appare chiaramente dalla fig. 1 che se il nostro soggetto, anzichè avere un Q. R. di 0,8 avesse un Q. R. di 1, sia che respiri una miscela al 10 % di

ossigeno o una miscela al 10 % di CO_2 in aria, si viene a trovare esattamente sulla stessa retta iso–Q: il punto corrispondente alla respirazione della miscela di CO_2 sarà per le ragioni anzidette spostato più in alto e a sinistra rispetto a quello corrispondente alle condizioni che si riferiscono alla respirazione della miscella di O_2, e negli alveoli quindi la pressione del CO_2 sarà aumentata di qualche mm Hg, e quella dell'O_2 diminuita di altrettanto.

Sensibilmente peggiorate invece saranno le condizioni dell'individuo che parta da un Q. R. di 1,2: in tali condizioni il soggetto che respira aria e passa a respirare la miscella di O_2 verrà a trovarsi nelle condizioni definite dal punto di incrocio tra la linea « Norm. » e la linea iso-Q tratteggiata e indicata con 1,2; mentre, respirando la miscela di CO_2, le condizioni saranno definite da un punto, che si troverà sulla linea iso-Q = 1,2 del ventaglio di rette corrispondente alla respirazione della miscella di CO_2 probabilmente prossimo alla linea iso-$V_{A'}$ = 20, a destra di D. Rispetto alla respirazione della miscela di ossigeno si avrà allora un aumento di 3 mm di CO_2 negli alveoli, valore che non è molto significativo ai fini del benessere, mentre si avrà una diminuzione di oltre 6 mm Hg nella pO_2 alveolare, valore che può essere molto significativo ai fini dello stato di benessere.

Comunque mi pare interessante, perchè particolarmente dimostrativa, questa rappresentazione: essa permette di rendersi conto con un solo colpo d'occhio:

a) come, passando dalla respirazione di aria alla respirazione di una miscela di aria e CO_2, nella quale la pressione parziale dell'O_2 è diminuita, aumenta negli alveoli non tanto la pressione parziale del CO_2 quanto e specialmente quella dell'O_2,

b) le condizioni dei gas negli alveoli siano pressochè eguali, quando si respiri una miscela aria–O_2 o una miscela aria–CO_2, purchè l'O_2 o il CO_2 aggiunto siano nelle stesse proporzioni; per questa ragione Margaria (1941, vedi anche Margaria–De Caro 1950) aveva introdotto il concetto di pressione parziale dei gas respiratori nell'aria ambiente, cioè ($P_{I_{O_2}} + P_{I_{CO_2}}$), come molto più significativo, ai fini respiratori, del dato riferentesi alla sola pressione parziale dell'O_2 nell'aria inspirata. E infine

c) la respirazione della miscela di CO_2 sia svantaggiosa, perchè impone uno stimolo eccessivo al centro respiratorio ed implica un aumento dell'attività respiratoria, che non può certo essere utile all'organismo. Questo aumento dell'attività respiratoria certamente è dannoso economicamente, specialmente quando si disponga di una quantità limitata della miscela respiratoria, come si può verificare nel volo in aereo.

Conclusioni. – Con l'ausilio del diagramma dell'aria alveolare, si conferma come la somministrazione di CO_2 ad un individuo che si trovi a bassa pressione barometrica equivale pressochè alla somministrazione di O_2: è leggermente più efficace se il Q. R. del soggetto è inferiore a 1, è invece meno efficace dell'O_2 se il Q. R. del soggetto è superiore a 1.

In ogni caso la somministrazione di CO_2 costringe ad un forte aumento di attività il centro respiratorio ed i muscoli respiratori, per mantenere quelle condizioni di pressione parziale dei gas respiratori negli alveoli che si ottengono, con la sola somministrazione di O_2, più facilmente e con minor dispendio.

BIBLIOGRAFIA.

BARCROFT J. e MARGARIA R., «J. Physiol.», 72, 175 (1931).
BOOTHBY W. M. *Handbook of Respiratory Data*, «Nat. Res. Council», Washington D. C., U. S. A. (1944).
FENN W. O., RAHN H. e OTIS A. B., «Am. J. Phsyiol.», *146*, 637 (1946).
MARGARIA R., «Riv. Med. Aereon.», 2, 209 (1938).
MARGARIA R., «Riv. Med. Aereon.», 2, 321 (1939).
MARGARIA R., «Riv. Svizz. di Med.» (dedic. al Prof. W. R. Hess) 71, 157 (1941).
MARGARIA R. e DE CARO L., *Principî di Fisiologia Umana* (vol. I, cap. IV, Respirazione) 2ª Ed. Vallardi, Milano (1950).
TALENTI C., «Riv. Med. Aereon.», 2, 209 (1939).

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Equazioni differenziali. — *Nuovi criteri di stabilità per l'equazione* $y''+A(x)y=0$. Nota I di GIOVANNI PRODI, presentata (*) dal Corrisp. G. ASCOLI.

La ricerca di criteri di stabilità per l'equazione

$$(1) \qquad y''+A(x)y=0$$

nel caso in cui $A(x)$ tenda (anche in senso opportunamente generalizzato), per $x\to+\infty$, ad una costante positiva, ha attratto da tempo l'attenzione di molti analisti. I criteri a cui si è pervenuti si possono così classificare:

la differenza tra $A(x)$ e il suo limite è una funzione assolutamente integrabile nell'intorno dell'infinito (criterio (I));

la funzione $A(x)$ è a variazione limitata nell'intorno dell'infinito (criterio (VL));

la funzione $A(x)$ è somma di una funzione a variazione limitata e di una assolutamente integrabile nell'intorno dell'infinito (criterio (I+VL)).

Quest'ultimo criterio discende come caso particolare da un teorema di confronto di G. Ascoli (1) che afferma:

«Se la (1)': $u''+A(x)u=0$ ha tutti i suoi integrali limitati, anche l'equazione (2): $y''+(A(x)+Q(x))y=0$, dove $Q(x)$ è assolutamente integrabile nell'intorno dell'infinito, ha tutti i suoi integrali limitati».

(*) Nella seduta del 14 aprile 1951.

(1) G. ASCOLI, *Sul comportamento asintotico degli integrali delle equazioni differenziali del 2° ordine.* «Rend. Accad. Lincei» (6), 22, pp. 234-243 (1935). Abbiamo indicato i criteri di stabilità con i simboli introdotti dal medesimo autore nella Nota: *Sulla forma asintotica degli integrali dell'equazione* $y''+A(x)y=0$ *in un caso notevole di stabilità.* «Revista de Mat. y de Fis. Teor. de la Univ. de Tucuman», vol. 2° (1941).

Per un'ampia bibliografia ved.: G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, vol. II, pp. 23-31.

Questo teorema, particolarmente interessante anche perchè permette di prescindere completamente, nelle ricerche di stabilità, dalle proprietà differenziali della funzione $A(x)$, verrà richiamato nel seguito. Negli ultimi anni questi risultati sono stati estesi, in vario modo, alle equazioni di ordine superiore e ai sistemi [2] e sono anche stati approfonditi in vari sensi, ma lo studio delle condizioni di stabilità per la (1) non ha compiuto sostanziali progressi [3].

Sono, d'altra parte, frequenti, anche nelle applicazioni, casi che non rientrano nei criteri citati e in cui la stabilità può essere accertata con procedimenti particolari. Il presente lavoro trae appunto origine da un esempio di tal genere segnalatomi dal prof. G. Ascoli, precisamente l'equazione:

$$y'' + \left(1 + \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{x}\right) y = 0$$

i cui integrali sono stabili per $\alpha \neq \pm 2$, mentre non lo sono più per $\alpha = \pm 2$ [4]. Questo esempio mi ha fatto supporre che, volendo uscire dai criteri citati e gravare meno nelle ipotesi riguardanti la funzione che potremmo dire di «perturbazione» (in questo caso $\operatorname{sen} \alpha x / x$) fosse necessario tener conto della possibilità di «risonanze» con gli integrali dell'equazione-limite (in questo caso la $y'' + y = 0$) e, quindi, fare entrare anche questi esplicitamente nelle condizioni di stabilità. Ho così trovato i teoremi I e II che costituiscono un'estensione del criterio (I) (o, più esattamente, del teorema di G. Ascoli citato sopra) e il teorema III che costituisce un'estensione del criterio (VL).

Il metodo introdotto può essere usato ripetutamente e condurre a criteri più raffinati di quelli esposti; tuttavia ho preferito non riportarli perchè essi risultano necessariamente più complicati e, d'altra parte, possono essere acquisiti in modo ovvio.

1. Teorema I. – *Si considerino le due equazioni differenziali:*

$$(1)' \qquad u'' + A(x)\, u = 0$$

$$(2) \qquad y'' + (A(x) + Q(x))\, y = 0;$$

la (1)′ *abbia i suoi integrali tutti limitati nell'intorno di* $+\infty$; *inoltre, detto* $H(x, \xi)$ *l'integrale della* (1)′ *che per* $x = \xi$ *soddisfa alle condizioni iniziali* $u(\xi) = 0$, $u'(\xi) = -1$, *la funzione* $Q(x)$ *soddisfi alle condizioni:*

a) *l'integrale:*

$$\int_{x_0}^{x} Q(\xi)\, H(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi,$$

essendo u *un qualsiasi integrale della* (1)′, *si mantenga limitato al variare di* x.

(2) Ved. i lavori di L. Cesari, D. Caligo, S. Faedo, N. Levinson, E. Levi ed altri.

(3) Se si eccettua un nuovo interessante criterio dato recentemente da Gusarov in: «Doklady Akad. Nauk SSSR» (NS), *68*, 217–220 (1949); esso afferma che le soluzioni di (1) sono limitate se $A(x)$ varia tra due numeri positivi e possiede derivata che è a variazione limitata nell'intorno dell'infinito.

(4) Il prof. G. Ascoli ha pubblicato un conciso studio di questa equazione nella Nota: *Osservazioni sopra alcune questioni di stabilità* (II), «Rend. Accad. Lincei» (8), vol. IX, 210–213 (1950).

b) *sia*:

$$\int_{x_0}^{x}\left|Q(\eta)\int_{\eta}^{x}Q(\xi)\,H(x,\xi)\,H(\xi,\eta)\,d\xi\right|d\eta<k<1 \qquad (k \text{ cost.})$$

per un x_0 *opportunamente fissato e per ogni* $x>x_0$.

Allora anche l'equazione (2) *ha tutti i suoi integrali limitati.*

Osserviamo che la condizione *a*) equivale alla seguente: « Per ogni $u(x)$ integrale della (1)' sono limitati gli integrali dell'equazione:

$$v''+A(x)v=-Q(x)u\,».$$

Dimostriamo dapprima per gli integrali della (2) una importante disuguaglianza che ci servirà anche nella dimostrazione del teorema II.

Osserviamo preliminarmente che alla funzione $H(x,\xi)$ si può assegnare l'espressione: $H(x,\xi)=u_1(x)\,u_2(\xi)-u_2(x)\,u_1(\xi)$, con $u_1(x)$ e $u_2(x)$ integrali linearmente indipendenti della (1)' e tali che il loro Wronskiano sia uguale ad 1, e che due integrali $u(x)$ della (1)' e $y(x)$ della (2) definiti dalle stesse condizioni iniziali nel punto x_0 sono legati dalla seguente equazione integrale:

$$y(x)=u(x)+\int_{x_0}^{x}Q(\xi)\,H(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi. \tag{3}$$

Sostituendo nel secondo membro della (3) alla $y(x)$ la sua espressione data dalla equazione stessa, otteniamo l'equazione integrale seguente cui pure soddisfa la $y(x)$:

$$y(x)=u(x)+\int_{x_0}^{x}Q(\xi)\,H(x,\xi)\,u(\xi)\,d\xi+\int_{x_0}^{x}Q(\xi)\,H(x,\xi)\left(\int_{x_0}^{x}Q(\eta)\,H(\xi,\eta)\,y(\eta)\,d\eta\right)d\xi$$

da cui, invertendo l'ordine delle integrazioni,

$$y(x)=u(x)+\int_{x_0}^{x}Q(\xi)\,H(x,\xi)\,u(\xi)\,d\xi+\int_{x_0}^{x}y(\eta)\,Q(\eta)\left(\int_{\eta}^{x}H(x,\xi)\,H(\xi,\eta)\,Q(\xi)\,d\xi\right)d\eta.$$

Prendendo il modulo di ambo i membri e maggiorando otteniamo:

$$|y(x)|\leq\left|u(x)+\int_{x_0}^{x}Q(\xi)\,H(x,\xi)\,u(\xi)\,d\xi\right|+\int_{x_0}^{x}|y(\eta)|\cdot\left|Q(\eta)\int_{\eta}^{x}H(x,\xi)\,H(\xi,\eta)\,Q(\xi)\,d\xi\right|d\eta.$$

Sia ora λ il punto in cui $|y(x)|$ raggiunge il suo massimo nell'intervallo (x_0,x) si avrà:

$$|y(\lambda)|\leq\left|u(\lambda)+\int_{x_0}^{\lambda}Q(\xi)\,H(\lambda,\xi)\,d\xi\right|+\int_{x_0}^{\lambda}|y(\eta)|\cdot\left|Q(\eta)\int_{\eta}^{\lambda}H(x,\xi)\,H(\xi,\eta)\,Q(\xi)\,d\xi\right|d\eta$$

$$|y(\lambda)|\leq\left|u(\lambda)+\int_{x_0}^{\lambda}Q(\xi)\,H(\lambda,\xi)\,d\xi\right|+|y(\lambda)|\,k$$

da cui:

$$|y(x)| \leqq |y(\lambda)| \leqq \frac{\left| u(\lambda) + \int_{x_0}^{k} Q(\xi)\, H(\lambda, \xi)\, u(\xi)\, d\xi \right|}{1 - k}.$$

Ma, per ipotesi (ricordando l'espressione di $H(x, \xi)$), il numeratore si mantiene limitato e ne segue l'asserto.

Se si assumono ipotesi più restrittive, e cioè la convergenza degli integrali di *a*) per $x_0 \to +\infty$ e la convergenza dell'integrale di *b*) per $x_0 \to +\infty$, qualunque sia x, e si suppone inoltre che l'integrale generalizzato così ottenuto tenda a zero per $x \to +\infty$, è facile vedere che si può applicare l'algoritmo di Liouville per la costruzione effettiva delle soluzioni della (2), note quelle della (1)′ e per ottenere formule di rappresentazione asintotica. In queste ipotesi, ad ogni integrale della (1)′ corrisponde uno ed un solo integrale della (2) che ne differisce di un infinitesimo per $x \to +\infty$.

2. Dal teorema dimostrato, nell'ipotesi $A(x) = 1$, discende il seguente corollario:

Condizione sufficiente affinchè tutti gli integrali dell'equazione:

$$y'' + (1 + Q(x))\, y = 0$$

siano limitati è che:

a) *gli integrali*

$$\int_{x_0}^{x} Q(\xi)\, d\xi \quad , \quad \int_{x_0}^{x} Q(\xi) \cos 2\xi\, d\xi \quad , \quad \int_{x_0}^{x} Q(\xi) \operatorname{sen} 2\xi\, d\xi$$

siano limitati al variare di x *in* $(x_0, +\infty)$;

b) *per ogni* $x > x_0$ *sia*:

$$\int_{x_0}^{x} \left| Q(\eta) \int_{\eta}^{x} \operatorname{sen}(x - \xi) \operatorname{sen}(\xi - \eta)\, Q(\xi)\, d\xi \right| d\eta < k < 1 \qquad (k \text{ cost.}).$$

Hanno, per esempio, tutti i loro integrali limitati le equazioni:

$$y'' + \left(1 + \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{x^{\sigma}}\right) y = 0 \,, \qquad \text{con} \quad \alpha \neq \pm 2 \quad , \quad \sigma > \frac{1}{2};$$

$$y'' + (1 + \operatorname{sen} x^{2\sigma})\, y = 0 \,, \qquad \text{con} \quad \sigma > 1;$$

la verifica delle condizioni *a*) e *b*) non è difficile tenendo presente l'espressione asintotica degli integrali del tipo

$$\int_{x}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \gamma x}{x^{\sigma}}\, dx \quad , \quad \int_{x}^{\infty} \operatorname{sen}(x^{2\sigma} + \lambda x)\, dx$$

e di quelli analoghi contenenti il coseno. Il primo esempio si può poi ampiamente generalizzare nel seguente enunciato:

L'equazione

$$y''+(1+f(x)\varphi(x))y=0$$

ha tutti i suoi integrali limitati se $f(x)$ *è una funzione monotona, a quadrato integrabile nell'intorno di* $+\infty$ *e* $\varphi(x)$ *è una funzione periodica limitata, con periodo* T *non multiplo di* π *e a valor medio nullo tra* 0 *e* T.

Infatti le condizioni *a*) sono soddisfatte, come si vede dal porre, per il secondo teorema della media:

$$\int_{x_0}^{x} f(\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi = f(x_0)\int_{x_0}^{\xi_1}\varphi(\xi)\,d\xi$$

$$\int_{x_0}^{x} f(\xi)\,\varphi(\xi)\cos 2\xi = f(x_0)\int_{x_0}^{\xi_2}\varphi(\xi)\cos 2\xi\,d\xi$$

$$\int_{x_0}^{x} f(\xi)\,\varphi(\xi)\operatorname{sen} 2\xi = f(x_0)\int_{x_0}^{\xi_3}\varphi(\xi)\operatorname{sen} 2\xi\,d\xi \qquad (\text{essendo } x_0\leq\xi_1,\xi_2,\xi_3\leq x)$$

e dall'osservare che gli integrali che compaiono a secondo membro sono tutti limitati (5).

La verifica della condizione *b*) è immediata, ove si tenga presente che l'integrale in questione si può scrivere

$$\left|\int_{x_0}^{x} f^2(\eta)\cdot\left|\varphi(\eta)\int_{\eta}^{\mu(x,\eta)}\operatorname{sen}(x-\xi)\operatorname{sen}(\xi-\eta)\,\varphi(\xi)\,d\xi\right|d\eta\right| \qquad \text{con} \quad \eta\leq\mu(x,\eta)\leq x$$

e si ricordi che $f(x)$ è a quadrato integrabile in $(x_0,+\infty)$.

(5) Per il primo integrale la cosa è ovvia. Per gli altri basterà far vedere che si mantiene limitato l'integrale $\int_{x_0}^{x_0+nT}\varphi(\xi)\,e^{2i\xi}\,d\xi$, con n intero positivo qualunque.

Ora è:

$$\left|\int_{x_0}^{x_0+nT}\varphi(\xi)\,e^{2i\xi}\,d\xi\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{x_0+(k-1)T}^{x_0+kT}\varphi(\xi)\,e^{2i\xi}\,d\xi\right| = \left|\int_{x_0}^{x_0+T}\varphi(\xi)\sum_{k=1}^{n}e^{2i\xi+2i(k-1)T}\,d\xi\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n}e^{2i(k-1)T}\cdot\int_{x_0}^{x_0+T}\varphi(\xi)\,e^{2i\xi}\,d\xi\right| \leq \frac{2}{|1-e^{2iT}|}\left|\int_{x_0}^{x_0+T}\varphi(\xi)\,e^{2i\xi}\,d\xi\right|.$$

Analisi matematica. — *Sui teoremi d'esistenza della teoria del potenziale e della rappresentazione conforme.* Nota II (*) di GAETANO FICHERA, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

3. TEOREMA D'ESISTENZA E FUNZIONE DI GREEN PER IL PROBLEMA DI DIRICHLET RELATIVO ALLE FUNZIONI ARMONICHE. – Sul lemma dato al n. 2 della Nota precedente lo scrivente ha basato la dimostrazione di alcuni teoremi di esistenza relativi alla teoria dei problemi al contorno per le equazioni lineari di tipo ellittico.

Caso ben particolare è il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace. La dimostrazione dell'esistenza della soluzione del detto problema, nonchè la costruzione esplicita della medesima (atta al calcolo numerico) è contenuta come caso particolare nella dimostrazione della esistenza della soluzione del primo problema fondamentale della statica elastica (5), ottenuta applicando un procedimento esistenziale, che consente, non solamente, di riottenere classici teoremi d'esistenza, ma, quel che più conta, di dimostrarne nuovi (6).

Vogliamo qui – unicamente a scopo di saggio – riportare questo teorema d'esistenza limitandoci a considerare il problema di Dirichlet per le funzioni armoniche, considerato dai Sigg. Garabedian e Schiffer.

Lo scrivente tiene ad avvertire i lettori, specialmente i cultori di teoria del potenziale, che le righe che seguono hanno soprattutto interesse in quanto presentano, applicato ad un caso assai particolare, un metodo esistenziale impiegabile – e già in effetti impiegato – in problemi assai generali.

Premettiamo alcune osservazioni. Indicata con $\mathfrak{A}$ la classe delle funzioni continue assieme alle loro derivate prime in D e tali che queste siano di quadrato sommabile in D, si dimostra (7) che se $U(z)$ è una di queste funzioni, fissato quasi ovunque ζ su C esiste il limite

$$\lim_{z \to \zeta} U(z) = \bar{u}(\zeta). \tag{3}$$

Inoltre la funzione $U(z)$ è uniformemente sommabile sulle frontiere di una successione di domini regolari che invade D. Per quanto riguarda C faremo l'ipotesi

(*) Per la Nota I, vedi questi «Reudiconti», vol. X, fasc. 5 (maggio 1951).

(**) Nella seduta del 14 aprile 1951.

(5) Cfr. loc. cit. (5), cap. IV.

(6) Cfr. G. FICHERA, loc. cit. (4) e (5) e *Analisi esistenziale per le soluzioni dei problemi al contorno misti, relativi all'equazione e ai sistemi di equazioni del II ordine di tipo ellittico.* «Ann. della Scuola Norm. Sup. Pisa», ser. III, vol. I, fasc. I–IV, pp. 75–100 (1947); *Sui problemi analitici dell'elasticità piana.* «Rend. Sem. Facoltà Scienze dell'Univ. Cagliari», vol. XVIII (1948-49); *On some general integration methods employed in connection with linear differential equations.* «Journ. of Math. and Phys.», vol. XXIX, n. 2, July 1950, pp. 59-68; *Risultati concernenti la risoluzione delle equazioni funzionali lineari dovuti all'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.* «Memorie dell'Acc. Naz. dei Lincei», ser. VIII, vol. III, sez. I, fasc. 1, Roma, 1950, cap. V. Cfr. anche M. PICONE, e G. FICHERA, *Neue funktionalanalytische Grundlagen für die Existenzprobleme und Lösungsmethoden von Systemen linearer partieller Differentialgleichungen.* «Monatshefte für Math.», *54*, Bd. 1950, 3 Heft., pp. 188-209. R. B. ANCORA, loc. cit. (5).

(7) Cfr. G. FICHERA, loc. cit. (5), cap. V.

che ogni curva chiusa C_p possa decomporsi in un numero finito di archi di classe 2 e in quasi ogni suo punto ζ possa condursi un segmento normale a C avente ζ per centro e contenuto per metà in D e per metà all'esterno di D.

Assegnata la funzione $\bar{u}(\zeta)$ su C, indicheremo con $\overline{\mathfrak{A}}$ la sottoclasse di $\mathfrak{A}$ costituita da tutte le funzioni di $\mathfrak{A}$ che quasi ovunque su C verificano la (3).

Sussiste il seguente teorema di esistenza per il problema di Dirichlet, relativo alle funzioni armoniche, nella classe $\mathfrak{A}$:

II. – *Se* $\overline{\mathfrak{A}}$ *non è vuota esiste in essa una funzione armonica* (8).

Sia C_1 il contorno esterno di D e $C_2, C_3, \cdots, C_n$ i contorni interni. Fissiamo il punto w_p nell'interno del dominio limitato da C_p $(p = 2, 3, \cdots, n)$ e consideriamo – ordinate in un'unica successione – tutte le infinite funzioni seguenti

$$(4) \qquad \Re z^m \;,\; \Im z^m \;,\; \Re (z - w_p)^{-m} \;,\; \Im (z - w_p)^{-m} \;,\; \log |z - w_p|$$
$$(m = 1, 2, \cdots \;;\; p = 2, 3, \cdots, n).$$

Ortonormalizziamo, col procedimento di Schmidt, sul dominio D la successione dei gradienti delle funzioni considerate. Perverremo ad una nuova successione $\{v_k(z)\}$ verificante le seguenti condizioni

$$(5) \qquad \iint_D \{\operatorname{grad} v_h(z) \times \operatorname{grad} v_k(z)\}\, d\tau = \delta_k^h \text{ (9)}.$$

Poniamo

$$a_k = \int_C \bar{u}(\zeta) \frac{\partial v_k}{\partial n}\, ds\,.$$

Poichè $\overline{\mathfrak{A}}$ per ipotesi non è vuota diciamo $U(z)$ una funzione di $\mathfrak{A}$ verificante la (3). Per l'asserita uniforme sommabilità di $U(z)$ sulle frontiere di una successione di domini che invade D si ha

$$a_k = \iint_D (\operatorname{grad} U \times \operatorname{grad} v_k)\, d\tau\,.$$

Ne viene che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ è convergente e pertanto la serie di vettori $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{grad} v_k$ converge in media in D ed, essendo le sue componenti armoniche,

(8) Si osservi che la classe $\mathfrak{A}$ è quella in cui si ricerca la soluzione del problema, quando questo viene posto dalla Fisica matematica e si esige che, per la soluzione, sia finito l'integrale di Dirichlet. Il teor. II, conformemente al modo in cui COURANT e HILBERT, (*Methoden der mathematischen Physik*, Springer, vol. II, 1937) enunciano i loro teoremi di esistenza, può anche mettersi sotto la forma seguente: *Data comunque una funzione* U *di* $\mathfrak{A}$ *esiste una funzione armonica appartenente ad* $\mathfrak{A}$ *e che quasi ovunque coincide con* U *su* C.

(9) La considerazione di una successione $\{v_k(z)\}$ verificante le condizioni di ortonormalità (5) è unicamente dovuta al fatto che in tal modo si rende nel seguito più spedito il discorso. *Ma la ortonormalità di* $\{\operatorname{grad} v_k(z)\}$ *non ha nessun valore concettuale*, potendosi lo stesso pervenire alla dimostrazione del teorema anche ragionando sulla successione iniziale non ortonormalizzata, purchè contenente *tutte* le funzioni (4). Cfr. loc. cit. (7) *On some general...* nn. 2 e 3.

essa convergerà uniformemente in ogni dominio interno a D. Poniamo

$$\operatorname{grad}\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{grad} v_k .$$

Sarà

$$(6) \qquad a_k = \int_C \bar{u}\frac{\partial v_k}{\partial n}\,ds = \iint_D (\operatorname{grad}\varphi \times \operatorname{grad} v_k)\,d\tau \ (10)$$

e quindi per ogni z esterno a D sarà in conseguenza

$$0 = \int_C \bar{u}(\zeta)\frac{\partial \log|z-\zeta|}{\partial n}\,d_\zeta s - \iint_D \{\operatorname{grad}\varphi(\zeta) \times \operatorname{grad}\log|z-\zeta|\}\,d_\zeta \tau .$$

La funzione così definita in D

$$(6') \quad u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_C \bar{u}(\zeta)\frac{\partial \log|z-\zeta|}{\partial n}\,d_\zeta s - \frac{1}{2\pi}\iint_D \{\operatorname{grad}\varphi(\zeta) \times \operatorname{grad}\log|z-\zeta|\}\,d_\zeta \tau$$

è la soluzione del problema. Essa è infatti armonica ed appartiene ad $\mathfrak{A}$, come segue ovviamente da un noto teorema di Lichtenstein (11), laddove fissato $\bar{\zeta}$ su C e detto z un punto di D sulla normale a C in $\bar{\zeta}$ e z' il suo simmetrico, rispetto a $\bar{\zeta}$, si ha per quasi tutti i punti $\bar{\zeta}$ di C

$$\lim_{z\to\bar{\zeta}} u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_C \bar{u}(\zeta)\left\{\frac{\partial \log|z-\zeta|}{\partial n} - \frac{\partial \log|z'-\zeta|}{\partial n}\right\} d_\zeta s -$$

$$\frac{1}{2\pi}\iint_D \left\{\operatorname{grad}\varphi(\zeta) \times \operatorname{grad}\log\frac{|z-\zeta|}{|z'-\zeta|}\right\} d_\zeta \tau$$

e quindi per il lemma I e per un noto teorema della teoria del potenziale logaritmico di doppio strato segue

$$\lim_{z\to\zeta} u(z) = \bar{u}(\bar{\zeta})$$

quasi ovunque su C.

Sia C′ un arco di curva di classe $r \geqq 2$ facente parte della frontiera C di D e di estremi ζ_1 e ζ_2.

(10) Nel caso che C sia di classe 2 in ogni suo punto (in particolare composta di curve analitiche chiuse come suppongono i Sigg. Garabedian e Schiffer) la (6) già permette di pervenire al teorema di esistenza. Infatti essa può scriversi

$$\int_C (\bar{u} - \varphi)\frac{\partial v_k}{\partial n}\,ds = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

potendosi inoltre supporre che sia $\int_C (\bar{u} - \varphi)\,ds = 0$, dato che φ è determinata a meno di una costante additiva. Ne segue $\bar{u} = \varphi$ quasi ovunque su C, poichè la successione $\{\partial v_k/\partial n\}$ è chiusa nello spazio delle funzioni sommabili su C. Cfr. G. Fichera, *Teoremi di completezza sulla frontiera di un dominio per taluni sistemi di funzioni.* « Ann. Mat. pura e appl. », ser. IV, t. XXVII, pp. 3–28 (1947).

(11) Cfr. L. Lichtenstein, *Ueber das Poissonsche Integral.* « Journal für di Reine und Ang. Math. », Bd. 141, 1912, pp. 12-42 e anche H. O. Friedrichs, *A theorem of Lichtenstein.* « Duke Math. Journ. », *14*, pp. 67–82 (1947).

Supponiamo che $\bar{u}(\zeta)$ sia continua su C' e dotata di derivate continue rispetto all'arco s fino all'ordine $q \leq r$ $(q > 0)$. Dimostriamo che:

III. – *Nelle ipotesi ammesse, u riesce almeno di classe* $q - 1$ (cioè continua assieme alle sue derivate fino a quelle di ordine $q - 1$ incluse) *in* $D + \Gamma$, *essendo* Γ *un qualunque arco di curva interno a* C'.

Sia T un dominio regolare, semplicemente connesso, contenuto in D e la cui frontiera Γ_0 abbia in comune con C tutto l'arco C'. Sia $v(z)$ una funzione verificante in T le equazioni

$$u_x = v_y \quad ; \quad u_y = -v_x . \tag{7}$$

In ogni punto z interno a T sarà

$$v(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_0} v(\zeta)\frac{\partial \log|z-\zeta|}{\partial n}\,d_\zeta s - \frac{1}{2\pi}\iint_T \{\operatorname{grad} v(\zeta)\times \operatorname{grad}\log|z-\zeta|\}\,d_\zeta\tau, \tag{8}$$

mentre per z esterno a T avremo

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_0} v(\zeta)\frac{\partial \log|z-\zeta|}{\partial n}\,d_\zeta s - \frac{1}{2\pi}\int_T \{\operatorname{grad} v(\zeta)\times \operatorname{grad}\log|z-\zeta|\}\,d_\zeta\tau. \tag{9}$$

Naturalmente i valori di $v(z)$ in quei punti di T che non sono interni a D sono definiti quasi ovunque come limiti dei valori nell'interno di T.

Si ha inoltre fissato z all'interno o all'esterno di T, tenendo presenti le (7)

$$\iint_T \{\operatorname{grad} v(\zeta)\times \operatorname{grad}\log|z-\zeta|\}\,d_\zeta\tau = \int_{\Gamma_0} u(\zeta)\frac{\partial \log|z-\zeta|}{\partial s}\,d_\zeta s$$

e quindi la (8) e la (9) possono scriversi

$$v(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_0} v(\zeta)\frac{\partial \log|z-\zeta|}{\partial n}\,d_\zeta s - \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_0} u(\zeta)\frac{\partial \log|z-\zeta|}{\partial s}\,d_\zeta s \tag{8'}$$

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_0} v(\zeta)\frac{\partial \log|z-\zeta|}{\partial n}\,d_\zeta s - \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_0} u(\zeta)\frac{\partial \log|z-\zeta|}{\partial s}\,d_\zeta s . \tag{9'}$$

Ma è d'altra parte

$$\int_{\Gamma_0} u(\zeta)\frac{\partial \log|z-\zeta|}{\partial s}\,d_\zeta s = \int_{\Gamma_0 - C'} u(\zeta)\frac{\partial \log|z-\zeta|}{\partial s}\,d_\zeta s +$$
$$+ u(\zeta_2)\log|z-\zeta_2| - u(\zeta_1)\log|z-\zeta_1| - \int_{C'}\frac{\partial u}{\partial s}\log|z-\zeta|\,d_\zeta s$$

e, pertanto, dalla (9') si deduce facendo tendere z ad un punto $\bar{\zeta}$ interno a C', lungo la normale esterna a C', in $\bar{\zeta}$:

$$\pi v(\bar{\zeta}) = \int_{\Gamma_0} v(\zeta)\frac{\partial \log|\bar{\zeta}-\zeta|}{\partial n}\,d_\zeta s - \int_{\Gamma_0 - C'} u(\zeta)\frac{\partial \log|\bar{\zeta}-\zeta|}{\partial s}\,d_\zeta s -$$
$$u(\zeta_2)\log|\bar{\zeta}-\zeta_2| + u(\zeta_1)\log|\bar{\zeta}-\zeta_1| + \int_{C'_1}\frac{\partial u}{\partial s}\log|\bar{\zeta}-\zeta|\,d_\zeta s .$$

Ne segue che $v(z)$ è funzione continua dell'arco s in ogni punto interno a C', e verifica una condizione di Hölder in ogni tratto di curva interno a C'.

Per la $u(z)$ sussiste una formula analoga alla (8') e precisamente si ha

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_0} u(\zeta)\frac{\partial \log|z-\zeta|}{\partial n}\,d_\zeta s + \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_0} v(\zeta)\frac{\partial \log|z-\zeta|}{\partial s}\,d_\zeta s$$

ne segue che $u(z)$ è continua in $T + \Gamma$ [12] e quindi $D + \Gamma$, ma poichè su Γ coincide con una funzione di classe q – per un teorema di Kellogg [13] – la u riesce almeno di classe $q - 1$ in $D + \Gamma$.

È ovvio il seguente corollario:

IV. – *Se* C *è di classe* $r \geq 2$ *in ogni suo punto e se* $\bar{u}(\zeta)$ *è di classe* $q \leq r$ $(q > 0)$ *su* C *rispetto all'arco* s, *la* $u(z)$ *è di classe* $q - 1$ *in* $D + C$.

Fissato il punto w nell'interno di D, poniamo su C

$$\bar{u}(\zeta) = \log|\zeta - w|\,.$$

La classe $\overline{\mathfrak{A}}$ in questo caso non è vuota dato che, detto $I_{\varrho_0}(w)$ un cerchio di centro w e raggio ρ_0 tutto interno a D, appartiene ad essa la funzione così definita in D

$$U(z)\begin{cases} = \log|z-w| & \text{per } z \subset D - I_{\varrho_0}(w), \\ = \frac{1}{2\rho_0^2}|z-w|^2 + \log\rho_0 - \frac{1}{2} & \text{per } z \subset I_{\varrho_0}(w). \end{cases}$$

Diciamo $g(z,w)$ la funzione armonica che su C coincide con $\bar{u}(\zeta) = \log|\zeta - w|$. Posto

$$G(z,w) = g(z,w) - \log|z-w|$$

e rappresentata la $g(z,w)$ con la (6'), mediante passaggi formali che ci dispensiamo dal riportare, si ottiene per z e w in D

$$G(z,w) = \frac{1}{2\pi}\iint_D \{\operatorname{grad}\log|z-\zeta| \times \operatorname{grad}\log|w-\zeta|\}\,d_\zeta\tau -$$

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\iint_D \{\operatorname{grad} v_k(\zeta)\times\operatorname{grad}\log|z-\zeta|\}\,d_\zeta\tau \iint_D \{\operatorname{grad} v_k(\zeta)\times\operatorname{grad}\log|w-\zeta|\}\,d_\zeta\tau.$$

La $G(z,w)$ è la funzione di Green per il problema di Dirichlet relativo all'equazione di Laplace.

Riassumendo si può dire che:

V. – *La funzione di Green per il problema di Dirichlet relativo all'equazione di Laplace è funzione simmetrica di* z *e* w. *Fissato* w $[z]$ *in* D *essa è funzione di* z $[w]$ *di classe* $r - 1$ *in* $D + \Gamma$ *privato del punto* w $[z]$, *essendo* Γ *un qualsiasi arco interno ad un arco* C' *di* C *di classe* $r \geq 2$. *Se* C *è di classe* $r \geq 2$ *in ogni punto la* $G(z,w)$ *è di classe* $r - 1$ *in* $D + C$ *privato del punto* w $[z]$. *Quando* $z \to w$ *la* $G(z,w)$ *è singolare come* $\log|z-w|$.

(12) Cfr. O. D. Kellogg, *Foundations of Potential theory*, Springer (Berlin) 1929 e «Ungar Publ. Comp.» (New York), pp. 165–175.

(13) Cfr. O. D. Kellogg, *On the derivatives of harmonic functions on the boundary*. «Trans. of Am. Math. Soc.», vol. 33, pp. 586–510 (1931).

Supponiamo che C sia di classe 2 in ogni suo punto. Se u è una funzione armonica di classe 1 in D + C, si ha

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_C \left\{ u(\zeta)\frac{\partial \log|z-\zeta|}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n}\log|z-\zeta| \right\} d_\zeta s$$

e si ha anche fissato z in D

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_C \left\{ u(\zeta)\frac{\partial g(\zeta,z)}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} g(\zeta,z) \right\} d_\zeta s$$

e quindi

$$u(z) = \frac{-1}{2\pi}\int_C u(\zeta)\frac{\partial G(\zeta,z)}{\partial n} d_\zeta s .$$

Il teorema di esistenza II si può dimostrare anche nell'ipotesi che $\overline{\mathfrak{A}}$ sia vuota, se $\bar{u}(\zeta)$ riesce continua su C.

Sia, infatti, $\{\bar{u}_h(\zeta)\}$ una successione di polinomi tale che riesca uniformemente su C: $\lim_{h\to\infty} \bar{u}_h(\zeta) = \bar{u}(\zeta)$. Poichè per ogni funzione $\bar{u}_h(\zeta)$ la corrispondente classe $\overline{\mathfrak{A}}$ non è vuota, esisteranno e saranno di classe 2 in D + C le funzioni armoniche in D, $u_h(z)$ che su C coincidono rispettivamente con $\bar{u}_h(\zeta)$. La successione $\{u_h(z)\}$ converge uniformemente in D + C e il suo limite è la funzione u armonica in D continua in D + C che su C vale $\bar{u}(\zeta)$.

Si osservi che, essendo in ogni dominio D' interno a D

$$\lim_{h\to\infty}\int_C \bar{u}_h(\zeta)\frac{\partial G(\zeta,z)}{\partial n} d_\zeta s = \int_C \bar{u}(\zeta)\frac{\partial G(\zeta,z)}{\partial n} d_\zeta s$$

sarà per ogni z di D

$$u(z) = \frac{-1}{2\pi}\int_C \bar{u}(\zeta)\frac{\partial G(\zeta,z)}{\partial n} d_\zeta s .$$

Possiamo pertanto affermare:

IV. – *Assegnata comunque su* C *la funzione continua* $\bar{u}(\zeta)$ *esiste una funzione* u *armonica in* D *e continua in* D + C *che su* C *coincide con* $\bar{u}(\zeta)$ *e tale funzione è rappresentata in* D *dalla formula*

$$u(z) = \frac{-1}{2\pi}\int_C \bar{u}(\zeta)\frac{\partial G(\zeta,z)}{\partial n} d_\zeta s .$$

Dopo i teoremi dimostrati la risoluzione del problema relativo alla rappresentazione conforme, cui è dedicata la Sezione 2 della Memoria dei Sigg. Garabedian e Schiffer diventa un semplice esercizio. È ben evidente come della funzione $w = f(z)$, di cui è ormai ovvia l'esistenza, che rappresenta conformemente D nel piano w privato di tratti rettilinei paralleli ad uno degli assi coordinati possono darsi – servendosi delle formule impiegate in precedenza – diverse *rappresentazioni* tutte, crediamo, abbastanza idonee a soddisfare il gusto estetico dei cultori della matematica formale. Ma ciò è per noi affatto privo d'interesse.

Analisi funzionale. — *Calcolo esatto degli au*
autofunzioni di un nucleo «variato», per una variaz
mentare. Nota di LUIGI FANTAPPIÈ, presentata (*) dal S

1. Approfittando dei risultati di precedenti lavori (1), fa
sia possibile ottenere *in forma finita* il valore *esatto* degli auto
autofunzioni $\varphi_r(z,\varepsilon)$, $\psi_r(t,\varepsilon)$ di un nucleo «variato»
quando la variazione $\varepsilon h(z,t)$ (e cioè la funzione $h(z,t)$) d
forma *elementare*, cioè del tipo

$$h(z;t) = \sum_1^m{}_j\, p_j(z)\, q_j(t) \tag{1}$$

e sia noto il nucleo risolvente R

$$R(\lambda;z,t) = k(z,t) + \lambda \overset{2}{k}(z,t) + \lambda^2 \overset{3}{k}(z,t) + \tag{2}$$

o il nucleo associato Γ

$$\Gamma(\lambda;z,t) = \frac{1}{1-zt} + \lambda R(\lambda;z,t) = \overset{0}{k}(z,t) + \lambda k(z,t) \tag{3}$$

del nucleo iniziale $k(z,t)$.

Indicando infatti, come nei precedenti lavori, con $D(\lambda) =$
zionale determinante del nucleo $k(z,t)$ (trascendente intera in λ)
autovalori del nucleo k, si ha dalla formula (12) di F. D. che la
di questa funzione di λ è, a meno del segno, la *traccia* del nucl

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = -R(\lambda;\overset{\circ}{t},\overset{\circ}{t}) = -TR(\lambda;z,t) \tag{4}$$

e quindi un autovalore semplice λ_r, e cioè uno zero sempli
sempre ottenere come residuo integrale di questa funzione di λ,
con la formula

$$\lambda_r = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \lambda \frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)}\, d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \lambda R(\lambda;\overset{\circ}{t},\overset{\circ}{t}) \tag{5}$$

Così pure sappiamo, per la formula (26) della nota precedente V. A., che il prodotto $\varphi_r(x)\,\psi_r(t)$ delle due autofunzioni, corrispondenti all'autovalore semplice λ_r, *si può altresì ottenere come residuo integrale*, nella forma

$$(7) \qquad \varphi_r(x)\,\psi_r(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{1}{\lambda}\,\Gamma(\lambda\,;x\,,t)\,d\lambda$$

da cui, fissando comunque t, si ha (a meno di una costante moltiplicativa, che resta naturalmente indeterminata) l'autofunzione $\varphi_r(x)$, e da cui invece, fissando comunque x, si ha l'altra autofunzione $\psi_r(t)$.

Da quanto precede, e in particolare dalle due formule integrali (6) e (7), vediamo dunque che il calcolo *esatto*, tanto degli autovalori λ_r, che delle autofunzioni $\varphi_r(x)\,,\psi_r(t)$, di un nucleo dato $k(x\,,t)$ può ricondursi al calcolo del nucleo «associato» $\Gamma(\lambda\,;x\,,t)$ di $k(x\,,t)$, dato dalla (3).

Il problema di calcolare esattamente gli autovalori $\lambda_r(\varepsilon)$ e le autofunzioni $\varphi_r(x\,,\varepsilon)\,,\psi_r(t\,,\varepsilon)$ di un nucleo «variato» $k+\varepsilon h$ sarà quindi risolto, *se potremo calcolare il nucleo associato* $\Gamma_1(\lambda\,,\varepsilon\,;x\,,t) = \Gamma[k(x\,,t)+\varepsilon h(x\,,t)]$ *di tale nucleo variato* (o il suo nucleo risolvente R_1, da cui, per la (3), si ottiene subito Γ_1), bastando poi sostituire Γ_1 al posto di Γ nelle (6) e (7), per avere i valori cercati, almeno finchè ε è in modulo abbastanza piccolo.

2. Cerchiamo dunque di calcolare il *nucleo associato* $\Gamma_1[k(x\,,t)+\varepsilon h(x\,,t)] = \Gamma_1(\lambda\,,\varepsilon\,;x\,,t)$ del nucleo variato. Dato che esso è un funzionale *analitico*, Γ_1 risulta intanto una funzione analitica di ε, sviluppabile in serie di potenze di ε, nella forma

$$(8) \qquad \Gamma_1(\lambda\,,\varepsilon\,;x\,,t) = \Gamma[k(x\,,t)+\varepsilon h(x\,,t)] = \Gamma(\lambda\,;x\,,t) + \\ + \varepsilon\,G_1[h] + \frac{\varepsilon^2}{2!}\,G_2[h] + \cdots + \frac{\varepsilon^n}{n!}\,G_n[h] + \cdots$$

ove $G_n[h]$ è un funzionale polinomiale omogeneo, di grado n, della funzione $h(x\,,t)$, che si può indicare come «variazione» n^{esima} $\delta^n\Gamma$ del funzionale Γ, corrispondente alla variazione $\delta k = h$ della variabile indipendente (che qui è il nucleo k). Indicando in generale con

$$(9) \qquad V_h\,F[k(x\,,t)] = \delta F = \mathring{F}'[k(x\,,t)\,,\mathring{\alpha}\,,\mathring{\beta}]\,h(\mathring{\alpha}\,,\mathring{\beta})$$

la *variazione prima* δF di un qualunque funzionale analitico F di k, che si ottiene, per risultati noti (v. D. V., n. 48 [22]), come prodotto funzionale del funzionale derivato $\mathring{F}'$ per la variazione $\delta k = h$ della variazione dell'argomento, i funzionali $G_n[h]$ si ottengono allora successivamente l'uno dall'altro, iterando l'operazione V_h, nella forma

$$(10) \qquad G_1[h] = V_h\,\Gamma = \mathring{\mathfrak{D}}_{k(\mathring{\alpha}\,.\,\mathring{\beta})}\,\Gamma\cdot h(\mathring{\alpha}\,,\mathring{\beta})$$

$$(11) \qquad G_2[h] = V_h\,G_1 = V_h^2\,\Gamma$$

e in generale

$$(12) \qquad G_n[h] = V_h\,G_{n-1}[h] = V_h^n\,\Gamma.$$

Ma, per la formula (B) di F. D., risulta

$$\mathring{\mathfrak{D}}_{k(\alpha,\beta)}\,\Gamma(\lambda;z,t) = \lambda\Gamma(\lambda;z,\alpha)\,\Gamma(\lambda;\beta,t) \tag{13}$$

e quindi, sostituendo nella (10),

$$V_h\,\Gamma = G_1[h] = \lambda\Gamma(\lambda;z,\mathring{\alpha})\,h(\mathring{\alpha},\mathring{\beta})\,\Gamma(\lambda;\mathring{\beta},t). \tag{14}$$

Ponendo ora

$$\Gamma_s(\lambda;z,t) = h(z,\mathring{\beta})\,\Gamma(\lambda;\mathring{\beta},t) \quad , \quad \Gamma_d(\lambda;z,t) = \Gamma(\lambda;z,\mathring{\alpha})\,h(\mathring{\alpha},t) \tag{15}$$

(prodotti funzionali di Γ per la variazione h, a sinistra o a destra), la (14) può scriversi

$$V_h\,\Gamma = \lambda\Gamma(\lambda;z,\mathring{\alpha})\,\Gamma_s(\lambda;\mathring{\alpha},t) = \lambda\Gamma_d(\lambda;z,\mathring{\beta})\,\Gamma(\lambda,\mathring{\beta},t). \tag{16}$$

D'altra parte, si ha, per la (13),

$$V_h\Gamma_s = \mathring{\mathfrak{D}}_{k(\mathring{\alpha}_1,\mathring{\beta}_1)}\,\Gamma_s(\lambda;z,t)\,h(\mathring{\alpha}_1,\mathring{\beta}_1) = h(z,\mathring{\beta})\,\lambda\Gamma(\lambda;\mathring{\beta},\mathring{\alpha}_1)\,\Gamma(\lambda;\mathring{\beta}_1,t)\,h(\mathring{\alpha}_1,\mathring{\beta}_1) \tag{17}$$

$$= \lambda\,\Gamma_s(\lambda;z,\mathring{\alpha}_1)\,\Gamma_s(\lambda;\mathring{\alpha}_1,t) = \lambda\mathring{\Gamma}_s^2(\lambda;z,t)$$

e in generale

$$V_h\,\mathring{\Gamma}_s^m = m\lambda\,\mathring{\Gamma}_s^{m+1} \qquad m = 1,2,3,\cdots \tag{18}$$

e analogamente

$$V_h\,\mathring{\Gamma}_d^m = m\lambda\,\mathring{\Gamma}_d^{m+1} \qquad m = 1,2,3,\cdots. \tag{19}$$

Dalla (14), si ha allora successivamente, per le espressioni (12),

$$G_2[h] = V_h G_1[h] = \lambda\{V_h\Gamma(\lambda;z,\mathring{\alpha})\}\,\Gamma_s(\lambda;\mathring{\alpha},t) + \lambda\Gamma(\lambda;z,\mathring{\alpha})\,\{V_h\Gamma_s(\lambda;\mathring{\alpha},t)\} \tag{20}$$

$$= 2\lambda^2\,\Gamma(\lambda;z,\mathring{\alpha})\,\mathring{\Gamma}_s^2(\lambda;\mathring{\alpha},t)$$

e in generale

$$G_n[h] = V_h^n\,\Gamma = n!\,\lambda^n\,\Gamma(\lambda;z,\mathring{\alpha})\,\mathring{\Gamma}_s^n(\lambda;\mathring{\alpha},t) = n!\,\lambda^n\,\mathring{\Gamma}_d^n(\lambda;z,\mathring{\beta})\,\Gamma(\lambda;\mathring{\beta},t). \tag{21}$$

Sostituendo queste espressioni nella serie (8), si ha così, per il nucleo associato Γ_1 del nucleo variato, il valore

$$\Gamma_1(\lambda,\varepsilon;z,t) = \Gamma(\lambda;z,t) + \sum_1^\infty{}_n\,(\varepsilon\lambda)^n\,\Gamma(\lambda;z,\mathring{\alpha})\,\mathring{\Gamma}_s^n(\lambda;\mathring{\alpha},t) = \tag{22}$$

$$= \Gamma(\lambda;z,t) + \sum_1^\infty{}_n\,(\varepsilon\lambda)^n\,\mathring{\Gamma}_d^n(\lambda;z,\mathring{\beta})\,\Gamma(\lambda;\mathring{\beta},t).$$

Indicando con $\bar{R}_s$ e $\bar{\Gamma}_s$ il nucleo risolvente e associato di Γ_s, si hanno allora infine, per il nucleo associato Γ_1 del nucleo variato, le espressioni

$$\Gamma_1(\lambda,\varepsilon;z,t) = \Gamma(\lambda;z,t) + \varepsilon\lambda\Gamma(\lambda;z,\mathring{\alpha})\,\bar{R}_s(\varepsilon\lambda,\lambda;\mathring{\alpha},t) \tag{23}$$

$$\Gamma_1(\lambda,\varepsilon;z,t) = \Gamma(\lambda;z,\mathring{\alpha})\,\bar{\Gamma}_s(\varepsilon\lambda,\lambda;\mathring{\alpha},t) \tag{24}$$

(e le analoghe, usando il nucleo risolvente e associato di Γ_d) che *ci permettono di esprimere* Γ_1 *in forma finita*, a partire dal nucleo associato Γ del nucleo iniziale k, *qualora si sappia calcolare in forma finita il nucleo risolvente* $\bar{\mathrm{R}}_s$ *o il nucleo associato* $\bar{\Gamma}_s$

$$\bar{\Gamma}_s(\mu;\lambda;z,t) = \mathring{\Gamma}_s^0 + \mu\Gamma_s + \mu^2\mathring{\Gamma}_s^2 + \cdots + \mu^n\mathring{\Gamma}_s^n + \cdots \tag{25}$$

del nucleo Γ_s dato dalla (15).

3. Ora, quando la variazione data al nucleo iniziale k ha la forma (1), è cioè espressa da una somma di un numero finito m di termini, ognuno dei quali è il prodotto di una funzione della sola z per una funzione della sola t, si presenta la circostanza interessante che *anche il nucleo* Γ_s, *dato dalla* (15), *ha pure la stessa forma*, essendo

$$\Gamma_s(\lambda;z,t) = h(z,\mathring{\beta})\,\Gamma(\lambda;\mathring{\beta},t) = \sum_1^m{}_j\, p_j(z)\,\bar{q}_j(t,\lambda) \tag{26}$$

con

$$\bar{q}_j(t,\lambda) = q_j(\mathring{\beta})\,\Gamma(\lambda;\mathring{\beta},t) \qquad j = 1,2,\cdots m. \tag{27}$$

Ma è allora facile calcolare tutti i nuclei iterati $\mathring{\Gamma}_s^2, \mathring{\Gamma}_s^3 \cdots$ di Γ_s, e quindi anche il nucleo risolvente $\bar{\mathrm{R}}$ e il nucleo associato $\bar{\Gamma}_s$, avendosi

$$\mathring{\Gamma}_s^2(\lambda;z,t) = \sum_1^m{}_{jl}\, p_j(z)\,c_{jl}(\lambda)\,\bar{q}_l(t,\lambda) \tag{28}$$

con

$$c_{jl}(\lambda) = \bar{q}_j(\mathring{t},\lambda)\,p_l(\mathring{t}) \qquad j,l = 1,2,\cdots m \tag{29}$$

e se indichiamo con $c_{jl}^{(n)}$ gli elementi della matrice quadrata, d'ordine m, C^n, potenza n^{esima} della matrice $\mathrm{C}(\lambda)$ dello stesso ordine, che ha per elementi queste quantità $c_{jl}(\lambda)$, e con $u_{jl}(\mu,\lambda)$ gli elementi della matrice

$$\mathrm{U}(\mu,\lambda) = (1 - \mu\mathrm{C}(\lambda))^{-1} = 1 + \mu\mathrm{C} + \mu^2\mathrm{C}^2 + \cdots \tag{30}$$

si hanno subito le espressioni dei nuclei iterati di Γ_s e del nucleo risolvente $\bar{\mathrm{R}}_s$

$$\bar{\mathrm{R}}_s(\mu,\lambda;z,t) = \Gamma_s + \mu\mathring{\Gamma}_s^2 + \mu^2\mathring{\Gamma}_s^3 + \cdots \tag{31}$$

in forma finita, essendo

$$\mathring{\Gamma}_s^{n+1}(\lambda;z,t) = \sum_1^m{}_{jl}\, p_j(z)\,c_{jl}^{(n)}\,\bar{q}_l(t,\lambda) \tag{32}$$

e quindi

$$\bar{\mathrm{R}}_s(\mu,\lambda;z,t) = \sum_1^m{}_{jl}\, p_j(z)\,u_{jl}(\mu,\lambda)\,\bar{q}_l(t,\lambda) \tag{33}$$

Sostituendo questa espressione del nucleo risolvente $\bar{R}_\varepsilon$ di Γ_ε nella formula (23), *si ha allora in forma finita* l'espressione del nucleo risolvente Γ_1 del nucleo variato, e quindi sostituendo Γ_1 a Γ nelle (6) e (7) si hanno pure *i valori esatti* degli autovalori e delle autofunzioni del nucleo variato, *in forma finita*, con le formule

$$\lambda_r(\varepsilon) = -T\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\Gamma_1(\lambda, \varepsilon; x, t)\,d\lambda \tag{34}$$

$$\varphi_r(x, \varepsilon)\,\psi_r(t, \varepsilon) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{1}{\lambda}\Gamma_1(\lambda, \varepsilon, x, t)\,d\lambda \tag{35}$$

quando si conosca il nucleo associato Γ (o il nucleo risolvente R) del nucleo *iniziale k*.

Analisi matematica. — *Funzioni a variazione limitata in più variabili, nel senso di Fréchet e nel senso di Faedo.* Nota di ROBERTO CONTI, presentata (*) dal Corrisp. G. SANSONE.

È ben noto che il concetto di « variazione » introdotto da Jordan per le funzioni di una variabile è stato esteso in varii modi alle funzioni di due o più variabili.

Una di tali estensioni è quella di Fréchet, particolarmente utile nella teoria dei funzionali bilineari ed in quella delle serie multiple di Fourier (1).

Un'altra estensione si trova in un lavoro di S. Faedo; quest'ultima si presenta in forma assai più semplice della prima ed è particolarmente comoda per la valutazione dell'ordine di grandezza dei coefficienti di Eulero–Fourier di una funzione di due (o più) variabili (2).

In questa Nota mostreremo l'equivalenza delle due definizioni.

1. La definizione di Fréchet è la seguente.

Sia $f(x, y)$, in tutto il seguito, una funzione (reale) definita nel rettangolo

$$R: \quad a \leq x \leq b \quad , \quad c \leq y \leq d\,.$$

Per ogni rettangolo r contenuto in R, con i lati paralleli a quelli di R,

$$r: \quad \alpha \leq x \leq \beta \quad , \quad \gamma \leq y \leq \delta\,,$$

(*) Nella seduta del 6 giugno 1951.

(1) Ved. M. FRÉCHET, *Sur les fonctionnelles bilinéaires.* « Trans. Am. Math. Soc. », *16*, pp. 216–234 (1915); Ved., anche per la Bibl. M. MORSE–W. TRANSUE, *Fréchet variation and a generalization for multiple Fourier series of the Jordan test.* « Riv. di Mat. dell'Un. di Parma », *1*, pp. 3–18 (1950).

(2) Ved. S. FAEDO, *Ordine di grandezza dei coefficienti di Eulero–Fourier delle funzioni di due variabili.* « Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa » (2), *6*, pp. 225–246 (1937).

poniamo

$$\Delta(\beta, \delta) \equiv f(\beta, \delta) + f(\alpha, \gamma) - f(\beta, \gamma) - f(\alpha, \delta);$$

$\Delta(\beta, \delta)$ suol chiamarsi *l'incremento doppio* della f relativo ad r.

Ciò posto, effettuiamo una suddivisione $D_{m,n}$ del rettangolo R mediante le rette $x = x_i$, $y = y_j$ $(i = 0, 1, \cdots, m\ ;\ j = 0, 1, \cdots, n)$ con

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b \quad , \quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d.$$

Sia poi $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_m$ un insieme ordinato di m numeri eguali a $+1$ od a -1, cioè una disposizione di classe m con ripetizione dei due numeri $+1$ e -1, e sia $\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, \cdots, \bar{\epsilon}_n$ una seconda disposizione con ripetizione di classe n dei numeri $+1$ e -1.

Si ha allora la

Definizione F – Si dice variazione della $f(x, y)$ in R, secondo Fréchet, o semplicemente, *variazione* F di $f(x, y)$ in R, l'estremo superiore dell'insieme numerico formato dalle somme

$$\Sigma \equiv \sum_{1,1}^{m,n}{}_{i,j} \epsilon_i \bar{\epsilon}_j \Delta(x_i, y_j)$$

corrispondenti a tutte le $D_{m,n}$ e, per ognuna di queste, in corrispondenza a tutte le (2^{m+n}) possibili scelte degli ϵ ed $\bar{\epsilon}$.

Se tale variazione, che indicheremo con $\mathcal{F}$, è finita, si dice che la $f(x, y)$ è in R a variazione limitata secondo Fréchet, od anche (3), si dice che $f(x, y)$ è in R una *funzione* F.

È intanto evidente una certa sovrabbondanza di condizioni nella definizione F; basti notare che Σ resta immutata se invece delle $\epsilon, \bar{\epsilon}$ scelte si prendono le $\epsilon_i' = -\epsilon_i$, $\bar{\epsilon}_j' = -\bar{\epsilon}_j$. Ma è presto visto, addirittura, che ci si può limitare a considerare in luogo delle Σ, le somme

$$\Sigma^* \equiv \sum_{1,1}^{m,n}{}_{i,j} \epsilon_i^* \bar{\epsilon}_j^* \Delta(x_i, y_j),$$

con le $\bar{\epsilon}_j^*$ alternativamente uguali a $+1$ ed a -1, iniziando da $\bar{\epsilon}_1^* = +1$, e con le ϵ_i^* anch'esse uguali alternativamente a $+1$ ed a -1, a cominciare da $\epsilon_1^* = +1$, oppure da $\epsilon_1^* = -1$.

In altri termini, se si pone la

Definizione F* – Diciamo *variazione* F* della f in R (e indichiamo con $\mathcal{F}^*$) l'estremo superiore delle Σ^* ora dette, corrispondenti a tutte le possibili $D_{m,n}$; si ha che $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}$.

Infatti è chiaro intanto che $\mathcal{F}^* \leq \mathcal{F}$. Perciò basta provare che è $\mathcal{F} \leq \mathcal{F}^*$ e per questo è sufficiente notare che in virtù della « addittività » degli incrementi doppi $\Delta(x_i, y_j)$ (4) ogni Σ è anche una Σ^* relativa ad una certa suddivisione $D_{\mu,\nu}$

(3) Ved. J. A. CLARKSON-C. R. ADAMS, *On definitions of bounded variation for functions of two variables*. « Trans. Am. Math. Soc. », *35*, pp. 824-854 (1933).

(4) L'incremento doppio relativo a due rettangoli adiacenti ed aventi un lato in comune uguaglia l'incremento doppio del rettangolo somma.

con $\mu \leqq m$, $\nu \leqq n$, ottenuta dalla $D_{m,n}$ primitiva sopprimendo, eventualmente, quelle rette $x = x_k$ cui è associato un $\epsilon_k = \epsilon_{k+1}$ e quelle rette $y = y_k$ cui è associato un $\bar{\epsilon}_k = \bar{\epsilon}_{k+1}$.

Quindi la classe F*, delle funzioni f per le quali è $\mathfrak{F}^* < +\infty$, coincide con la classe F, in simboli

(A) $$F = F^*.$$

È pure evidente che $\mathfrak{F}^*$ oltre che come estremo superiore delle Σ^* (con $\bar{\epsilon}_1^* = +1$ e $\epsilon_1^* = +1$) può considerarsi come l'estremo superiore dei valori assoluti $|\Sigma^*|$ delle Σ^* con $\bar{\epsilon}_1^* = \epsilon_1^* = +1$.

2. Diamo adesso la definizione di Faedo.

Si consideri una suddivisione $D_{m,n}$ di R, con la condizione che m ed n siano entrambi numeri dispari: $m = 2\mu + 1$, $n = 2\nu + 1$ (μ , ν interi). Se ad ogni $D_{2\mu+1,\,2\nu+1}$ associamo la somma

$$\Sigma_1 \equiv \sum_{0,0}^{2\mu+1,\,2\nu+1}{}_{i,j} (-1)^{i+j} f(x_i , y_j),$$

si ha la

Definizione F_1 – Si dice *variazione* F_1 della f in R l'estremo superiore dei valori assoluti $|\Sigma_1|$ delle Σ_1 corrispondenti a tutte le possibili $D_{2\mu+1,\,2\nu+1}$. Se l'estremo, $\mathfrak{F}_1$, è finito la f si dirà una *funzione* F_1 in R.

Indicato ora con $\bar{\mathfrak{F}}^*$ l'estremo superiore delle somme Σ^*, definite al n. 1, che corrispondono a suddivisioni $D_{2\mu+1,\,2\nu+1}$ (somme che indicheremo con $\bar{\Sigma}^*$) e detta $\bar{F}^*$ la classe delle funzioni $f(x , y)$ per le quali $\bar{\mathfrak{F}}^*$ è finito, proveremo che è

(B) $$F_1 = \bar{F}^*.$$

Premettiamo alcune identità, facilmente verificabili per una qualunque $D_{2\mu+1,\,2\nu+1}$:

$$\Sigma_1 = \sum_{1,1}^{2\mu+1,\,2\nu+1}{}_{2r+1,\,2s+1} \Delta(x_{2r+1} , y_{2s+1}),$$

$$\Sigma_1 = \sum_{2,2}^{2\mu,\,2\nu}{}_{2r,\,2s} \Delta(x_{2r} , y_{2s}) + \sum_{1}^{2\mu+1}{}_{2r+1} \Delta(x_{2r+1} , d) + \sum_{1}^{2\nu+1}{}_{2s+1} \Delta(b , y_{2s+1}) - \Delta(b , d),$$

$$\Sigma_1 = -\sum_{1,2}^{2\mu+1,\,2\nu}{}_{2r+1,\,2s} \Delta(x_{2r+1} , y_{2s}) + \sum_{1}^{2\mu+1}{}_{2r+1} \Delta(x_{2r+1} , d),$$

$$\Sigma_1 = -\sum_{2,1}^{2\mu,\,2\nu+1}{}_{2r,\,2s+1} \Delta(x_{2r} , y_{2s+1}) + \sum_{1}^{2\nu+1}{}_{2s+1} \Delta(b , y_{2s+1}),$$

dove, nelle somme a semplice indice, è

$$\Delta(x_{2r+1} , d) = f(x_{2r+1} , d) + f(x_{2r} , c) - f(x_{2r+1} , c) - f(x_{2r} , d),$$
$$\Delta(b , y_{2s+1}) = f(b , y_{2s+1}) + f(a , y_{2s}) - f(b , y_{2s}) - f(a , y_{2s+1}),$$
$$\Delta(b , d) = f(b , d) + f(a , c) - f(b , c) - f(a , d).$$

D'altronde se alla $D_{2\mu+1,2\nu+1}$ si associa la somma $\bar{\Sigma}^*$ con $\epsilon_1^* = +1$ si ha immediatamente

$$\bar{\Sigma}^* \equiv \sum_{1,1}^{2\mu+1,2\nu+1} \epsilon_i^* \bar{\epsilon}_j^* \Delta(x_i, y_j) = \sum_{1,1}^{2\mu+1,2\nu+1} \Delta(x_{2r+1}, y_{2s+1}) +$$

$$+ \sum_{2,2}^{2\mu,2\nu} \Delta(x_{2r}, y_{2s}) - \sum_{1,2}^{2\mu+1,2\nu} \Delta(x_{2r+1}, y_{2s}) - \sum_{2,1}^{2\mu,2\nu+1} \Delta(x_{2r}, y_{2s+1}),$$

e quindi, dalle identità scritte prima:

$$(1) \qquad \bar{\Sigma}^* = 4\Sigma_1 - 2\sum_{1}^{2\mu+1} \Delta(x_{2r+1}, d) - 2\sum_{1}^{2\nu+1} \Delta(b, y_{2s+1}) + \Delta(b, d).$$

Si osservi ora che la somma $\sum_{1}^{2\mu+1} \Delta(x_{2r+1}, d)$ non è che la Σ_1 associata alla

$$D_{2\mu+1,1}: \qquad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{2\mu+1} = b, \; c = y_0 < y_1 = d;$$

la somma $\sum_{1}^{2\nu+1} \Delta(b, y_{2s+1})$ è la Σ_1-associata alla

$$D_{1,2\nu+1}: \qquad a = x_0 < x_1 = b \quad , \quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{2\nu+1} = d;$$

e infine $\Delta(b, d)$ è la Σ_1 corrispondente alla

$$D_{1,1}: \qquad a = x_0 < x_1 = b \quad , \quad c = y_0 < y_1 = d.$$

Dunque se $\mathcal{F}_1$ è finito, tale è anche $\bar{\mathcal{F}}^*$ in virtù della (1), cioè $F_1 \leq \bar{F}^*$, dove il segno $\leq$ indica che la classe F_1 è contenuta in $\bar{F}^*$.

Per avere la (B) resta solo da mostrare che è $\bar{F}^* \leq F_1$. Per questo, scritta la (1) nella forma

$$(1') \qquad 4\Sigma_1 = \bar{\Sigma}^* + \left\{ 2\sum_{1}^{2\mu+1} \Delta(x_{2r+1}, d) - \Delta(b, d) \right\} +$$

$$+ \left\{ 2\sum_{1}^{2\nu+1} \Delta(b, y_{2s+1}) - \Delta(b, d) \right\} + \Delta(b, d),$$

basta rilevare che la prima $\{\ \}$ è la $\bar{\Sigma}^*$ relativa alla $D_{2\mu+1,1}$ sopra considerata, che la seconda $\{\ \}$ è la $\bar{\Sigma}^*$ relativa alla $D_{1,2\nu+1}$, mentre $\Delta(b, d)$ può considerarsi anche come la $\bar{\Sigma}^*$ associata alla $D_{1,1}$.

Dunque se $\bar{\mathcal{F}}^*$ è finita, $\mathcal{F}_1$ lo è del pari.

3. In questo numero proveremo la

$$(C) \qquad \bar{F}^* = F^*,$$

con la quale, tenuto conto delle (A) e (B), resta stabilita l'equivalenza di F_1 ed F.

Premettiamo il seguente

LEMMA I. – *Se $f(x,y)$ è una F_I in R, essa è una F_I anche in ogni rettangolo r (con i lati paralleli a quelli di R) contenuto in R.*

Sia

$$r: \quad \alpha \leq x \leq \beta \quad , \quad \gamma \leq y \leq \delta,$$

e supponiamo dapprima che sia: *i)* $a < \alpha, \beta < b, c < \gamma, \delta < d$.

Effettuiamo una suddivisione $D(r)$ di r mediante i lati di r ed un numero pari di orizzontali e verticali. Sia $D(R)$ la divisione di R che si ottiene aggiungendo alle rette della $D(r)$ le quattro rette $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$; sia poi $D'(R)$ [$D''(R)$] la divisione di R operata soltanto da tutte le orizzontali [verticali] di $D(R)$ e dalle due rette $x = a, x = b$ [$y = c, y = d$].

Si vede senza difficoltà che la Σ_I associata a $D(R)$ si può scindere nella somma della Σ_I associata a $D(r)$ con la Σ_I associata a $D'(R)$, con la Σ_I associata a $D''(R)$ ed infine con $-\Delta(b,d)$ che è pure una Σ_I associata ad R. Di qui, passando ai valori assoluti, l'asserto.

I casi ii) $a < \alpha, \beta < b, c = \gamma, \delta = d$; iii) $a = \alpha, \beta = b, c < \gamma, \delta < d$ si trattano in modo del tutto analogo.

Una lieve modifica richiede invece il caso in cui soltanto un lato di r appartenga al contorno di R, ad esempio: $a < \alpha, \beta < b, c = \gamma, \delta < d$. Basta allora considerare la $\varphi(x,y)$ definita in

$$R_I: \quad a \leq x \leq b \quad , \quad 2c - d \leq y \leq d,$$

ponendo $\varphi(x,y) = f(x,y)$ per (x,y) in R e $\varphi(x,y) = f(x,c)$ se (x,y) è nel rettangolo $R_I - R$. La φ risulta evidentemente F_I in R_I (5) quindi per il caso i) risulta una F_I in r e poichè in r è $\varphi = f$, l'asserto è provato.

I casi in cui r abbia in comune col contorno di R due lati consecutivi si trattano analogamente.

Dal lemma I e dalla (B) segue il

LEMMA II. – *Se $f(x,y)$ è una funzione $\overline{F}^*$ in R essa è tale anche in ogni rettangolo r contenuto in R.*

Siamo ora in grado di dimostrare la (C). È intanto evidente che $F^* \leq \overline{F}^*$. Sia inversamente f una funzione $\overline{F}^*$ in R e si consideri una divisione di R

$$D_{2\mu,2\nu}: \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{2\mu} = b \quad , \quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{2\nu} = d.$$

Si definisca $\varphi(x,y)$ nel rettangolo

$$R_2: \quad a \leq x \leq 2b \quad , \quad c \leq y \leq 2d$$

ponendo $\varphi = f$ se (x,y) è in R e

$$\varphi(x,y) = f(x,d) \qquad \text{per} \quad a \leq x \leq b \quad , \quad d \leq y \leq 2d,$$

$$\varphi(x,y) = f(b,y) \qquad \text{per} \quad b \leq x \leq 2b \quad , \quad c \leq y \leq 2d.$$

(5) La φ ha un incremento doppio nullo per ogni rettangolo appartenente ad $R_I - R$.

La φ così definita risulta una $\overline{F}^*$ (in R_2 e quindi, per il lemma II) in ogni rettangolo contenuto in R_2 e in particolare nei quattro rettangoli

$$R': \quad a \leq x \leq (x_{2\mu-1} + x_{2\mu-2})/2 \quad , \quad c \leq y \leq (y_{2\nu-1} + y_{2\nu-2})/2 ;$$

$$R'': \quad (x_{2\mu-1} + x_{2\mu-2})/2 \leq x \leq 2b \quad , \quad c \leq y \leq (y_{2\nu-1} + y_{2\nu-2})/2 ;$$

$$R''': \quad (x_{2\mu-1} + x_{2\mu-2})/2 \leq x \leq 2b \quad , \quad (y_{2\nu-1} + y_{2\nu-2})/2 \leq y \leq 2c ;$$

$$R^{IV}: \quad a \leq x \leq (x_{2\mu-1} + x_{2\mu-2})/2 \quad , \quad (y_{2\nu-1} + y_{2\nu-2})/2 \leq y \leq 2c .$$

D'altronde usando le rette della $D_{2\mu,2\nu}$ e le rette $x = (x_{2\mu-1} + x_{2\mu-2})/2$, $x = 2b$, $y = (y_{2\nu-1} + y_{2\nu-2})/2$, $y = 2c$, si ottiene per ciascuno dei quattro rettangoli R', R'', R''', R^{IV} una divisione mediante un numero pari di orizzontali ed un numero pari di verticali, cioè una $D_{2\mu'+1,2\nu'+1}$ per ciascun rettangolo. Quindi i valori assoluti delle Σ^* relative a queste divisioni sono, per ipotesi, limitati, e poichè la somma delle quattro $\overline{\Sigma}^*$ ora dette non è che la Σ^* associata alla $D_{2\mu,2\nu}$ considerata in principio, l'asserto resta dimostrato.

4. Concludiamo con qualche osservazione.

i) La relazione $F \leq F_1$ può stabilirsi immediatamente anche in base ad un risultato di M. Morse e W. Transue [6].

ii) La classe delle funzioni F è, come è noto, più ampia di quella delle funzioni a variazione limitata secondo Vitali [7]; perciò lo stesso è della classe F_1 e risulta in tal modo chiusa una questione posta nell'Introduzione del lavoro citato di S. Faedo.

iii) Da quanto si è visto resta stabilito anche il fatto che nella Definizione F_1 non è essenziale la condizione che le divisioni $D_{m,n}$ debbano essere delle $D_{2\mu+1,2\nu+1}$.

iv) Le notevoli proprietà di cui godono le funzioni F restano acquisite alle funzioni F_1; dispensandoci dall'elencarle [8] ci limiteremo ad osservare che se $f(x,y)$ è una F_1 ed è inoltre a variazione limitata rispetto a ciascuna variabile separatamente, essa è anche una funzione a variazione limitata nel senso di Tonelli.

v) La Definizione F_1 si presta, al pari della Definizione F, ad essere estesa alle funzioni di più di due variabili. I ragionamenti da noi fatti sono legati solo formalmente al numero n delle variabili, cosicchè l'equivalenza delle F_1 ed F sussiste anche per $n > 2$.

In considerazione anche di ciò la forma della Definizione F_1 appare molto più semplice di quella della F, dove per n variabili occorre introdurre n insiemi di costanti $\epsilon, \bar{\epsilon}, \cdots, \bar{\bar{\epsilon}}$. Una tale maggiore semplicità si riflette, per certe questioni almeno, come si è accennato in principio, in una non lieve semplificazione dei calcoli.

(6) Ved. M. MORSE-W. TRANSUE, *Functionals of bounded Fréchet variation.* « Canadian J. of Math. », 1, pp. 153-165 (1949), lemma 3.4.

(7) Ved. J. A. CLARKSON-C. R. ADAMS, loc. cit., esempio E.

(8) Cfr. J. A. CLARKSON-C. R. ADAMS, loc. cit., theorem 3; M. MORSE-W. TRANSUE, lavori cit.

Geometria. — *Sugli invarianti d'una varietà algebrica a tre dimensioni.* Nota di LEONARD ROTH, presentata (*) dal Corrisp. B. SEGRE.

Nella sua Memoria (1) fondamentale sulle varietà algebriche, Severi considera, fra l'altro, i legami che passano tra i caratteri numerativi del sistema canonico (virtuale, impuro) d'una V_3, già argomento di alcune ricerche di Pannelli (2). Però il procedimento di Severi, che è basato su considerazioni di natura invariantiva, riesce alquanto laborioso, dimodochè egli stesso prevede la possibilità d'una sistemazione più semplice della teoria per via numerativa. Nella presente Nota tale sistemazione viene effettuata poggiando su alcuni lavori precedenti, dai quali deduconsi delle formule per gli invarianti d'una V_3 non-singolare di $S_r (r > 6)$ e d'una V_3 di $S_r (r = 4, 5, 6)$ dotata di singolarità ordinarie. Così vengon stabilite, con mezzi puramente proiettivi, le relazioni di Pannelli e di Severi; queste erano già state altrimenti ottenute da B. Segre (3), che ne ha anche assegnate le interpretazioni geometrico-funzionali.

1. Consideriamo una V_3 algebrica irriducibile, dello spazio S_r, e *generica* nel senso che ora preciseremo. Se $r > 6$, la V_3 è priva di singolarità mentre, se $r < 6$, essa è dotata delle singolarità (dette ordinarie) che caratterizzano una varietà proiezione generica d'una V_3 generica di $S_r (r > 6)$; risulta che, nei casi $r = 6, 5$, su V_3 v'è rispettivamente un numero finito di nodi impropri od una curva doppia impropria. Nel caso $r = 4$, che particolarmente ci interessa, le singolarità di V_3 sono le seguenti:

(*i*) anzitutto vi è una superficie doppia nodale D che, come si vede facilmente, dev'essere priva di nodi impropri;

(*ii*) su D vi è una curva C, tripla per V_3 ed anche per D, pel punto generico della quale V_3 passa con tre falde lineari distinte. Su C vi è un numero finito di punti che sono quadrupli per V_3 e per C, e sestupli per D;

(*iii*) inoltre su D vi è una curva C′ cuspidale, luogo dei punti di D in cui le due falde di V_3 coincidono. Le curve C e C′ hanno in comune un gruppo di punti, che chiameremo *stazionari* per V_3.

In relazione a questo schema introduciamo i seguenti caratteri proiettivi, i quali sono di fatto gli unici che compariranno nei nostri calcoli: l'ordine n di V_3; i caratteri proiettivi *elementari* di D, cioè l'ordine α_0, il rango α_1, la classe α_2, e il ceto β_2; l'ordine t e il rango r di C, e la classe t_1 d'immersione di C in V_3; il numero ξ dei punti quadrupli, e il numero τ dei punti stazionari, ambedue su C. Però tra questi 10 caratteri passano tre relazioni. Anzitutto il valore di t_1 viene dato da

$$t_1 = t(n - 3) - 4\xi. \tag{1}$$

(*) Nella seduta del 12 maggio 1951.

(1) F. SEVERI, «Rend. Circ. Mat. Palermo», *28*, 33 (1909).

(2) M. PANNELLI, «Rend. Acc. Lincei» (5), *15*, 483 e 619 (1906).

(3) B. SEGRE, «Mem. Acc. d'Italia», *5*, 479-576 (1934).

Poi, in virtù del fatto che D è priva di nodi impropri, segue facilmente [4] che

$$\alpha_0(\alpha_0 - 1) - \alpha_1 = 2p_1 + 6\xi + \beta_2. \tag{2}$$

Infine, considerando le coincidenze entro i gruppi di iperpiani tangenti a V_3 lungo C, troviamo che

$$\tau = 2(p_1 - r). \tag{3}$$

2. Incominciamo col caso d'una forma V_3, dotata di singolarità ordinarie; e consideriamo il sistema $|F^{(l)}|$ di superficie segato su V_3, fuori di D, dalle forme aggiunte di un dato ordine l: sistema che, per l abbastanza alto, è certamente effettivo, costituito di superficie irriducibili, ed a curva caratteristica $\Gamma^{(l)}$ irriducibile. In tal caso si possono applicare [5] i metodi classici di Severi per calcolare i quattro caratteri proiettivi elementari di $F^{(l)}$ e dedurre l'ordine e il rango di $\Gamma^{(l)}$; ne conseguono formule determinanti il genere aritmetico di $F^{(l)}$, il genere di $\Gamma^{(l)}$, ed il grado del sistema $|F^{(l)}|$. Quando $l = n - 5$, può ben darsi che uno o più degli enti geometrici suddetti divengano virtuali: tuttavia le formule ottenute valgono a darci in ogni caso per $l = n - 5$ i valori degli invarianti $\Omega_2, \Omega_1, \Omega_0$ del sistema $|K|$ canonico (virtuale, impuro) di V_3. Le relative espressioni degli invarianti in funzioni dei caratteri proiettivi trovansi nei lavori citati in [5]; ad esempio

$$\Omega_0 = n(n-5)^3 - \alpha_0(9n^2 - 89n + 218) + 2(\alpha_0^2 - \alpha_2 - \beta_2) + \alpha_1(7n - 38) + \\ + 2p(7n - 66) + 16\xi + r. \tag{4}$$

A noi non conviene riprodurre qui le formule corrispondenti per Ω_1 e Ω_2, giacchè, come tosto vedremo, questi caratteri vengon dati da altre espressioni più semplici. Intanto dalle formule suddette discende la relazione di Pannelli,

$$2\Omega_1 - 2 = 3\Omega_0 \text{ [6]}. \tag{5}$$

Inoltre, calcolando l'invariante ω di Castelnuovo–Enriques per la superficie virtuale K, otteniamo la relazione, anch'essa dovuta a Pannelli,

$$\omega = 4\Omega_0 + 1 \text{ [7]}. \tag{6}$$

3. Un altro invariante di V_3, che è stato introdotto da Severi, è il genere aritmetico, definito mediante la formula

$$P_a = \binom{n-1}{4} - d(n-5), \tag{7}$$

(4) Cfr. F. SEVERI, «Rend. Circ. Mat. Palermo», *15*, 33 (1901).

(5) L. ROTH, «Rend. Acc. Lincei» (6), *21*, 314 (1935); «Proc. London Math. Soc.» (2), *40*, 217 (1936).

(6) Per l'interpretazione geometrico–funzionale di questa relazione, ved. B. SEGRE, loc. cit., n. 21.

(7) Per l'interpretazione geometrico–funzionale di questa relazione, cfr. B. SEGRE, loc. cit., n. 22.

ove $d(n-5)$ rappresenta la postulazione virtuale di D per le forme aggiunte di ordine $n-5$. Con procedimento analogo a quello del n. 2, e poggiando su alcuni risultati dell'A., il Todd [8] ha ottenuto la seguente formula:

$$(8) \qquad P_a = \binom{n-1}{4} - \binom{n-4}{2}\alpha_0 + (n-5)(\pi-1) - (p_a+1) + (n-5)t + \xi.$$

Qui π rappresenta il genere sezione di D, dato da

$$(9) \qquad 2(\pi-1) = \alpha_1 - 2\alpha_0,$$

mentre p_a denota il genere aritmetico di D, che si esprime facilmente colla

$$(10) \qquad p_a = \alpha_0 - 1 - \frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{1}{6}\alpha_2 + \frac{1}{12}(\beta_2 + \tau).$$

Sostituendo i valori di π e P_a nella (8) e facendo uso delle (1)-(5), viene stabilita l'importante relazione di Severi

$$(11) \qquad 2P_a = \Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 + 4\ [9].$$

4. Passiamo ora alle V_3 generiche degli spazi S_r, con $r > 4$. È chiaro che per esse gli invarianti Ω_i, P_a potrebbero venir calcolati mediante una proiezione opportuna; però tale procedimento risulterebbe assai faticoso e non corrisponderebbe alle esigenze della situazione, in quanto tali varietà vengon di solito specificate mediante altri caratteri proiettivi, che sono additivi. Per spiegare meglio la cosa, conviene distinguere due casi, secondochè $r \geqq 6$ od $r < 6$. Risulta dalle ricerche di Severi che una V_3 generica di S_r ($r \geqq 6$) possiede 7 caratteri proiettivi *elementari*, che denotiamo rispettivamente con $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \nu_2, \nu_3, \nu_{21}$. E precisamente, $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \nu_2$ sono i caratteri proiettivi elementari della sezione iperpiana generica di V_3; μ_3 e ν_3 sono rispettivamente la classe e il ceto di V_3, rappresentati col simbolismo di Schubert da

$$\mu_3 = (r-4, r-3, r-2, r) \quad , \quad \nu_3 = (r-6, r-2, r-1, r);$$

infine, collo stesso simbolismo, il carattere ν_{21} è dato da

$$(r-5, r-3, r-1, r).$$

Va notato che tutti questi caratteri rimangono invarianti per proiezione generica sopra uno spazio di dimensione non minore di 6. Però dalle definizioni date appare subito che, nel caso $r \leqq 5$, il carattere ν_3 viene a mancare; e che, se $r = 4$, manca pure ν_{21}. Sorge quindi il problema di trovare due caratteri proiettivi additivi, atti a colmare la lacuna in questi casi. Ora se proiettiamo V_3 su S_4, il carattere ν_2 si trasforma nell'ordine della curva C' sulla forma W_3 così ottenuta (n. 1); ciò suggerisce l'idea di scegliere come caratteri suppletivi il rango ρ di C' e la classe ζ d'immersione di C' in W_3. Questi sono definiti per ogni valore di r e, per di più, si esprimono facilmente in funzioni dei caratteri

(8) J. A. Todd, « Journal Lond. Math. Soc. », *9*, 206 (1934).

(9) Per l'interpretazione geometrico-funzionale di questa relazione, ved. B. Segre, loc. cit., nn. 24, 31, 50.

elementari relativi ad $r \geqq 6$; difatti, osservando che ρ e ζ devono essere funzioni lineari omogenee di codesti caratteri, otteniamo le formule

$$(12) \qquad \rho = 3\nu_3 + 2\nu_{21} - 2\nu_2 \quad , \quad \zeta = 4\nu_3 + 2\nu_{21} - 2\nu_2 .$$

5. Per una V_3 di S_r (con $r > 4$) priva addirittura di singolarità v'è luogo a considerare un altro carattere importante, definito come segue. È noto che, per le forme di ordine l abbastanza elevato costrette a passare per V_3, vale la formula di postulazione

$$(13) \qquad \nu(l) = (p_0 + 1)\binom{l+3}{3} - (p_0 + p_1)\binom{l+2}{2} + (p_1 + p_2)\binom{l+1}{1} - (p_2 + p_3).$$

Sappiamo inoltre che, nella (13), $p_0 + 1$, p_1, p_2 rappresentano rispettivamente l'ordine, il genere della curva sezione, e il genere aritmetico della superficie sezione di V_3: il numero p_3, che *a priori* risulterebbe un nuovo carattere della varietà, chiamasi *genere aritmetico virtuale* di V_3. È un risultato classico che p_1 e p_2 sono ambedue caratteri *numerativi* di V_3, cioè esprimibili in funzioni dei caratteri proiettivi elementari; più precisamente, sono funzioni lineari di questi ultimi.

Nella sua Memoria già citata, Severi osserva che anche p_3 e gli invarianti Ω_i debbono risultare caratteri numerativi di V_3 (e funzioni lineari dei 7 caratteri proiettivi elementari), purchè sia verificata una certa ipotesi di lavoro, esplicitamente formulata da Severi come tale: bisogna cioè ammettere che ogni V_k ($k = 1, 2, 3$), dotata di singolarità, sia ottenibile come limite d'una V_k non-singolare dello stesso ordine. Una volta accettata questa ipotesi, le relative formule possono ottenersi riferendosi a qualche V_3 particolare, ad esempio ad un'intersezione completa di forme; per questa via giungiamo ai risultati

$$(14) \qquad 24(p_3 - 1) = \mu_3 - 7\mu_2 + 18\mu_1 - 24\mu_0 + \nu_{21} - 3\nu_2$$

$$(15) \qquad \Omega_0 = \mu_3 - 12\mu_2 + 48\mu_1 - 64\mu_0 + \nu_3 + 2\nu_{21} - 12\nu_2 .$$

Troviamo inoltre che l'invariante Ω_1 soddisfa alla relazione (5) di Pannelli, e che tra gli invarianti passa la relazione

$$(16) \qquad 2p_3 = \Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 + 4.$$

Pertanto p_3 non è altro che il genere aritmetico P_a della proiezione di V_3 su S_4.

È questa la via seguita dall'A. in un lavoro [10] del 1937, ove son date anche le formule per gli invarianti d'una V_4, sempre sotto l'ipotesi di Severi. In una Memoria [11] quasi contemporanea, il Todd ritrova le stesse formule, ma per equivoco attribuisce a Severi una dimostrazione della sua ipotesi, la quale invece non è ancora completamente giustificata, neppure nel caso delle curve.

6. Resta quindi il problema di stabilire le (14)-(16) con metodi rigorosi. Per quanto concerne la relazione $p_3 = P_a$, il passo essenziale è già stato

(10) L. ROTH, «Proc. Cambridge Phil. Soc.», *33*, 188 (1937).
(11) J. A. TODD, «Proc. Lond. Math. Soc.» (2), *43*, 190 (1937).

compiuto nella Memoria di Severi. Difatti, proiettando V_3 su S_4, egli ottiene che

$$p_3 + P_a = \Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 + 4;$$

e basta confrontare questo risultato colla (11) per dedurne che è $p_3 = P_a$.

Invece le espressioni delle Ω_i in funzioni dei caratteri proiettivi elementari non si ottengono senza calcoli piuttosto difficili. Proiettiamo anzitutto V_3 in una forma W_3 di S_4, dotata di singolarità ordinarie; per W_3 i caratteri $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ sono identici a quelli analoghi di V_3, il carattere ν_2 di V_3 diventa l'ordine della curva C′ cuspidale di W_3, e ν_3 e ν_{21} vengon sostituiti dai caratteri ρ e ζ forniti dalle (12). Ora si presenta la necessità di esprimere $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \nu_2, \rho, \zeta$ in funzione dei caratteri non–additivi del n. 1, onde permetterci di calcolare i valori di Ω_0 e P_a mediante le (4) e (8); si tratta, in altri termini, di stabilire per W_3 un sistema di equazioni analoghe a quelle trovate da Cayley e Zeuthen per le superficie di S_3 dotate di singolarità ordinarie. Un tale sistema si trova in due lavori [12] del 1933 e del 1934; la maggior parte delle equazioni ivi stabilite dipendono dalla considerazione di opportune corrispondenze razionali, e dal computo delle molteplicità delle relative coincidenze. In questi lavori la determinazione di tali molteplicità vien effettuata ricorrendo a casi particolari, e precisamente con riferimento a W_3 luoghi di ∞^1 piani; le formule relative a queste varietà si trovano in un lavoro [13] anteriore, ottenute col metodo funzionale di Cayley, il quale – è bene avvertire – ancora attende una sistemazione rigorosa. Però le stesse formule furono poi riottenute dal Welchman [14], col metodo rigoroso del principio di corrispondenza su d'una curva algebrica.

Fisica. — *Una strana conseguenza delle equazioni della nuova teoria unitaria di Einstein.* Nota di Augusto Gamba, presentata [*] dal Socio E. Perucca.

In una recente lettera a « Nature » [1] dal titolo presso a poco eguale, Gaganbihari Bandyopadhyay segnala un fatto curioso. Le nuove equazioni di Einstein [2] ammettono una soluzione statica a simmetria sferica solo se la carica è nulla o è nulla la massa.

A mio parere però l'interpretazione fisica che egli dà del tensore fondamentale einsteiniano g_{ik} non è corretta. Egli identifica la parte antisimmetrica g_{ik} col tensore elettromagnetico, mentre in realtà il tensore elettromagnetico va identi-

(12) L. Roth, « Proc. Lond. Math. Soc. » (2), *35*, 540 (1933), e *39*, 334 (1935). Va rilevato che le notazioni di questi lavori sono alquanto diverse da quelle della presente Nota.

(13) L. Roth, « Proc. Lond. Math. Soc. » (2), *33*, 115 (1931).

(14) W. G. Welchman, « Proc. Cambridge Phil. », *29*, 103 (1933).

(*) Nella seduta del 12 maggio 1951.

(1) Gaganbihari Bandyopadhyay, « Nature », *167*, p. 648 (1951).

(2) Einstein, *The meaning of Relativity*, Princeton University, trad. it. di L. A. Radicati, Einaudi (1950), appendice II.

ficato col tensore coniugato ${}^*g_{ik}$ [3]. Nè si può dire, come egli asserisce, che le equazioni di Einstein siano le stesse della analoga teoria di Schroedinger [4] quando in quest'ultima un certo parametro λ sia posto eguale a zero.

Può quindi avere un certo interesse ristudiare il problema con la identificazione corretta e direttamente senza passare per le equazioni di Schroedinger. Si tratta di trovare una soluzione statica, a simmetria sferica che descriva il campo nel vuoto, creato da una massa carica. Nella vecchia teoria della gravitazione il problema era stato risolto da Nordström e altri [5].

Le equazioni di Einstein si scrivono:

$$(1) \qquad R_{kl} = \Gamma^{\alpha}_{kl,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{k\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha l} - \frac{1}{2}\left[\Gamma^{\alpha}_{\underline{k\alpha},l} + \Gamma^{\alpha}_{\underline{l\alpha},k}\right] + \Gamma^{\alpha}_{kl}\Gamma^{\beta}_{\underline{\alpha\beta}} = 0$$

$$(2) \qquad \begin{cases} g_{ik,l} - g_{\alpha k}\Gamma^{\alpha}_{il} - g_{i\alpha}\Gamma^{\alpha}_{lk} = 0 \\ \Gamma_i = 0 \end{cases}$$

(somma da 1 a 4 sugli indici greci, per il significato dei simboli ved. Einstein, op. cit.).

Cerchiamo in coordinate polari una soluzione del tipo:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} -e^{\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r^2 & \varepsilon \sin\theta & 0 \\ 0 & -\varepsilon \sin\theta & -r^2 \sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\nu} \end{pmatrix}$$

dove λ, ν sono due funzioni, che dobbiamo determinare, della sola r, ed ε è una costante.

Il tetravettore corrente

$$I_{ikl} = \underset{\vee}{g_{ik,l}} + \underset{\vee}{g_{kl,i}} + \underset{\vee}{g_{li,k}}$$

è nullo per la costanza di ε.

Più precisamente il tensore elettromagnetico ha diversa da zero solo la componente $\underset{\vee}{{}^*g_{14}}$ che vale

$${}^*\underset{\vee}{g_{14}} = \frac{\varepsilon\, e^{(\lambda+\nu)/2}}{\sqrt{r^4+\varepsilon^2}}$$

che in prima approssimazione ($\lambda = \nu = 0$, $r \gg \varepsilon$) si riduce a ε/r^2 cioè a un campo elettrostatico coulombiano. ε deve quindi identificarsi con la carica elettrica.

È facile riconoscere a questo punto che il problema risolto da G. B. è più simile se mai al caso di una massa materiale dotata di massa magnetica.

(3) P. UDESCHINI, «Rend. Lincei», VIII, 9, p. 256 (1950).

(4) E. SCHROEDINGER, «Proc. Roy. Irish Acad.», 51 (A), 163 (1947).

(5) Per riferimenti ved. EDDINGTON, «Mathematical Theory of Relativity», Cambridge, II ed., p. 185.

Entrando con questi valori dei g_{ik} nelle (2) si ricavano i seguenti valori per i Γ (quelli non scritti esplicitamente sono nulli; l'apice indica derivazione rispetto a r):

$$\Gamma^1_{11} = \frac{\lambda'}{2}$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{r^3}{r^4 + \varepsilon^2}$$

$$\Gamma^4_{14} = \frac{\nu'}{2}$$

$$\Gamma^1_{22} = -\, e^{-\lambda} r \, \frac{r^4 - \varepsilon^2}{r^4 + \varepsilon^2}$$

$$\Gamma^3_{23} = \operatorname{cotg} \theta$$

$$\Gamma^1_{33} = -\, \sin^2 \theta \, e^{-\lambda} r \, \frac{r^4 - \varepsilon^2}{r^4 + \varepsilon^2}$$

$$\Gamma^2_{33} = -\, \sin \theta \cos \theta$$

$$\Gamma^1_{44} = \frac{\nu'}{2} e^{\nu - \lambda}$$

$$\Gamma^1_{\underset{\vee}{23}} = e^{-\lambda} \sin \theta \cdot \frac{2 \varepsilon r^3}{r^4 + \varepsilon^2}$$

$$\Gamma^2_{\underset{\vee}{13}} = \sin \theta \cdot \frac{\varepsilon r}{r^4 + \varepsilon^2}$$

$$\Gamma^3_{\underset{\vee}{12}} = -\, \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\varepsilon r}{r^4 + \varepsilon^2}$$

e sostituendo nelle (1) si trova, separando la parte simmetrica da quella antisimmetrica, che le sole equazioni non identicamente nulle e indipendenti sono:

$$(1') \quad \begin{cases} R_{11} = -\, \dfrac{\nu''}{2} - \dfrac{\nu'^2}{4} + \dfrac{\lambda'}{r} + \dfrac{\lambda' \nu'}{4} - \dfrac{8 \varepsilon^2 r^2}{(r^4 + \varepsilon^2)^2} - \dfrac{\varepsilon^2 \lambda'}{r^5 + \varepsilon^2 r} = 0 \\ R_{22} = 1 - e^{-\lambda} \left\{ 1 + \dfrac{(\nu' - \lambda') r}{2} \cdot \dfrac{r^4 - \varepsilon^2}{r^4 + \varepsilon^2} + 2 \varepsilon^2 \dfrac{r^4 - \varepsilon^2}{(r^4 + \varepsilon^2)^2} \right\} = 0 \\ R_{44} = e^{\nu - \lambda} \left\{ \dfrac{\nu''}{2} + \dfrac{\nu'}{4} (\nu' - \lambda') + \dfrac{\nu'}{r} - \dfrac{\varepsilon^2 \nu'}{r^5 + \varepsilon^2 r} \right\} = 0 \\ R_{\underset{\vee}{23}} = \sin \theta \cdot \dfrac{e^{-\lambda} \varepsilon r^2}{(r^4 + \varepsilon^2)} \left\{ r (\nu' - \lambda') + \dfrac{4 \varepsilon^2}{r^4 + \varepsilon^2} \right\} = 0 . \end{cases}$$

Il sistema (1') non è compatibile che nel caso in cui $\varepsilon = 0$, cioè nel caso di carica nulla, la soluzione essendo allora quella ben nota di Schwarzschild (6).

La difficoltà segnalata da G. B. si ripresenta quindi ancora, sebbene solo nei riguardi della carica.

(6) Eddington, op. cit., p. 82 e sgg.

Fisica. — *Diffrazione di raggi X nel benzolo al variare della temperatura* (*). Nota di FRANCESCO CENNAMO, presentata (**) dal Socio A. CARRELLI.

In due Note precedenti sono stati riportati i risultati ottenuti relativamente al comportamento dell'anello di diffrazione del benzolo in un caso in presenza di un liquido polare (alcool etilico) (1) e nell'altro caso di un liquido non polare (tetracloruro di carbonio) (2). Si riportano in questa Nota i risultati relativi al comportamento dello stesso anello di diffrazione del benzolo la cui distribuzione delle intensità è stata ora studiata al variare della temperatura del liquido.

Il dispositivo sperimentale è lo stesso di quello usato nei due casi precedenti ed anche in questa ricerca il fascetto di raggi X (del diametro di mm. 1,8) era reso monocromatico con un filtro di Ni. (La radiazione utilizzata era quindi la K_α del Cu).

I risultati ottenuti con le diverse lastre alle varie temperature erano fra di loro confrontabili perchè su ciascuna lastra, oltre all'alone di diffrazione prodotto dal liquido in esame, venivano registrate una serie di marche di intensità in rapporto noto per cui dalla misura degli annerimenti da queste prodotti è possibile costruire una curva di taratura annerimenti–intensità.

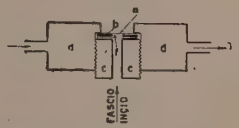


Fig. 1.

La vaschetta contenente il liquido era ricavata da una camera cilindrica di ottone a doppia parete di cui nella fig. 1 si riporta la sezione longitudinale. Le pareti *a* della vaschetta di mica erano mantenute aderenti ad un dischetto di ottone *b* a facce piane e parallele per mezzo della pressione esercitata dalla vite *c*, forata lungo l'asse in modo da poter permettere il passaggio al fascetto di raggi incidenti; nella concamerazione circolava acqua proveniente da un ultratermostato. Il liquido da analizzare posto tra due laminette di mica in *f* raggiungeva rapidamente la temperatura dell'acqua circolante: infatti si è provato con esperienze preliminari che facendo circolare acqua alla temperatura di 5 °C tutto il benzolo della concamerazione *f* solidificava; posto invece in *f* della naftalina pura in polvere, questa fondeva quando l'acqua posta in circolazione raggiungeva la temperatura di 82 °C; pertanto si è autorizzati ad assumere come temperatura del liquido posto nella vaschetta quella dell'ultratermostato.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica Sperimentale dell'Università di Napoli. Si ringrazia il prof. Carrelli per i mezzi messi a disposizione.

(**) Nella seduta del 12 maggio 1951.

(1) F. CENNAMO, *Diffrazione di raggi X nei miscugli benzolo-alcool etilico.* « Rend. Accademia dei Lincei », vol. IX, p. 339 (1950).

(2) F. CENNAMO, *Diffrazione di raggi X nei miscugli benzolo–tetracloruro di carbonio.* « Rend. Acc. dei Lincei », vol. X, pp. 310–314 (1951).

Lo spessore del liquido attraversato dai raggi X e cioè lo spessore del dischetto *b* era di mm. 0,8.

Sono state eseguite tre serie di misure: in una prima serie ($t = 6{,}0$; 10,7; 24,0; 50,0 °C) la lastra fotografica (sono state adoperate pellicole Ferrania tipo N) era disposta a mm. 41 dal centro della vaschetta; nelle altre serie ($t = 14{,}5$; 35,0; 50,0 e 66,0 °C) la lastra era invece disposta a 34 mm. dalla vaschetta. Dalle microfotometrie eseguite nella direzione del diametro dell'alone, calcolati gli annerimenti, si passava col solito metodo alla distribuzione delle intensità in funzione degli angoli θ di diffrazione, avendo cura di moltiplicare i valori letti per le intensità nelle varie direzioni per l'espressione $1/\cos^3\theta$ (ciò allo scopo di tener conto del fatto che la lastra era piana e non cilindrica) e render quindi tra loro confrontabili i risultati relativi alle diverse lastre. In fig. 2 sono riportati gli andamenti delle distribuzioni delle intensità dei raggi diffratti dal benzolo relativi ad alcune temperature in funzione degli angoli di diffrazione. Come è facile osservare, oltre ad un continuo, dovuto a varie cause, che si estende da 0,1 a 0,7 rad. (zona da noi esplorata), sovrapposto a questo compare un massimo molto ben deliminato, che, come è noto, è stato interpretato alla particolare struttura dei liquidi che dal punto di vista microscopico non possono considerarsi tali e le cui molecole risultano in molti casi raggruppate e disposte secondo un ordine simile a quello che compare nei cristalli. In fig. 3 sono riportate le stesse bande di diffrazione relative all'alone di diffrazione nelle quali però è stato sottratto il continuo.

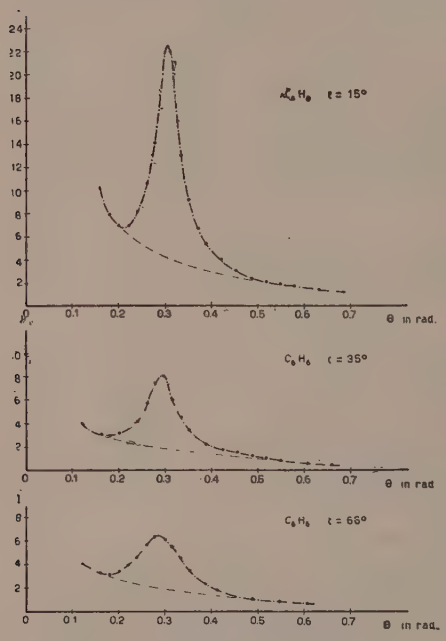


Fig. 2.

L'aumento della temperatura produce le seguenti modifiche nella struttura della banda di diffrazione del benzolo:

a) Spostamento del massimo di diffrazione verso angoli più piccoli e conseguentemente aumenti delle distanze reticolari, definite come è noto, dalla formula di Bragg:

$$d = \frac{\lambda}{2 \operatorname{sen} \theta/2} .$$

Nella fig. 4 sono riportati, in funzione delle temperature, segnate sulle ascisse, i valori ottenuti per tali distanze reticolari:

b) diminuizione, con l'aumentare della temperatura, del valore della intensità misurata in corrispondenza del massimo di diffrazione.

In fig. 5 si riportano tali valori relativi a tutte le misure eseguite nelle tre serie effettuate.

c) In corrispondenza alla diminuzione citata della intensità del massimo di diffrazione si osserva un notevole aumento nella larghezza della banda, misurata come al solito dalla espressione: $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$ essendo θ_1 e θ_2 rispettivamente i valori degli angoli di diffrazione per i quali è: $I' = I_m/2$.

Nella fig. 6 – curva *a*) – sono riportati i valori di $\Delta\theta$ sperimentali.

Come abbiamo già ricordato a proposito dei miscugli benzolo – tetracloruro di carbonio – tale aumento nella larghezza della banda di diffrazione potrebbe essere messa in relazione ad una diminuzione delle dimensioni dei raggruppamenti cibotattici.

Un aumento nella larghezza dell'alone è invero prevista dalla formula proposta da Raman e Ramanathan [3] per interpretare la distribuzione delle intensità dei raggi X diffratti dal liquido e la posizione dei massimi: da tale formula si ricava che la larghezza $\Delta\theta$ deve essere funzione del coefficiente di compressibilità isotermica β e della temperatura assoluta T. Nella stessa fig. 6 – curva *b*) – è riportato l'andamento di β previsto dalla formula citata (i valori di β alle varie temperature per il benzolo sono stati ricavati dalle tavole delle costanti fisiche); come si vede l'andamento della larghezza in funzione di T è analogo a quello sperimentale ma non proporzionale a questo come sarebbe

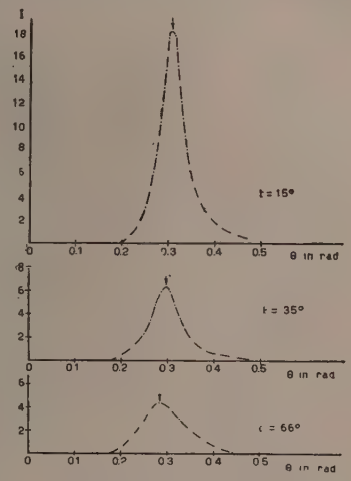


Fig. 3.

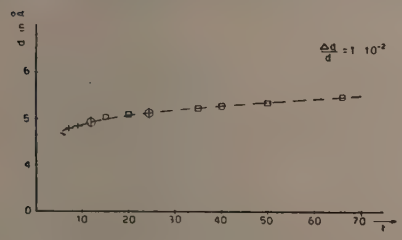


Fig. 4.

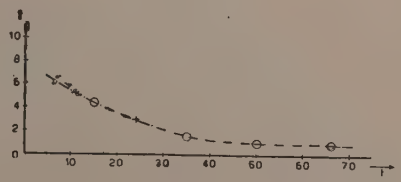


Fig. 5.

logico aspettarsi se l'aumento della larghezza dipendesse, come supposto da Raman esclusivamente dalle variazioni del coefficiente di compressibilità e della temperatura. Occorre inoltre mettere in evidenza che questa teoria statistica che studia l'influenza delle ripartizioni delle molecole in seno al fluido, trascura gli effetti di diffrazione intramolecolari ed inoltre non è possibile da essa trarre alcuna

(3) C. V. RAMAN e K. R. RAMANATHAN, «Proc. Ind. Assoc. Cultiv. Sc.», *8*, 11, 197 (1923); «Nature», III, 185 (1923).

conseguenza sulla disposizione delle molecole. Nella stessa fig. 6 – curva *c*) – è infatti riportato in funzione di t l'andamento del rapporto $\Delta\theta_t/\Delta\theta_s$: tale rapporto non solo non è costante; come già si è detto, ma decresce con l'aumentare della temperatura. A basse temperature la larghezza misurata sperimentalmente è molto minore di quella prevista teoricamente (circa la metà); un migliore accordo si ha per alte temperature. Nella fig. 7 sono riportate, per la temperatura $t = 30$:

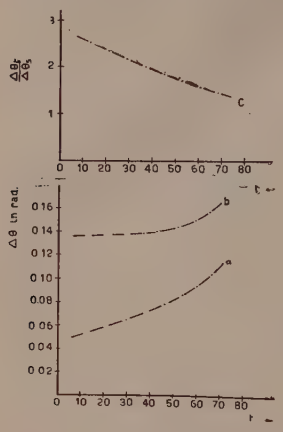


Fig. 6.

a) la curva di distribuzione delle intensità in funzione di $d = \dfrac{\lambda}{\operatorname{sen}\theta/2}$ calcolata in base alla formula teorica prevista dal Raman, *b*) la distribuzione delle intensità ottenuta per lo stesso liquido da Hwelett col metodo di ionizzazione, *c*) la curva ottenuta da noi sperimentalmente col metodo fotografico. Evidentemente alle tre curve si è assegnato per il massimo delle intensità lo stesso valore.

Come si vede per piccoli valori di d per entrambe le curve sperimentali vi è un accordo abbastanza soddisfacente con l'andamento teorico previsto da Raman (a parte la maggior larghezza di cui si è già parlato); per grandi valori di d invece l'andamento sperimentale da noi trovato è in ottimo

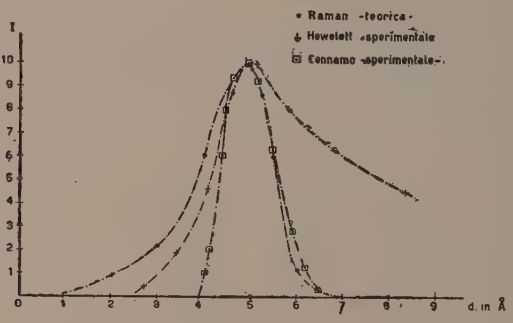


Fig. 7.

accordo con quello teorico dal quale si discosta invece l'andamento di Hwelett [4]. È opportuno fare osservare però che per questi ultimi valori l'A. non ha proceduto alla eliminazione del continuo.

(4) C. V. Hwelett, «Phys. Rev.», *20*, 688 (1922).

Chimica organica. — *Chetoni dai diazochetoni.* I. – *Sintesi di α — ω — = diacetilparaffine* (*). Nota di LUIGI CANONICA e TULLIO BACCHETTI, presentata (**) dal Socio L. CAMBI.

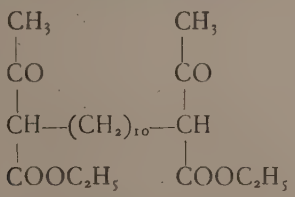
Quantunque i dichetoni ed i chetoesteri del tipo:

$$CH_3CO(CH_2)_nCOCH_3 \qquad e \qquad CH_3CO(CH_2)_nCOOR$$

nei quali sia $n > 4$ interessino oggi la chimica dai composti macrociclici, le difficoltà connesse alla preparazione di tali composti fanno sì che ben pochi siano i termini delle due serie finora noti. Riguardo ai chetoesteri del tipo sopra indicato è presumibilmente di interesse generale il metodo applicato da Ruzicka e Stoll (1) alla preparazione del 9–acetilpelargonato di etile, ottenuto per azione dello ioduro di zincometile sul cloruro del monoestere dell'acido sebacico.

La reazione tra i cloruri degli acidi e lo ioduro di zincometile aveva già permesso a Blaise e Koehler (2) di ottenere dichetoni del tipo suddetto con n compreso tra quattro e sette, a partire dai cloruri degli acidi bicarbossilici; tale metodo fallisce però con il cloruro dell'acido glutarico e non ne è descritta l'applicazione a cloruri di acidi omologhi all'azelaico.

Applicabili alla sintesi di altri dichetoni appaiono infine i procedimenti dei quali si sono serviti Stoll e Rouve per la preparazione del 2–15–dichetoesadecano (intermedio per la sintesi del muscone), ottenuto per elettrosintesi secondo Kolbe di una miscela degli acidi 10–chetoundecanoico e 6–chetoeptadecanoico o per decarbossilazione dell'estere 2–15–dichetoesadecan–3–14–dioico:



(da estere acetacetico ed 1–10–dibromodecano). Su di essi gli A. A. si riservano di riferire (3); la sintesi acetacetica era già d'altro canto nota per qualche dichetone a più corta catena, ad opera di Perkin jun. e Marshall e poi di v. Braun (4); essa non sembra però, almeno nelle condizioni solite, fornire in ogni caso decorsi di reazione particolarmente favorevoli.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale dell'Università di Milano.
(**) Nella seduta del 6 giugno 1951.
(1) «Helv. Chim. Acta», *10*, 639 (1927).
(2) «Bull. Soc. Chim.», *7*, 215, 410, 655, 710 (1910).
(3) «Helv. Chim. Acta», *30*, 2019 (1947).
(4) «Ber.», *46*, 1791 (1913).

Noi abbiamo ottenuti vari dichetoni a lunga catena secondo la sequenza di reazioni:

$$ClCO(CH_2)_nCOCl \xrightarrow{CH_2N_2} N_2CHCO(CH_2)_nCOCHN_2 \xrightarrow{HCl}$$

$$\rightarrow ClCH_2CO(CH_2)COCH_2Cl \xrightarrow{riduz.} CH_3CO(CH_2)COCH_3.$$

Tale procedimento, che ci riserviamo di estendere ad altri casi, consente, in modo presumibilmente molto generale, di trasformare un acido carbossilico R—COOH nel corrispondente metilchetone $R—COCH_3$.

Le rese elevate e la grande semplicità di esecuzione sembrano, soprattutto ove si operi su quantità non rilevanti, renderlo di impiego assai conveniente rispetto ai metodi già noti.

La riduzione di diazochetoni a metilchetoni era stata recentemente realizzata per pochi termini nel campo della chimica degli zuccheri e per il diazoacetofenone da Wolfrom e Brown (5) facendo agire a freddo un notevole eccesso di acido iodidrico concentrato sulla soluzione cloroformica del diazochetone. In tali condizioni l'acido iodidrico, secondo lo schema solito per la reazione tra acidi alogenidrici e diazoderivati alifatici trasforma dapprima il diazochetone in iodochetone, a sua volta rapidamente ridotto da una seconda molecola di idracido:

$$RCOCHN_2 + HI \longrightarrow N_2 + RCOCH_2I$$

$$RCOCH_2I + HI \longrightarrow I_2 + RCOCH_3.$$

Come reazione collaterale, può aversi quella dello iodio, che sin dall'inizio si libera, sul diazochetone, con formazione di diiodochetone.

Per la preparazione dei dichetoni che ci interessava ottenere ci siamo in un primo tempo serviti del metodo di Wolfrom e Brown, modificando come segue: la soluzione del diazochetone grezzo veniva addizionata di acido cloridrico fino a scomparsa del colore giallo del diazoderivato; per evaporazione del solvente si ottiene allora il clorometilchetone con rese praticamente quantitative. Non è così necessario isolare il diazochetone, nè vanno perse, ai fini della successiva riduzione, le quantità, generalmente non trascurabili, di clorometilchetone, che si formano già in un primo tempo, accanto al diazochetone, nella sintesi di questo da cloruro dell'acido e diazometano; diviene infine superfluo usare, in tale fase, il notevole eccesso di diazometano altrimenti consigliabile per deprimere la reazione collaterale che porta alla formazione del clorochetone.

I clorometilchetoni ottenuti, come è ben noto, reagiscono rapidamente in soluzione alcoolica o acetonica con gli ioduri alcalini, trasformandosi, per scambio tra gli alogeni, in iodochetoni. Abbiamo però constatato, operando sul cloroacetofenone e sull'1–8–dicloroottan–2–6–dione, come, in soluzione di acido acetico glaciale e con due mol. di ioduro alcalino per atomo di cloro, si manifesti una abbondante separazione di iodio, completa in breve tempo, mentre lo iodochetone, che in un primo tempo presumibilmente si forma, viene ridotto con buone rese a metilchetone.

(5) «Am. Chem. Soc.», *65*, 1516 (1943).

Risultati migliori abbiamo peraltro ottenuti riducendo il clorometilchetone con zinco in acido acetico glaciale alla temperatura del b. m. (6).

In tali condizioni, nei casi considerati, l'azione riducente si limita al distacco dell'alogeno, mentre il gruppo chetonico, anche se presente due volte nella molecola non viene aggredito in misura considerevole. È in esame l'azione di altri riducenti; tuttavia lo zinco in acido acetico ci ha per ora forniti i migliori risultati.

Il procedimento ora descritto è stato anzitutto sperimentato sul cloroacetofenone e sull'1–cloroenneadecan–2–one, quest'ultimo preparato dal già noto diazochetone derivante dal cloruro di stearoile: esso è stato poi applicato ai diazochetoni ottenuti dai dicloruri degli acidi adipico, suberico, azelaico, sebacico, undecandioico, dodecandioico e tetradecandioico, in parte già noti, come alcuni dei diclorometilchetoni corrispondenti; i termini intermedi della sintesi sono stati per ora sempre isolati.

L'acido undecandioico è stato ottenuto, attraverso la sua diammide, per trasposizione di Wolff–Arndt–Eistert, dal bisdiazochetone dal cloruro di azelaile.

Dei dichetoni ottenuti solo quelli a 8, 10, 12 e 13 atomi di carbonio erano finora noti. Verrà prossimamente riferito sulla preparazione di altri termini e sulle caratteristiche chimiche di queste sostanze.

PARTE SPERIMENTALE.

Ottan–2–7–dione. – Il diazochetone di partenza, già noto ad opera di Walker (7), è stato ottenuto, come gli altri più avanti descritti, secondo il metodo abituale per questi composti, lasciando cadere a gocce e sotto agitazione una soluzione del cloruro dell'acido (in questo caso cloruro di adipile) in etere anidro in una soluzione di diazometano. (5–6 mol.) in etere, raffreddando in ghiaccio. Dopo qualche ora si filtra alla pompa il precipitato separatosi, costituito dall' 1–8–bisdiazoottan–2–7–dione, p. f. 70°. La resa, come nei casi più avanti descritti oscilla tra il 90 e l'85 % del teorico (eventualmente dopo concentrazione delle acque madri). Il diazochetone così ottenuto viene disciolto in una piccola quantità di cloroformio–etere anidro (1 : 1) e nella soluzione si fa gorgogliare una lenta corrente di acido cloridrico secco, fino a decolorazione del liquido (10'); si evapora poi la maggior parte del solvente e dopo riposo in frigorifero si filtra alla pompa. L'1–8–dicloroottan–2–7–dione viene così ottenuto con rese praticamente quantitative e già molto puro; può venir cristallizzato da etere; p. f. 81–82°, secondo il dato della letteratura.

Per la riduzione a ottan–2–7–dione, g 2,5 del diclorochetone vengono disciolti in 25 cm^3 di acido acetico glaciale in un palloncino munito di refrigerante a ricadere ed alla soluzione si aggiungono g 2,9 (4 at. circa) di zinco in polvere. Si riscalda a b. m. fino a completa dissoluzione del metallo; si diluisce poi con un volume doppio di acqua e si aggiunge carbonato potassico solido fino a rea-

(6) La riduzione di clorometilchetoni a metilchetoni con zinco era nota dalla letteratura nel caso del 3–4–diossi–6–metilcloroacetofenone (Krannichfeldt, « Ber. », *46*, 4020 (1913)): nè essa poteva presentare interesse preparativo notevole prima che la sintesi attraverso il diazometano rendesse accessibili i clorometilchetoni con un procedimento che non fosse di alogenazione diretta.

(7) « Chem. Soc. », 1304 (1940).

zione appena debolmente acida: il dichetone si separa come olio giallo che viene ripetutamente estratto con etere. Gli estratti eterei, lavati con carbonato sodico al 5 % ed essicati su solfato sodico lasciano per evaporazione del solvente, da ultimo nel vuoto, un residuo di dichetone già solido a temperatura ambiente, del peso di g 1,6 (resa 80 % circa del teorico). Dopo cristallizzazione da etere di petrolio il prodotto si presenta in lamine bianche p. f. 40–43° come da letteratura.

Trattandolo al solito modo con p–nitrofenilidrazina in soluzione acetica, si ottiene il corrispondente bis-p–nitrofenilidrazone, che viene ricristallizzato da acido acetico glaciale: polvere cristallina di colore aranciato, p. f. 184° 5. All'analisi:

trov. %: N 20,45

Per $C_{20}H_{24}O_4N_6$ calc.: 20,40.

Il diazochetone di cui sopra è stato ridotto direttamente secondo il già citato metodo di Wolfrom e Brown, come segue:

Nella soluzione di g 11 di bisdiazochetone in 150 cm³ di cloroformio vengono lasciati cadere a gocce g 97 di acido iodidrico al 57 %, agitando energicamente e raffreddando in ghiaccio. Terminata l'aggiunta dell'acido (30′ circa) si lascia a riposo per 10′; lo strato cloroformico viene poi lavato con acqua, poi con soluzione di tiosolfato sodico ed infine ancora con acqua. Allontanato completamente il solvente nel vuoto si ottiene un residuo costituito da g 5,6 di dichetone. La resa in prodotto grezzo è quasi identica al caso precedente, il dichetone ottenuto però assai meno puro.

Decan–2–10–dione. – L'1–10–bisdiazo-2–9–decandione venne ottenuto nel solito modo dal cloruro di suberile e ricristallizzato da metanolo; lamine gialle p. f. 80°. All'analisi:

trov.: N 25,28

Per $C_{10}H_{14}O_2N_4$ calc.: 25,22.

Per azione dell'acido cloridrico su di esse si ottiene il già noto 1–10–diclorodecan–2–9–dione, p. f. 85–86°.

La riduzione del diclorochetone, condotta con le modalità prima indicate, fornisce il decan–2–9–dione con resa del 75 % circa; dopo cristallizzazione da etere di petrolio, p. f. 62°.

Per azione della 2–4–dinitrofenilidrazina in soluzione acetica si ottiene il corrispondente bis–2–4–dinitrofenilidrazone, che dopo cristallizzazione da acido acetico glaciale si presenta come polvere cristallina di colore giallo aranciato p. f. 199°. All'analisi:

trov. %: N 20,98

per $C_{22}H_{26}O_8N_8$ calc.: 21,12.

Undecan–2–10–dione. – A partire dal cloruro di azelaile il bisdiazochetone p. f. 85° [8] e da questo il diclorochetone, già noti, si preparano al solido modo. La riduzione con zinco viene condotta come già indicato; quando questa è ultimata, il dichetone, assai meno solubile che non i precedenti si separa abbondantemente per semplice diluizione con acqua, mentre il rimanente precipita dopo

(8) 83° secondo Erlenmejer e Buchler, «Helv. Chim. Acta», *29*, 1926 (1946).

neutralizzazione dell'acido acetico. La resa in prodotto grezzo si aggira intorno all'85%; dopo cristallizzazione da etere di petrolio, p. f. 63°. Il bis–p–nitrofenilidrazone ha, dopo cristallizzazione da acido acetico p. f. 179°. All'analisi:

trov. %: N 20,27

per $C_{23}H_{28}O_8N_8$ calc.: 20,58.

Dodecan–2–11–dione. – Il bisdiazochetone ed il diclorochetone erano già stati ottenuti dal cloruro di sebacile da Work [9]. Il dichetone ottenuto per riduzione al solito modo, con una resa del 75% viene ricristallizzato da benzolo–etere di petrolio (1 : 4). Lamine bianche lucenti p. f. 68°. All'analisi:

trov. %: C 72,45 H 11,25

per $C_{12}H_{22}O_2$ calc.: 72,67 11,18.

Il bis–2–4–dinitrofenilidrazone ha p. f. 175°. All'analisi:

trov. % N 19,99

per $C_{24}H_{30}O_8N_8$ calc.: 20,06.

Tridecan–2–12–dione. – Il bisdiazochetone ottenuto dal cloruro dell'acido undecandioico, dopo cristallizzazione da benzolo–etere di petrolio (1 : 4) si presenta come polvere cristallina gialla, p. f. 90°. All'analisi:

trov. %: N 21,22

per $C_{13}H_{20}O_2N_4$ calc.: 21,21.

Il diclorochetone non è stato isolato; la riduzione ha fornito con buone rese il dichetone, dopo cristallizzazione da benzolo–etere di petrolio p. f. 72°, in accordo con i dati della letteratura [4].

Tetradecan–2–13–dione. – Il cloruro dell'acido dodecandioico ottenuto per azione del cloruro di tionile sull'acido viene distillato ad una pressione di 0,5 mm.: p. eb. 140°; il bisdiazochetone ed il diclorochetone da esso ottenuti hanno le caratteristiche già descritte [7].

Il tetradecan–2–13–dione ottenuto dal diclorochetone per riduzione con una resa dell'85% si presenta, dopo cristallizzazione da etere di petrolio, in lamine bianche p. f. 77°. All'analisi:

trov. %: C 74,01 H 11,55

per $C_{14}H_{26}O_2$ calc.: 74,27 11,58.

Il bis–2–4–dinitrofenilidrazone cristallizza da acido acetico con p. f. 144°. All'analisi:

trov. %: N 19,21

per $C_{26}H_{34}O_8N_8$ calc.: 19,10.

Esadecan–2–15–Dione. – Il cloruro dell'acido, ottenuto per azione del cloruro di tionile sull'acido tetradecandioico, distilla a 0,6 mm a 165–170° ed a temperatura ambiente rapprende in una massa gelatinosa. Il corrispondente bisdiazochetone, dopo cristallizzazione da benzolo–etere di petrolio (1 : 4) ha p. f. 102°;

(9) «Chem. Soc.», 1318 (1940).

l'acido cloridrico lo trasforma nell'1–16–dicloroesadecan–2–15–dione, p. f. 102° dopo cristallizzazione da metanolo. Il dichetone viene ottenuto per riduzione con una resa del 91 % e cristallizza da etere di petrolio con p. f. 83°. All'analisi:

trov. %: C 75,45 H 11,86

per $C_{16}H_{30}O_2$ calc.: 75,53 11,86.

Il bis–2–4–dinitrofenilidrazone p. f. 117° ha dato all'analisi:

trov. %: N 18,46

per $C_{28}H_{38}O_8N_8$ calc.: 18,22.

Acetofenone. – La riduzione del ω-cloroacetofenone con zinco in acido acetico ha dato una resa in acetofenone del 71 %, il chetone dopo la riduzione è stato isolato allo stato di 2–4–dinitrofenilidrazone avente le caratteristiche già note.

Nel saggio di riduzione del clorochetone con ioduro potassico si facevano cadere lentamente nella soluzione di g 5 di clorochetone in 25 cm³ di acido acetico glaciale g 12,4 di ioduro disciolti nella quantità necessaria di acido acetico al 50 %. Si ha immediata separazione di iodio; dopo 15′ si neutralizza la maggior parte dell'acido acetico con carbonato potassico e si estrae ripetutamente con etere.

Gli estratti eterei vengono lavati con soluzione di tiosolfato sodico fino a decolorazione e si allontana il solvente da ultimo a pressione ridotto; il residuo viene trasformato nel 2–4–dinitrofenilidrazone. Resa: 55 % circa.

Enneadecan-2-one. – L'1–diazoenneadecan–2–one, ottenuto per azione del cloruro di stearoile sul diazometano [10], viene disciolto nella quantità necessaria di etere–cloroformio (1 : 1) e nella soluzione si introduce acido cloridrico gassoso fino a decolorazione. Si allontana il solvente ed il residuo si distilla a pressione ridotta: p. eb. a 1,4 mm. 170°.

A temperatura ambiente il clorochetone rapprende in una massa solida p. f. 60°. All'analisi:

trov. %: Cl 10,50

per $C_{19}H_{37}OCl$ calc.: 10,68.

La riduzione, eseguita al solito modo su g 11 di clorochetone ha dato una resa in chetone grezzo del 92 % del teorico; dopo cristallizzazione da etere di petrolio si ottiene una resa dell'85 % in chetone puro p. f. 55° secondo i dati della letteratura [11].

Acido undecandioico. – G. 2 di bisdiazochetone dal cloruro di azelaile disciolti in cm³ 40 di diossano vengono riscaldati a b. m. con 10 cm³ di ammoniaca acquosa concentrata e 0,2 cm³ di nitrato di argento al 10 %. Terminato lo sviluppo di azoto si filtra a caldo e si evapora circa metà del solvente; per raffreddamento cristallizzato g 1,5 di diammite undecandioica, avente le caratteristiche già note per questo prodotto [12].

Per saponificazione con idrato potassico al 20 % si ottiene l'acido corrispondente con rese quantitative.

(10) Grundmann, «Ann.», *524*, 31, 36 (1937).
(11) Riedel, «Chem. Zbl.», *1*, 1403 (1909).
(12) Barnicoat, «Chem. Soc.», 2928 (1927).

Geologia. — *Notizie preliminari sulla tettonica del margine sudorientale della regione fra il Sebino e l'Eridio*(*). Nota di ALFREDO BONI, presentata(**) dal Corrisp. G. B. DAL PIAZ.

Nella zona del margine sudorientale della regione fra il Sebino e l'Eridio – alla stratigrafia della quale ho accennato in altra Nota preliminare (1) – si possono, dal punto di vista tettonico, distinguere alcune linee di contatto anomalo per dislocazione, limitanti zolle dalla struttura più o meno semplice; di queste linee è interessante vedere il collegamento con quelle osservate nella porzione centrale della regione stessa.

Procedendo da nord verso sud la prima di queste linee di dislocazione si sviluppa lungo il contatto fra « massiccio cristallino », rappresentato in superficie dagli scisti cristallini o dal loro rivestimento permiano (a giacitura suborizzontale o comunque poco disturbata), a settentrione e terreni permo-triassici a sud, per lo più fortemente inclinati o verticali o addirittura ribaltati, geometricamente simili al fianco di una grande flessura, passante talora a piega a ginocchio, se non mancasse, a completare questo tipo strutturale, ogni raccordo fra strati del fianco e strati del rivestimento del massiccio ed anche il collegamento a sud non fosse reso difficile da altre complicazioni.

Lungo questa linea di dislocazione al Dosso Alto le formazioni mediotriassiche immergono a SSE con inclinazione media; a ovest di Bagolino gli strati sono subverticali con immersione a nord; nella zona di Riccomassimo gli strati raibliani immergono a nord all'incirca con inclinazione di 20°–30°, la Dolomia Principale del versante meridionale del Caffaro ha però di nuovo pendenza forte. Data la successione da nord a sud delle formazioni dalla più antica alla più recente, gli strati in corrispondenza alla valle del Caffaro sono evidentemente ribaltati e l'entità di questo ribaltamento, almeno per le formazioni più profonde e sino a Riccomassimo, cresce da ovest a est.

Sul fianco sud del costone Cima dell'Ora–M. Suello gli strati della Dolomia Principale tornano ad immergere a sud e si nota una graduale transizione dall'immersione a nord a quella a sud di questi strati subverticali.

Una seconda linea di dislocazione, che costituisce quindi il limite meridionale di una zolla a strati permo–triassici per lo più fortemente inclinati, corre in corrispondenza all'orlo meridionale della striscia retica che da S. Antonio sul lago d'Idro sale al Passo del Mare. Veramente il Bittner (2) parla, per questa

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geologia nell'Università di Pavia e compreso nel programma del Centro Studi di Petrografia e Geologia del Consiglio Nazionale delle Ricerche presso l'Università di Padova.

(**) Nella seduta del 12 maggio 1951.

(1) A. BONI, *Notizie preliminari sulla stratigrafia del margine sudorientale della regione fra il Sebino e l'Eridio*. « Rend. Acc. Naz. Lincei », Cl. sc. fis. mat. e nat., ser. VIII, vol. VIII, fasc. 4, p. 356.

(2) A. BITTNER, *Ueber die geologischen Aufnahmen in Judicarien und val Sabbia*. « Jahrb. K. K. geol. Reichsanstalt », 31 Band, 1881, III Heft. Wien 1881.

zona, di una sinclinale nella Dolomia Principale di cui il Retico occupa il nucleo e la cui ala settentrionale ha forte inclinazione a SE, mentre quella meridionale l'ha debole a NW. Bisogna però ricordare che questa striscia retica dal crinaletto a est dei Fienili Melzani a S. Antonio si abbassa in pochissimo spazio da quota 1000 a quota 443: anche ammettendo l'intervento di qualche frattura, per parlare di una sinclinale bisognerebbe ammettere una depressione assiale verso levante di tale entità che gli strati dell'ala meridionale non avrebbero certo inclinazione a NW, ma piuttosto a ENE.

Inoltre la concordanza del Retico colla Dolomia Principale, se è evidente nell'ala settentrionale, non lo è a sud, dove questa formazione raggiunge, pur con strati poco inclinati, quote notevoli, in certo qual modo incombendo sul Retico (Cima Meghè: m. 1801, Cima Valcaelli: m. 1374); a meno di dare all'ala meridionale stessa un andamento diverso da una debole immersione a NW.

Penso quindi che si debba piuttosto ritenere che la sinclinale originaria – se anche è esistita – si sia deformata, almeno verso levante, nel senso che la Dolomia Principale a sud si sia sollevata lungo un piano di scorrimento, determinandosi così un contatto anomalo rispetto al Retico, con piegamenti locali degli strati lungo il piano stesso. L'entità di questo scorrimento potrebbe essere diversa da un punto all'altro e, forse, crescente verso il lago d'Idro.

A ovest del Passo del Mare l'affioramento retico si esaurisce; secondo il Bittner (loc. cit.) sul versante settentrionale di M. Meghè si troverebbero però blocchi isolati di Retico, che sarebbero resti della continuazione della striscia. A parte questi blocchi, che non ho visto, qui ad ogni modo avviene il contatto fra la Dolomia Principale delle Cime Baremone, immergente, con forte inclinazione, a SE e la Dolomia Principale di Cima Meghè, che, a parte le zone marginali, sembra presentare soltanto una debole pendenza nello stesso senso. Più a NW si verifica il contatto fra la Dolomia Principale subverticale dell'alta valle della Berga e quella suborizzontale di Cima della Zerna e di Cima Cadoline.

Altra ben evidente linea di dislocazione è quella che si sviluppa da Forno d'Ono al km. 2 della strada lungo la val dell'Abbioccolo; essa mette a contatto l'Anisico inferiore a nord e il Raibliano a sud. Il riconoscimento che la base del Monte Corna è ancora in Anisico inferiore e non in Dolomia Principale sposta – rispetto a quanto indicato nella prima parte di questi miei studi – la suddetta linea a sud del Monte stesso, in corrispondenza a « la Passata », dove infatti il contatto è ben evidente; il relativo piano, segnato prima come a spianapoggio, ha invece una più verosimile disposizione a reggipoggio non molto lontana però dalla verticale.

Ad oriente dell'Abbioccolo la discordanza non è evidente; infatti essa, se si continua, porta a contatto Dolomia Principale con Dolomia Principale. Il Cacciamali (3) fa proseguire il suo orlo IV per la Valmarsa, poi a sud della Corna Zeno sino a S. Antonio. Per riconoscere l'eventuale continuazione della linea conviene esaminare la struttura della grande placca triangolare di Dolomia Principale – comprendendo in questa anche le facies speciali, che ulteriori osserva-

(3) G. B. Cacciamali, *Morfogenesi delle Prealpi Lombarde.* Brescia 1930.

zioni mi inducono a considerare come intercalazioni, per lo più nella sua parte superiore – che si estende fra il lago d'Idro e l'Abbioccolo.

Lungo questo torrente, sul suo versante sinistro, la Dolomia Principale sembra costituire, almeno nella parte bassa, un pacco continuo e regolare di strati immèrgenti a SE, dalla Cima della Zerna sino ai fianchi meridionali della Corna Zeno; essa poggia per lo più sul Raibliano: solo da Ponticello al Molino, lungo l'Abbioccolo, viene a contatto diretto cogli strati di La Valle. Nelle parti alte della Cima Meghè e della Corna Zeno le condizioni di giacitura sono meno evidenti; particolare risalto morfologico ha la striscia di facies speciali che da Passo Zeno, attraverso Cima Cereto Chetoi, raggiunge il lago d'Idro. In essa le condizioni di giacitura degli strati sono spesso ben evidenti e non sempre corrispondono a quelle della grande placca predetta; o meglio esse sembrano quelle generali però con contorsioni locali e soprattutto ai margini delle fasce, dove esse tendono ad avvicinarsi alla verticale (vedi ad esempio nella zona di Soscà o a Fonc); in questi punti però anche la Dolomia tipica tende ad assumere le stesse caratteristiche. Ciò mi aveva fatto pensare in un primo tempo ad una struttura a scaglie, la quale contrastava però con la regolarità della Dolomia Principale sul versante sinistro dell'Abbioccolo. Ora ritengo che queste strutture siano limitate alla porzione superiore della placca; la diversa plasticità delle facies speciali determinerebbe i suddetti motivi locali e marginali. Ciò porta di necessità all'ammissione di limitati scivolamenti delle masse più elevate di Dolomia tipica, comprendenti le facies speciali.

Con questo non voglio naturalmente escludere la presenza di vere scaglie entro la placca di Dolomia Principale. Alcune anzi sono molto verosimili. Nell'alta Valmarsa il Raibl si spinge molto in alto entro la Dolomia, sin quasi al passetto a nord di Cima della Coca; da questo punto sino a Squassaiotto la Dolomia appare molto brecciata: è verosimile che in questa direzione corra una linea di dislocazione; forse essa va a congiungersi col margine settentrionale della fascia di facies speciali del M. Paghera. Altra minore esiste probabilmente in corrispondenza al Canale del Re (a nord di Cima Poline).

In queste condizioni non è facile riconoscere l'eventuale continuazione ad est dell'Abbioccolo della linea di dislocazione Forno d'Ono–Abbioccolo; mi sembra poi molto verosimile che l'unico grande accavallamento quale si è manifestato sin qui, venga, verso oriente, sostituito da più dislocazioni minori; oltre le due già ricordate ha probabilmente la stessa funzione vicariante rispetto al grande sovrascorrimento la dislocazione fra Dolomia tipica e facies speciali allo sbocco della val Canale; altra esiste forse fra facies speciali e Dolomia delle Chegarole.

A sud del predetto contatto anomalo fra Anisico inferiore e Raibliano da Forno d'Ono all'Abbioccolo la struttura è caratterizzata da alcune pieghe: anzitutto quella di Levrange, che, per la sua continuazione in val Tovere, sarebbe meglio chiamare, dal nome della regione interessata, « della Pertica » e che ha il carattere di una piega a ginocchio, essendo l'ala settentrionale molto meno inclinata di quella meridionale, che è subverticale; la piega maggiore è movimentata da pieghe secondarie, evidenti nella successione degli affioramenti del

fondovalle del Degnone e nell'andamento della scogliera esiniana. Nella zona di Monte Zovo l'anticlinale della Pertica passa a piega faglia con accavallamento dell'ala sud su quella nord; essa si continua sin nella zona di Lavenone, dove sembra però stabilirsi diretto contatto fra il Raibliano dell'ala nord e gli strati di La Valle del nucleo o addirittura coll'Esino dell'ala meridionale.

Immediatamente a nord di Vestone affiora per breve tratto nella zona da me rilevata una strettissima anticlinale a nucleo di strati di La Valle.

Passando all'esame delle strutture trasversali, ricordo come molto si è parlato di una frattura in corrispondenza alla valle dell'Abbioccolo (la « Ponticello-bruchlinie » del Bittner (loc. cit.) e la « linea del Maniva » del Cozzaglio [4]). Mi sembra che di una vera frattura non si possa parlare. Infatti non si verifica un effettivo troncamento degli affioramenti medio–triassici contro la Dolomia Principale del versante orientale dell'Abbioccolo; essi, benchè stirati e ridotti, in generale si portano su questo versante e immergono, sotto la Dolomia; solo nel tratto da Ponticello al km. 8 all'incirca si stabilisce un contatto discordante fra Dolomia Principale e Trias medio; al costone di Cima Poline e sopratutto in località « i Monti » i vari livelli sono tutti presenti.

Sul versante est dell'Abbioccolo la Dolomia Principale stessa mostra immersione a SE con pendenza abbastanza marcata. Del resto se si guarda da sud la crestolina spartiacque fra Berga ed Abbioccolo nel tratto Cima della Zerna–Passo della Spina si vede chiaramente il passaggio della giacitura suborizzontale a quella con inclinazione apparente a est. Credo quindi che si possa affermare che in corrispondenza della valle dell'Abbioccolo si manifesti una flessura assiale (che in qualche punto potrà anche assumere il carattere di frattura) accompagnata da scollamento e scorrimento di strati in corrispondenza delle formazioni più plastiche, come il Raibliano, che peraltro in generale viene fortemente ridotto; flessura che verso est ci conduce in un territorio stratigraficamente sempre più basso, dove appunto i terreni medio–triassici non affiorano più.

A nord di Cima della Zerna la grande flessura sembra continuarsi – un po' spostata a ovest – nella frattura, o nelle fratture, del Maniva.

Nel « massiccio cristallino », di cui sarà più dettagliatamente parlato in altra sede, l'abbassamento verso est si manifesterebbe nello spostamento della prima bancata porfirica dal Cascinello dei Zocchi alle Persole. Veramente il Cozzaglio [5] dà a questa frattura un'età permiana compresa fra la prima e la seconda colata porfirica. Varie ragioni, che esporrò in altro lavoro, mi fanno però ritenere che si tratti di tettonica alpina. Lo spostamento sembra essere avvenuto lungo un piano immergente, con notevole inclinazione, a NE circa.

L'abbassamento verso est si rende di nuovo evidente lungo la fascia retica che dal Passo del Mare si porta a livello del lago d'Idro e nella striscia di facies speciali che degrada dal Passo Zeno al lago.

(4) A. Cozzaglio, *Significato e limiti dei fenomeni di carreggiamento nelle Prealpi Bresciane*. Comm. Ateneo Brescia per l'anno 1922.

(5) A. Cozzaglio, *Roccie eruttive delle Prealpi Bresciane e loro influenza sulla struttura e sul meccanismo delle montagne*. Comm. Ateneo di Brescia per l'anno 1927. Brescia 1928.

Più a SE invece, nella zona del M. Paghera e soprattutto del M. Sassello si nota una torsione degli strati, che vengono assumendo una direzione SW–NE ed inclinazione più o meno marcata; tale torsione, fino ad un certo punto, compensa la depressione assiale verso levante. In essa si manifesta il passaggio alla direzione giudicariense.

Ci si può domandare, in relazione coll'ipotesi del Cozzaglio (loc. cit.), secondo la quale lungo la frattura Breno–Maniva sarebbe avvenuta la traslazione verso NW della zolla occidentale, se si abbiano tracce di un siffatto movimento. Indizi se ne potrebbero vedere nello stiramento delle formazioni triassiche e soprattutto raibliane lungo la valle dell'Abbioccolo, e principalmente nell'arretramento del limite fra la Dolomia Principale suborizzontale e quella subverticale; lo spostamento a nord del margine meridionale dell'affioramento di cristallino nella zolla occidentale è minimo o addirittura nullo, per cui sembra che lo spostamento a nord della placca di Dolomia suborizzontale sia compensato dal ribaltamento della sinclinale del fondovalle Trompia.

Altre fratture più ad occidente accennano maggiormente ad uno scorrimento orizzontale anche nel «massiccio cristallino». In questa mi sembra prevalente l'affondamento della zolla ad est e la derivazione da una flessura.

Ad oriente di questa altre fratture esistono; fra le principali ricorderò quella che ad est del Dosso Alto limita il suo grande affioramento di Esino rispetto all'esigua fascia esiniana di S. Gervasio; in corrispondenza ad essa mutano le caratteristiche geometriche degli strati. Essa, o esse, poichè possono essere anche più d'una, si continuano ad est delle Cime Baremone, dove separano zolle di Dolomia Principale in condizioni diverse di giacitura. Più a sud non ne ho potuto stabilire la continuazione.

Ben marcata, nel massiccio cristallino affiorante, è quella della val Vaia: essa probabilmente si continua lungo il Caffaro a ovest di Bagolino e poi a est del M. Spezie e del M. Breda sino alla zona dei F.li Melzani; in questo suo tratto non è però evidente.

Netta è pure quella a ovest di Cerreto, che sposta verso sud gli affioramenti triassici e probabilmente si continua nella Dolomia Principale della Piana dei Bandi, per poi perdersi nel lago.

Un'altra forse esiste a ovest di Riccomassimo, in corrispondenza alla valletta, a separare il Trias medio a forte inclinazione (a ovest) da quello poco pendente (a est).

Le due anticlinali «della Pertica» e di Vestone sono dal De Sitter [6] indicate (tav. XXXVIII) come aventi depressione assiale verso ponente; a me sembra che, come una depressione assiale in questo senso è evidente, altrettanto lo è quella verso Lavenone.

La struttura del M. Corna e della zona che gli sta a est mostra pure l'influsso di una componente trasversale; il primo anzi, ridotto alle sue linee fondamentali, corrisponde ad una ristretta sinclinale – più o meno deformata, ad asse

(6) L. U. DE SITTER e C. M. DE SITTER-KOOMANS, *The geology of the Bergamasc Alps, Lombardia, Italy*. «Leidse Geologische Mededelingen», Deel XIV B, 1949. Leiden.

NW–SE; la seconda ad una grande intumescenza a cupola – con molte deformazioni, piccole fratture e limitati scorrimenti – tronca a sud nella zona dell'accavallamento Forno d'Ono–Abbioccolo. Il mosaico di affioramenti della zona del Passo Croce, citato nella nota stratigrafica, è da interpretarsi analogamente come reazione locale agli sforzi nelle direzioni longitudinale e trasversale.

Si ripete quindi anche qui, come nella porzione centrale, l'esistenza di faglie a direzione NW, piano verticale o immergente a NE, con scorrimenti orizzontali limitati e affondamento della zolla orientale. Inoltre nelle pieghe si manifesta, attraverso i loro giochi assiali, l'effetto di una compressione, o quanto meno costrizione, in senso E–W o NE–SW. Ciò sembrerebbe dovuto al passaggio alla direzione giudicariense che comincia a farsi sentire verso il lago d'Idro.

Collegamento con le linee strutturali della porzione centrale. – La linea di dislocazione più settentrionale, quella che mette a contatto il massiccio cristallino o il suo rivestimento permiano con le formazioni permiane o triassiche del tratto longitudinale della valle del Caffaro, è evidentemente la continuazione della cosidetta «linea della Val Trompia», di cui ripete il carattere più volte illustrato, sul quale non è il caso di ritornare. Qui la scaglia di cristallino, contro cui vengono ad urtare le formazioni permo-triassiche, sembra essere sempre la stessa e con superficie di taglio prossima alla verticale.

La seconda linea di dislocazione – quella che limita il complesso di strati a mo' di flessura a nord da quelli a blanda inclinazione a sud, e che decorre da S. Antonio al Passo del Mare, al Passo della Spina, al Passo delle Portole, si ricongiunge – in certo senso – alla linea limite di quello che nella prima parte ho chiamato «ricoprimento dell'Ario». Esiste però una differenza notevole fra il ricoprimento suddetto e la zolla compresa fra la linea della Val Trompia e la linea S. Antonio–Val della Berga; nel primo le formazioni permo–triassiche hanno tipicamente una disposizione a sinclinale coll'ala meridionale sovrascorsa sulla «zolla della Corna Blacca»; la seconda invece è costituita da un pacco di strati inclinati e ribaltati (passanti verso sud – almeno all'estremo orientale della zona – all'immersione normale) per lo più con inclinazione forte. Ciò suggerisce l'idea che essi corrispondano in certo qual modo all'ala settentrionale della suddetta sinclinale.

A questo punto ci si può chiedere dove avvenga il passaggio dall'una struttura all'altra, dove cioè la sinclinale si riduca soltanto all'ala settentrionale e manchi quindi un ricoprimento vero e proprio. Nella prima parte dei miei studi ho indicato a nord dei Monti di Paio una struttura a sinclinale, benchè deformata segnando sul versante meridionale della Val Trompia una serie dal più recente al centro verso il più antico alla periferia, come ala meridionale sovrascorsa. Il riconoscimento del Raibliano fra l'Esino e la Dolomia Principale dei Monti di Paio sino alla quota 1621 a sud di questi (non segnato sulla carta della prima parte) conferma questa struttura. Più ad oriente, nell'alta Val Trompia, sino a Stabul all'incirca, la struttura a sinclinale è ancora evidente, coll'ala settentrionale ribaltata. Il limite sembrerebbe quindi passare ad un dipresso per Stabul e corrispondere alla frattura del Maniva, cioè alla grande flessura che qui assume il carattere di faglia

La linea Forno d'Ono–Abbioccolo è evidentemente un tratto della più grande linea Zigole–Abbioccolo, indicata nella prima parte. Come ho già osservato, le modifiche ad essa apportate per il tratto Forno d'Ono–Abbioccolo, le dànno un carattere unitario di linea di affioramento di un piano di accavallamento immergente a nord: quindi la sua continuazione verso ovest deve essere vista nella linea Odeno–Navono–Passo del Termine–Irma e non nella linea Irma–Passo delle Piazze–Alta Val Boino-Forno d'Ono, come era stato supposto nella prima parte.

Molto interessante sarà poi vedere la continuazione delle linee strutturali, soprattutto della linea della val Trompia a est del lago e del Chiese, dato anche che ultimamente lo Staub [7], continuando appunto la suddetta linea, ha distinto nel territorio a est del Chiese, « Bergamaskische und Karnische Einheit» da « Tridentinische Einheit und Bergamaskischer Randsaum ». Ad occidente nella zona di Pisogne, il limite fra le due unità mi sembra quanto mai incerto.

L'esistenza poi di una frattura in corrispondenza al lago d'Idro, che fu ammessa da alcuni Autori, appare molto inverosimile.

Del confronto con l'estremità occidentale della regione e dello schema orogenetico sarà detto in altra Nota.

Geologia. — *Sul Piano Calabriano Gignoux 1910* [*]. Nota preliminare di GIULIANO RUGGIERI, presentata [**] dal Socio M. GORTANI.

Il cumolo di notizie di vario ordine acquisito sui terreni marini Pliocenici e Quaternari italiani è ormai tale, che appare opportuno volgersi addietro, per considerare se e in quale misura sia tutt'ora valido quel quadro generale del Pliocene e del Quaternario inferiore così genialmente tracciato quasi quarant'anni or sono da M. Gignoux [1].

Fondandosi in parte sulle idee di C. de Stefani, ma con metodi alquanto diversi ed una documentazione notevolmente più ricca, egli suddivise in due piani stratigrafici quel complesso marino che segue al « Pliocene antico » [2], e se ne distingue per la diminuita percentuale di specie estinte e per la comparsa di immigrati di origine atlantica o nordatlantica (*ospiti nordici*). Per l'inferiore di questi due piani, nuovo e secondo il suo A. spettante ancora, come termine superiore, al Pliocene, propose il nome di Calabriano, per il superiore mantenne invece il vecchio piano Siciliano (Doderlein 1870), ricondotto al suo più ristretto significato.

(7) R. STAUB, *Betrachtungen über den Bau der Südalpen*. « Eclogae geologicae Helvetiae », vol. 42, N. 2, 1949.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geologia e Paleontologia dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 12 maggio 1951.

(1) M. GIGNOUX, *Les formations marines pliocènes et quaternaires de l'Italie du Sud et de Sicile*. « Ann. Univ. de Lyon », n. s., 36 Lyon–Paris, 1913.

(2) Con questo termine Gignoux indica il Pliocene str. s., corrispondente cioè alle ben note faune di Piacenza e di Asti.

Il piano Calabriano sarebbe risultato definito: 1° stratigraficamente per la sua perfetta continuità col « Pliocene antico », col quale avrebbe costituito un unico « ciclo sedimentario » ; 2° paleontologicamente per quei caratteri delle malacofaune sopra accennati; 3° morfologicamente rappresentando, nelle zone non successivamente disturbate, sedimenti di un mare la cui linea di riva si trovava a circa 300–400 metri sullo zero attuale.

La distinzione dal successivo piano Siciliano si sarebbe fatta in base ai seguenti caratteri di quest'ultimo: posizione trasgressiva sulle formazioni precedenti, plioceniche o prepliocèniche, indicante l'instaurarsi di un nuovo ciclo sedimentario; percentuale maggiore di *ospiti nordici* e minore di specie estinte; livello marino a 100 m. circa sullo zero attuale.

Gignoux non indicò una località tipo per il piano Calabriano, ma piuttosto descrisse una serie di giacimenti fossiliferi, spesso anche molto distanti fra loro, e talora così evidentemente non correlabili, che l'A. stesso fu costretto a raggrupparli in un Calabriano inferiore, a caratteri paleontologici relativamente ancora arcaici, e in un Calabriano superiore. Il tipo del Siciliano era già stato dato in precedenza coi celebri giacimenti dei dintorni di Palermo.

Riesaminiamo ora sommariamente i caratteri distintivi del piano Calabriano alla luce delle nuove conoscenze:

1° *Continuità sedimentaria coi terreni del « Pliocene antico »*. – Gignoux giudicò allora infondate le affermazioni di alcuni suoi predecessori, secondo i quali terreni che egli considerava calabriani avrebbero avuto giacitura trasgressiva. Per esempio, circa le relazioni fra le sabbie del Calabriano inferiore a Monte Mario (Roma) e le sottostanti « argille vaticane » così si esprimeva (p. 288):

« Il y a certainement une *continuité absolue* entre tous les termes de cette série sédimentaire, qui constitue, comme on le voit, un exemple typique de *cycle de remblaiement*. Beaucoup d'auteurs italiens (et M. Cerulli–Irelli l'affirmait encore récemment) indiquent une discordance entre les marnes du Vatican et les sambles gris: en réalité, il y a simplement une modification dans le régime de sédimentation . . . ».

Su questa continuità, così solennemente dichiarata e continuamente sostenuta in tutta la citata opera del Gignoux, già da tempo si sono sollevate voci discordi, e abbastanza recentemente Trevisan [3] ha dimostrato con documentazione precisa ed esauriente che in quasi tutta la Sicilia il Calabriano ha giacitura trasgressiva. Le osservazioni di Calabriano con giacitura trasgressiva si sono successivamente moltiplicate, ed in particolare essa è stata riconfermata anche a Monte Mario [4].

Con la costatazione che è tutt'altro che generale la continuità del Calabriano sul « Pliocene antico » cade uno dei più importanti, se non il più importante, dei criteri distintivi fra Calabriano e Siciliano.

(3) L. Trevisan, *Sull'Eocene e sulle trasgressioni nel territorio di Pachino*. « Boll. Soc. Sc. Nat. ed Econ. », 18, Palermo 1936. Gignoux (in « Geologische Jahresberichte », Band I, 1938) riconobbe l'importanza di questa costatazione con queste parole: « . . . ce qui rend évidemment plus difficile la definition stratigraphique de cet étage (il Calabriano), definition basée par son auteur sur sa concordance habituelle avec le Pliocène ancien ».

(4) Ved. L. Trevisan, *Osserv. sulla fauna malac. foss. di M. Mario*. « Atti. Soc. Tosc. Sc. Nat. » (Memorie), *56*, Pisa 1948, e C. Maxia, *Contributo alla geologia del Lazio. II*. « Boll. Uff. Geol. d'Italia », *70*, Roma 1950.

2° *Caratteri paleontologici.* – Le differenze di ordine paleontologico fra il Pliocene antico e il Calabriano appaiono forse oggi un po' meno nette di quanto non risultassero dal lavoro di Gignoux; d'altra parte già da una lettura meditata di questo appare che questa comparsa degli *ospiti nordici* non è stata così subitanea come è opinione diffusa, ma che alcuni di essi esistevano nel Mediterraneo già nel Pliocene antico; e che l'apprezzamento della posizione del limite fra Pliocene antico e Calabriano può in molti casi dipendere dal valore che il singolo studioso dà a questa o quella specie.

Le ultime ricerche hanno piuttosto ulteriormente ridotto, per non dire del tutto annullato, i caratteri distintivi fra Calabriano e Siciliano. Per rendere rigorosi i confronti mi limiterò ai dati ricavati dal Siciliano della zona classica di Palermo e da giacimenti calabriani compresi nelle aree studiate dal Gignoux.

Nel nuovo giacimento fossilifero del Siciliano detto « Cava Puleo » (presso Palermo) la dott.ssa E. Tamajo (5) ha constatato la persistenza di: *Fusus longiroster* (in precedenza noto solo dei giacimenti calabriani a caratteristiche arcaiche di S. Cristina d'Aspromonte e di Monte Mario), *Murex pseudobrandaris* (ritenuto estinto col Calabriano), *Chlamys histrix tricostulata* n. var. (meglio nota come *Chl. angelonii*, ritenuta esclusiva del Pliocene antico) e *Murex squamulatus* (ritenuto estinto col Calabriano inferiore di Monte Mario).

Sempre a Palermo, T. de Stefani (6) ha segnalato di un nuovo giacimento siciliano il *Cerithium varicosum* (che si riteneva non sopravvivesse al Calabriano inferiore di Castrovillari, Girgenti e Monte Mario) e l'*Aporrhais uttingeriana* (ritenuta estinta col Calabriano).

Il già gracile elenco dei « caratteri negativi » del Siciliano rispetto al Calabriano risulta così talmente assottigliato che ci si può chiedere se i pochi residui non siano in relazione col fatto che praticamente si confrontano le faune siciliane di una zona limitata (bacino di Palermo) con quelle calabriane di quasi tutto il resto della penisola. I « caratteri positivi » a tutto rigore si riducono alla comparsa col Siciliano di due nuovi *ospiti nordici*, *Chlamys tigrina* e *Trichotropis borealis* (un unico esemplare noto). Tuttavia, osserva il Gignoux (p. 604) « il y a, a ce point de vue, une important différence entre les faunes calabrienne et sicilienne. On ne connait, en effet, dans le Calabrien, aucun gisément où autant de formes septentrionales se trouvent réunies avec autant de frequence que dans le Sicilien de Palerme ». Riguardo a questa affermazione ci si può chiedere se questa particolare abbondanza in *ospiti nordici* dei giacimenti di Palermo non dipenda dal fatto che non esiste nessun altro punto, eccetto il Calabriano « tout à fait basal » di Monte Mario, ove le faune a *Cyprina islandica* siano state così profondamente studiate.

In un giacimento calabriano (arenarie a *Pachylasma giganteum*) situato presso Casa Golino (Catanzaro Marina) ho rintracciato le seguenti forme settentrionali: *Cyprina islandica*, *Tapes rhomboides*, *Chlamys septemradiata*, *Mactra solida*, *Pholadidea loscombii*, *Buccinum undatum*, *B. humpreysianum*, *Trophon truncatus*, *T. aff. clavatus*, *T. muricatus*, *Natica clausa*, *N. montacuti.*

Se si pensa che questo elenco è frutto di una raccolta molto limitata nel tempo, su uno spazio limitatissimo, ed in condizioni di esposizione ben diverse da quelle ideali dei giacimenti palermitani; appare probabile che la densità in *ospiti nordici* abbia potuto anche nel Calabriano raggiungere punte di massimo paragonabili a quelle del Siciliano.

(5) E. TAMAJO, *Il Piano Siciliano e le sue relazioni paleontologiche col Calabriano.* « Boll. Soc. Geol. Ital. », *56*, Roma 1937.

(6) T. DE STEFANI, *Molluschi del giacimento del Pozzo di Mezzo Monreale.* « Boll. Soc. Geol. Ital. », *60*, Roma, 1942.

3° *Quota dell'antico livello marino rispetto allo zero attuale.* – Questo metodo per stabilire la cronologia di un giacimento, teoricamente valido per una regione rigida e stabile, nella quale le variazioni delle linee di riva rispecchino unicamente variazioni eustatiche del livello marino, appare poco o punto applicabile in una regione di sollevamento recente e con valori e modalità certamente diversi da una zona all'altra come l'Italia. Piuttosto che partire da una ricostruzione aprioristica delle antiche quote del livello marino fatta su punti privilegiati, mi sembra più logico da uno studio del Pliocene e del Quaternario fatto coi metodi classici della stratigrafia pervenire *come risultato* a questa ricostruzione.

In base a questi concetti non so se proprio possa ritenersi carattere valido per una distinzione cronologica il fatto che, ad esempio, gli orizzonti del Calabriano superiore a S. Maria di Catanzaro corrispondano ad un livello dell'antico mare di 300 m. sullo zero attuale, e quelli del Siciliano di Palermo a un livello di soli 100 m.

Tempo fa mi capitò fra mano una faunetta di molluschi, ancora alla rinfusa, delle classiche argille siciliane di Palermo, e mi meravigliai non tanto della sua somiglianza con le faune che ormai ben conoscevo del Calabriano superiore dei dintorni di Catanzaro, quanto da certo carattere arcaico che da essa, più che da quelle catanzaresi, spirava (specialmente per l'abbondanza delle grosse *Nassa clathrata*, della *Nucula placentina*, ecc.). carattere che forse sfugge a chi si limiti a leggere un crudo elenco di fossili. E mi venne spontaneo il chiedermi se veramente noi siamo giustificati quando consideriamo le faune del Calabriano superiore del Catanzarese anteriori a quelle del Siciliano di Palermo.

Dimostrata non generale la continuità Pliocene antico-Calabriano, apparendo dubbia la validità del metodo basato sulle quote degli antichi livelli marini, che erano gli unici criteri distintivi di carattere non paleontologico introdotti dal Gignoux, scomparse o quasi le ultime residue differenze di carattere paleontologico, lascio allo stesso Gignoux la risposta:

« Mais si, négligeant les formes caractéristiques, toujors plus o moins rares, on envisage la physionomie d'ensemble de ces faunes calabriennes (leggi: Calabriano superiore), elles ont dejà un caractère d'extrême jeunesse, et montrent fort peu de differences avec les faunes quaternaires (leggi: Siciliane). Aussi s'explique-t-on fort bien que M. de Stefani, ne prêtant pas d'attention qu'au point de vue paléontologique, ait contemporaneisé la plupart de ces giséments du Calabrien supérieur avec le Sicilien de Palerme » (Gignoux, p. 602).

Conclusione. – Non pretendo che gli elementi portati siano tali da dimostrare una effettiva possibilità di correlare il « Calabriano superiore » col « Siciliano » str. s. Mi sembra comunque che da essi emerga la necessità di nuove ricerche per una nuova, e più completa, definizione del piano Calabriano, specialmente per quanto riguarda il suo limite superiore. Nell'attesa della quale i termini Calabriano e Siciliano si dovranno impiegare con estrema cautela, se non come pura « ipotesi di lavoro ».

Fisiologia. — *Influenza dell'ovaio sulla sopravvivenza di ratti paratiroidectomizzati* (*). Nota di PAOLO ROWINSKI e GIOVANNI MANUNTA, presentata (**) dal Socio G. LEVI.

In questo Istituto era stato notato (Rowinski e Manunta 1951) che in un gruppo di ratti, cui era stata praticata la tiro-paratiroidectomia totale, i maschi morivano dopo pochi giorni dall'intervento, mentre le femmine sopravvivevano per un periodo abbastanza lungo. Data l'importanza di questa constatazione per la comprensione dei rapporti fra paratiroidi ed ovaio abbiamo voluto ripetere l'esperimento a studiare l'effetto della paratiroidectomia in femmine castrate.

A questo punto ci sembra opportuno riassumere brevemente i numerosi lavori che sono stati fatti per studiare l'influenza dell'ovaio sul metabolismo del calcio.

Nel merluzzo Hess e collaboratori (1928) hanno dimostrato che durante la maturazione delle uova la calcemia aumenta mentre questa è abbastanza costante nei maschi. Nelle femmine del rospo Xenopus, Shapiro e Zwarenstein (1933) hanno trovato che la calcemia è sempre più alta che nei maschi, fatto che si accentua durante la stagione della riproduzione, inoltre, nelle femmine castrate od ipofisectomizzate, si può innalzare la calcemia iniettando estratti ovarici.

Negli uccelli il metabolismo del calcio assume una particolare importanza a causa dell'abbondante secrezione di carbonato di calcio per la formazione del guscio per cui l'argomento è stato studiato ampiamente. Riddle e Reinhart (1926) hanno trovato che nel piccione durante la maturazione del tuorlo la calcemia sale da 9,4 mg % a 19,9 mg %. Analoghe differenze sono state notate nelle galline che depongono e non depongono da Parhon (1926), Hughes e collaboratori (1927), Buckner e collaboratori (1930), Charles ed Hogben (1933), Russel e collaboratori (1930), Sun e Macowan (1930) e Macowan (1932) hanno dimostrato che le variazioni della calcemia dipendono dallo sviluppo dei tuorli e non dalla secrezione del guscio.

Hanno ottenuto ipercalcemia somministrando estrogeni Riddle e Dotti (1936), Pfeiffer e Gardner (1938) nel piccione, Altmann e Hutt (1938), Landauer e collaboratori (1939), Zondek e Marx (1939) ed Avery e collaboratori (1940) nel pollo, Benoit e collaboratori (1941) nell'anitra domestica. Solanto Marlow e Koch (1937) e Marlow e Richert (1940) non ottennero risultati nel pollo, ma le dosi usate da questi ultimi Autori erano piccole per cui la mancanza dell'ipercalcemia può essere attribuita a questo fatto.

Mentre nei pesci e nei rospi non sono state studiate le modificazioni del tessuto osseo in relazione con il ciclo ovarico, negli uccelli queste ricerche

(*) Ricerche compiute nell'Istituto di Fisiologia veterinaria dell'Università di Sassari.

(**) Nella seduta del 12 maggio 1951.

vennero fatte da Kyes e Potter (1934), Bloom e collaboratori (1941), Riddle e collaboratori (1944) e da Clavert (1948) sul piccione. Kirschbaum e collaboratori (1939) studiarono il passero, Benoit e collaboratori (1941 *a*) l'anitra e Bloom e Domm (1941) la gallina. Questi Autori trovarono che in numerose ossa dello scheletro, specialmente nelle ossa lunghe con midollo ematopoietico si ha la neoformazione di osso nella cavità midollare, osso che viene riassorbito al momento della secrezione del guscio.

Con la somministrazione di estrogeni Zondek (1936) ottenne la iperossificazione nel piccione e questi risultati vennero confermati da Pfeiffer e Gardner (1938, loc. cit.) Clavert (1941–1942), Bloom e collaboratori (1940) che lavorarono ugualmente sul piccione. Landauer e collaboratori (1939, loc. cit.) nel pollo, Benoit e collaboratori (1941 *a*, loc. cit.), Landauer e collaboratori (1941), Landauer e Zondek (1944) nell'anitra confermarono questi risultati.

Per quanto riguarda l'influenza degli estrogeni sulla calcemia dei mammiferi i dati non sono sempre concordanti.

Nei ratti si ha un innalzamento della calcemia che è notevole secondo Bach (1937) e Riddle e Dotti (1936, loc. cit.), mentre è di modico grado per Levin e Smith (1938), Day e Follis (1941). Nei conigli mentre Mirvish e Bosman (1928) e Stortebecker (1939) notano un abbassamento della calcemia, Bach (1927, loc. cit.), Marlow e Koch (1937, loc. cit.), Williams e Watson (1941) non trovano variazioni degne di nota. Nei bovini Frei ed Emmerson (1938) e Folley (1936) rilevano una ipocalcemia. Nella cagna, Mathieu (1933), Mathieu e Barnes (1933) non osservano variazioni del tasso ematico del calcio, Riddle e Dotti (1936, loc. cit.) e Saviano (1937) invece notano innalzamento e Cheymal e Quingard (1937) trovano una quantità maggiore di calcio nel sangue di cagne nel periodo estrale.

Molto più concordi sono invece i dati riguardanti l'influenza degli estrogeni sullo scheletro la cui crescita è inibita in seguito alla precoce ossificazione delle cartilagini di accrescimento.

Day e Follis (1941, loc. cit.) e Silberberg e Silberberg (1941) in seguito a somministrazione di estrogeni rilevano nel ratto una diminuzione di spessore della cartilagine epifisaria. Sutro (1940) nei topi, Parhon e Parhon–Stefanescu (1932) nelle cavie e Tausk e De Fremery (1935) nel cane osservarono lo stesso fenomeno. Trovano poi una minore lunghezza delle ossa Spencer e collaboratori (1932), Zondek (1937) e Freudenberger e Clausen (1937) nei ratti, Silberberg e Silberberg (1941) nelle cavie.

Anche la struttura dell'osso viene alterata. Infatti si ha una neoformazione di trabecole ossee nelle cavità midollari come risulta dai lavori di Silberberg e Silberberg (1939–1941 *a*) nella cavia, di Gardner e Pfeiffer (1937) nel topo e di Zondek (1937, loc. cit.–1941) nel ratto. Aumentano inoltre, la compattezza dell'osso (Gardner 1936), la quantità delle ceneri (Day e Follis, 1941, loc. cit., Wentworth e collaboratori, 1941) ed il rapporto Ca/P diventa maggiore (Wentworth, 1941, loc. cit.) non per aumento del calcio, ma per diminuzione del fosforo (Macola, 1937).

Nonostante tutti questi lavori circa l'azione degli estrogeni e dell'ovaio sul metabolismo del calcio non è ancora sicuro il loro meccanismo di azione.

Zondek (1941, loc. cit.) a causa del minore sviluppo dello scheletro ritiene che gli estrogeni inibiscano la produzione dell'ormone somatotrofo ipofisario, cosa che sembrava confermata da Levie (1939) e da Gaarenstroom e Levie (1939) i quali mediante l'iniezione dell'ormone dell'accrescimento prevengono l'azione inibente degli estrogeni sul sistema osseo. Ma Griffith e Young (1942) trovano che questo non avviene completamente se si usano alte dosi di stilbestrolo, inoltre Clavert (1948 loc. cit.) nell'anitra, cui è stato asportato il lobo anteriore dell'ipofisi, osserva ugualmente la formazione dell'osso follicolinico e con l'ablazione completa dell'ipofisi Benoit, Clavert e Fabiani (1942) provocano ugualmente ipercalcemia follicolinica.

Riddle e Lahr (1938) avendo osservato che la follicolina non innalza la calcemia di ratti paratireoprivi (cosa vista anche da Dixon (1933)) ritengono che questa debba agire tramite le paratiroidi. Ciò sembrava confermato dal fatto che Riddle e collaboratori (1945) in piccioni paratiroidectomizzati e tenuti in vita con AT 10 o con compresse di ossido di alluminio avevano osservato innalzamento della calcemia. Questo modo di vedere non concorda con quanto è stato trovato da Bloom e collaboratori (1942) i quali con la somministrazione di paratormone hanno ottenuto l'immediata demolizione dell'osso follicolinico ed inoltre Benoit e Clavert (1945–1947) hanno osservato nell'anitra paratiroidectomizzata la neoformazione di osso follicolinico che però non si calcifica.

MATERIALE E TECNICA. – Sono stati usati n. 30 ratti albini adulti, del peso di gr. 150 circa, aventi la stessa età, provenienti dallo stesso allevamento, dei quali 20 erano femmine e 10 maschi. Delle femmine 10 erano ovariectomizzate da 50 giorni.

A tutti i soggetti è stata praticata il 20 marzo 1951 la paratiroidectomia totale che per ragioni tecniche ha comportato anche una parziale tiroidectomia. La quantità di tessuto tiroideo lasciata *in situ* era certamente tale da proteggere gli animali da fenomeni di ipotiroidismo (che nei ratti del resto insorgono solo dopo circa un mese dalla tiroidectomia).

Subito dopo l'intervento e per tre giorni la dieta è stata a base di crusca mescolata con lattato di calcio e latte intero. Dopo questo periodo gli animali sono stati alimentati come nel periodo preoperatorio e cioè con orzo, avena, erba, fieno. La durata dell'esperimento è stata limitata a giorni 31 in quanto nelle femmine intere ancora sopravviventi sono stati tentati in seguito altri interventi a scopo di orientamento.

RISULTATI. – Riportiamo nel grafico l'andamento dell'esperimento. Sull'ascissa sono riportati i giorni trascorsi dalla data dell'intervento, sull'ordinata il numero dei capi sopravviventi. I valori riguardanti ciascun gruppo (maschi, femmine ovariectomizzate e femmine intere) sono riuniti con linee distinte. Il gruppo delle femmine intere si è ridotto a 9 soggetti già all'inizio dell'esperimento essendo il decimo morto per emorragia poche ore dopo l'intervento.

Dalla fig. 1 risulta che mentre i maschi e le femmine ovariectomizzate, con un comportamento circa parallelo, muoiono pochi giorni dopo l'asportazione delle paratiroidi (tutti questi animali sono morti entro 11 giorni) le femmine intere hanno un periodo di sopravvivenza molto più lungo, tanto che dopo 31 giorni dall'inizio dell'esperimento vivevano ancora tre soggetti.

La netta differenza fra l'andamento della curva che si riferisce alle femmine intere e le altre due curve indica chiaramente che l'ovaio ha un'azione che protegge i soggetti dalla morte a breve scadenza per insufficienza paratiroidea.

Discussione dei risultati. – I nostri risultati contrastano con quanto ritengono alcuni Autori, ricordati nella introduzione, e cioè che l'azione della follicolina (ammesso che sia questo il fattore che protegge i nostri ratti paratireoprivi

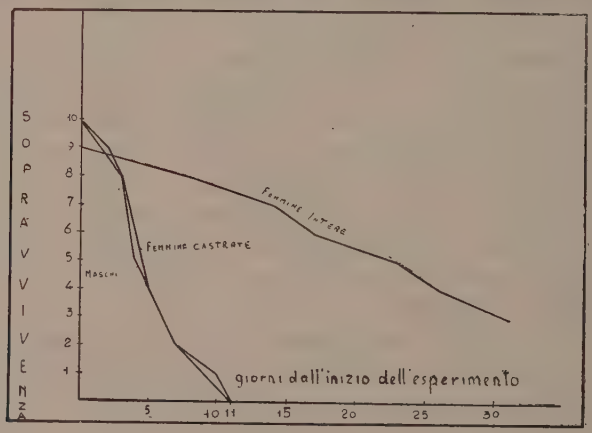


Fig. 1.

dalla morte) sia legata alla presenza delle paratiroidi. Essi fanno questa ipotesi basandosi sul fatto che in assenza delle paratiroidi la follicolina non determina ipercalcemia; ma il livello della calcemia non rispecchia sempre esattamente il metabolismo del calcio e l'attività biologica di questo elemento nel sangue dipende non dalla calcemia totale ma dalla quota diffusibile.

Gli estrogeni avrebbero la falcoltà di aumentare il Ca proteico facendo diminuire il rapporto Ca diff./Ca prot. È a questo meccanismo infatti che si attribuisce la morte in occasione dell'estro di animali paratireoprivi e mantenuti in vita mediante somministrazione di sali di calcio (Luckhardt e Blumenstok, 1922), Dragsted e collaboratori (1924), Evans e collaboratori (1936)) e durante il quale la calcemia totale non presenta modificazioni degne di nota. Con eguale meccanismo viene spiegata l'insorgenza di tetania in cani paratireoprivi in seguito a somministrazione di estrogeni. Analogo deve poi essere considerato il caso di Clavert (1948, loc. cit.) il quale ha osservato la morte per tetania di animali paratiroidectomizzati e che avevano una calcemia di 20 mg % (doppia del normale).

La follicolina ha poi la facoltà, come risulta dai lavori già citati, di fissare il calcio nel tessuto osseo al quale fenomeno si potrebbe attribuire l'ipocalcemia riscontrata in alcuni animali in seguito alla somministrazione di estrogeni. Infatti è stato dimostrato (Kozelka e Tatum, 1937) che la teelina abbassa la calcemia di cani rachitici ed inoltre che la follicolina può preservare dal rachitismo animali a dieta rachitogena (Saviano 1934).

L'ormone paratiroideo aumenterebbe invece il calcio diffusibile come risulta dagli esperimenti di Gilligan e collaboratori (1933) i quali trovarono per azione di estratti paratiroidei aumento del calcio dei trasudati e nel liquor cefalo–rachidiano dove non passa il calcio proteico. Questo ormone sul tessuto osseo avrebbe un'azione decalcificante come risulta da quanto si osserva nel rachitismo (nel quale si ha iperparatiroidismo relativo) e dalla distruzione dell'osso follicolinico.

L'azione dell'ovaio sul metabolismo del calcio spiega anche il fatto che il rachitismo nei gemelli di diverso sesso (che si suppone abbiano sempre risentito in ugual misura dei fattori ambientali) si ha con maggiore frequenza nei maschi (Bonell, Holmes, Priestley, Moffett, ecc.) ed inoltre si ritiene (Marcelli) che la trasmissione ereditaria della predisposizione al rachitismo avvenga principalmente per mezzo della madre. La predisposizione al rachitismo sarebbe quindi legata al sesso e dipendente dalla funzione ovarica.

Sebbene la presenza dell'ovaio offra una certa protezione e ritardi la morte per ipoparatiroidismo di ratte alimentate con una dieta a contenuto normale in calcio, tale protezione non è completa. Ulteriori esperimenti sono in corso sia per vedere se la follicolina può evitare la morte dei maschi paratiroidectomizzati, sia per stabilire le cause della morte ritardata delle femmine intere che potrebbe essere causata non da una tetania tardiva, ma dalle certamente gravi conseguenze che la permanente diminuzione del calcio diffusibile comporta per la permeabilità cellulare e tissurale.

CONCLUSIONI. – Dopo paratiroidectomia la mortalità dei maschi e delle femmine ovariectomizzate ha un'eguale incidenza nei due sessi. Le femmine intere sopravvivono invece per un tempo maggiore, ma la funzione ovarica non può sostituire quella paratiroidea.

BIBLIOGRAFIA.

CLAVERT J., *Contribution a l'étude de la formation des oeuf télolécithiques des oiseaux. Méccanismes de l'edification de la coquille.* «Bulletin Biologique de la France et de la Belgique», *82*, 289 (1948).

FRANZI L., *L'eredità nella patologia e nella clinica.* Cappelli, Bologna, 1942.

GARDNER W. U. e CARROL A. PFEIFFER, *Influence of estrogens and androgens on the skeletal system.* «Physiological Reviews», *23*, 139 (1943).

ROWINSKI P. e MANUNTA G., «Boll. Soc. It. Biol. Sper.», in corso di stampa 1951.

SPISNI D., *La follicolina nell'eziologia del collasso puerperale.* «Zootecnica e Veterinaria», *1*, 69 (1946).

Fisiologia. — *Influenza della castrazione e delle sostanze estrogene sull'azione gozzigena del metiltiouracile nel ratto femmina* (*). Nota di PAOLO CREPAX, presentata (**) dal Corrisp. G. C. PUPILLI.

In precedenti ricerche [Crepax[1,2,3]] è stato dimostrato che l'azione gozzigena del metiltiouracile è diminuita da sostanze (vitamina A e C, anidride arseniosa) che deprimono la secrezione ovvero l'azione tiroidea dell'ormone tireotropo. Non per tutte le sostanze saggiate è stato osservato tuttavia un parallelismo tra proprietà antitireotrope ed effetto antigozzigeno, sicchè la conoscenza della natura di tale effetto richiede ulteriori indagini. Sul fondamento di considerazioni che in breve espongo, lo studio dell'azione del metiltiouracile in animali castrati ovvero trattati con sostanze estrogene sembra poter fornire qualche chiarimento al problema sopraccennato.

La morfologia della tiroide di animali castrati depone il più spesso per una ridotta attività funzionale della ghiandola [Benazzi [4], Bokelmann e Scheringer [5], Andersen e Kennedy [6], Schultze [7], Gumbrecht e Loeser [8]], a cui secondo Inoue [9] va riferito l'abbassamento del metabolismo basale che segue alla castrazione [Chahovitch e Vichnjitch [10], Dogliotti [11]]. Non mancano tuttavia Autori [Cecca e Zappi [12], Soli [13], Hatai [14]; cfr. anche Benazzi [4]], i quali ammettono all'opposto che un'iperattività tiroidea segua la castrazione: per alcuni di essi [Cecca e Zappi [12]] l'affermazione è da riferire esclusivamente ai particolari criteri istofisiologici adottati. In altri casi questa spiegazione non vale e conviene pensare piuttosto all'influenza di altri fattori (specie, sesso, età ed intervallo intercorso dalla castrazione).

Quanto al meccanismo dell'ipofunzione tiroidea, la nozione dell'aumentata attività tireotropa dell'ipofisi di ratte castrate [Gumbrecht e Loeser [8]] induce ad ammettere che le modificazioni tiroidee si costituiscano sulla base di una dimi-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Bologna.
(**) Nella seduta del 6 giugno 1951.
(1) P. CREPAX, «Arch. Sci. biol.», XXXIV, 406 (1950).
(2) P. CREPAX, «Arch. Sci. biol.», XXXV, 6 (1951).
(3) P. CREPAX, «Arch. Sci. biol.», XXXV, 41 (1951).
(4) M. BENAZZI, «Boll. Soc. it. Biol. sper.», IV, 79 (1929).
(5) O. BOKELMANN u. W. SCHERINGER, «Arch. Gynäk.», CXLVIII, 1 (1932).
(6) D. H. ANDERSEN a. H. S. KENNEDY, «J. Physiol.», LXXIX, 1 (1939).
(7) K. W. SCHULTZE, «Dtsch. med. Wschr.», 1041 (1935).
(8) P. GUMBRECHT u. A. LOESER, «Arch. exp. Path. Pharmakol.», CLXXXIX, 345 (1938).
(9) S. INOUE, «Arch. klin. Chir.», CXVII, 155 (1939).
(10) X. CHAHOVITCH et M. VICHNJITCH, «C. r. Soc. Biol.», XCVIII. 1153 (1928).
(11) V. DOGLIOTTI, «Ann. Ostetr.», LV, 367 (1933).
(12) R. CECCA e F. ZAPPI, «Bull. Sci. med.», IV (ser. VIII), 99 (1904).
(13) U. SOLI, «Arch. it. Biol.», LII, 353 (1909).
(14) S. HATAI, «J. exp. Zool.», XVIII, 1 (1915).

nuita responsività della tiroide all'azione dell'ormone tireotropo [cfr. anche Crepax [15]].

Ho sperimentato su femmine di ratti albini (*Epimys norvegicus albinus*) del peso di 100-130 g. Una stessa quantità di metiltiouracile (10 mg per 100 g di peso corporeo e per giorno) veniva somministrata mediante sonda esofagea ad animali normali ovvero castrati; in altri due gruppi di animali normali, oltre al metiltiouracile introducevo per via sottocutanea 1 mg per 100 g di peso corporeo e per giorno di 4,4′-diossi-γ, δ-dietildifeniletano (esestrolo) ovvero una egual quantità di 4,4′-diossi-α, β-dietilstilbene (dietilstilbestrolo, di cui usavo il sale disodico dell'estere disolforico, idrosolubile). Al termine di 45 giorni gli animali venivano sacrificati e si procedeva al prelievo della tiroide e dell'ipofisi, che venivano pesate e esaminate istologicamente. Per quanto riguarda i dettagli delle condizioni sperimentali e dei procedimenti seguìti nell'elaborazione dei risultati, si rimanda a una Memoria precedente [Crepax [1]].

I risultati più notevoli, rispetto al problema in istudio, possono così riassumersi:

1° il metiltiouracile esercita negli animali castrati un effetto gozzigeno lievemente minore che di norma;

2° negli animali normali l'esestrolo riduce del 30 % circa l'effetto gozzigeno del metiltiouracile; tale effetto non è modificato dal dietilstilbestrolo;

3° l'esestrolo e l'estere disolforico dello stilbestrolo esercitano sull'ipofisi una stessa azione, non ostante la diversa loro influenza sulla tiroide: l'effetto consiste fondamentalmente in una diffusa degranulazione dei due tipi di elementi cromofili e non appare modificato dal metiltiouracile, che solitamente produce un aumento degli elementi basofili. Si tenga conto però del fatto che la degranulazione degli elementi cromofili rende grandemente incerto il riconoscimento del loro carattere basofilo ovvero eosinofilo.

Poichè la castrazione provoca, come si è detto, un aumento dell'attività tireotropa dell'ipofisi anteriore, il minor effetto del metiltiouracile negli animali castrati va riferito ad una ridotta responsività dal recettore tiroideo.

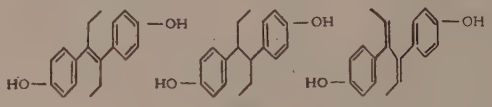
La diversa influenza che le due sostanze estrogene saggiate hanno sul gozzo metiltiouracilico non è facilmente spiegabile. Un effetto antigozzigeno può dipendere: 1° dalla ridotta secrezione di ormone tireotropo; 2° dall'inattivazione dell'ormone tireotropo prodotto in normale quantità; 3° dalla diminuzione della responsività della cellula tiroidea agli stimoli tireotropici. La distinzione tra le possibilità 2° e 3° è difficile per ragioni essenzialmente tecniche, sicchè in pratica conviene considerarle insieme e parlare genericamente d'inibizione degli effetti tiroidei dell'ormone tireotropo [cfr. Crepax [16]].

Nel caso presente, il fatto che nei due casi (animali trattati con metiltiouracile ed esestrolo ed animali trattati con metiltiouracile e dietilstilbestrolo) la struttura istologica dell'ipofisi non mostra differenze apprezzabili, non può considerarsi un elemento contrario all'ipotesi che l'azione antigozzigena si determini

(15) P. CREPAX, «Boll. Soc. it. Biol. sper.», XXIV, 1206 (1948).
(16) P. CREPAX, «Arch. Sci. biol.», XXXIII, 298 (1949).

attraverso una modificazione dell'attività secretoria del lobo anteriore, poichè le modificazioni delle cellule dell'ipofisi non sono un indice sufficientemente sensibile dell'attività secretoria della ghiandola per variazioni dell'ordine di grandezza considerato: invero una riduzione dell'effetto gozzigeno del 30 % è piccola rispetto a quella osservabile con altre sostanze [cfr. Crepax[1, 2, 3]]. Ammettendo che l'azione antigozzigena dell'esestrolo sia da riferire a una diminuita secrezione di ormone tireotropo, il mancato effetto dell'estere disolforico dello stilbestrolo può riferirsi alla minore capacità di questa sostanza di deprimere l'attività secretoria del lobo anteriore. Alcuni dati della letteratura mostrano come non esista un parallelismo obbligato tra potere estrogeno ed effetto inibitore dell'attività ipofisaria. Così il potere estrogeno del dietilstilbestrolo è pari a quello dell'esadiene (4,4′–diossi–γ, δ–difenil–β,δ–esadiene), che per altro è assai più attivo come inibitore ipofisario [Noble [17]].

La struttura dello stilbestrolo (I), dimostratosi privo di



I II III

effetto sul gozzo tiouracilico, è però più simile a quella dell'esadiene (III) di quanto non lo sia la struttura dell'esestrolo (II); all'opposto questo si è mostrato capace d'inibire il gozzo medesimo. Il valore di tali considerazioni è solo indiretto e limitato dal fatto che la costituzione chimica delle sostanze estrogene di sintesi non è stata finora indagata in modo sistematico rispetto alle proprietà che qui interessano. Lo stesso dicasi per le anomalie del comportamento magnetico di queste sostanze, anomalie che sono massime per l'esestrolo, minori per l'esadiene e lo stilbestrolo [Gallico e Mayr [18]; Rondoni, Mayr e Gallico [19]]: il significato di tale comportamento rispetto alle proprietà in discussione, al presente non può essere inteso pienamente. Del resto una riserva d'ordine generale è questa: se ammettiamo che le diverse secrezioni ipofisarie possano essere inibite in modo elettivo, in armonia con le ricerche oggi attivamente perseguite sull'inibizione farmacologica dell'attività secretoria del lobo anteriore [Lacassagne, Chamorro e Bun–Hoï [20]], nessuna generalizzazione è consentita e, per esempio, l'influenza di una sostanza sulla secrezione dell'ormone somatotropo non concede di prevedere la natura e l'entità dell'effetto esercitato su altre attività secretorie.

La possibilità che l'azione antigozzigena dell'esestrolo riposi su meccanismi estraipofisari e che tra questi si debba ricercare la spiegazione del mancato effetto

(17) R. L. Noble, «Lancet», II, 192 (1938).

(18) E. Gallico e G. Mayr, «Boll. Soc. it. Biol. sper.», XXVI, 264 (1950).

(19) P. Rondoni, G. Mayr e E. Gallico, «Experientia», IX, 357 (1949).

(20) A. Lacassagne, A. Chamorro et N. P. Bun-Hoï, «C. r. Soc. Biol.», CXLIV, 95 (1950).

del dietilstilbestrolo senza dubbio va presa in considerazione; non sembrano infatti molto persuasivi gli argomenti con cui Chamorro [21] ritiene di poterla escludere. Tuttavia non è possibile per ora discutere questo punto sulla base di elementi diretti: è noto che la follicolina non modifica l'azione dell'ormone tireotropo esogeno sulla tiroide [Heyl, De Jongh e Kooy [22]], ma questa nozione ha scarso valore nel caso presente, essendo assai probabile che l'inibizione degli effetti tiroidei dell'ormone tireotropo dipenda soprattutto dall'affinità chimica che la sostanza inibitrice ha per il sostrato, sia esso l'ormone medesimo ovvero la cellula tiroidea. Per altro, tra follicolina e sostanze estrogene esistono analogie biologiche e non chimiche.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente è lieto di porgere il saluto suo e dei Colleghi al Socio Straniero prof. Jacques Hadamard, vincitore del Premio Internazionale Antonio Feltrinelli per la Matematica e l'Astronomia e di esprimere al predetto Socio il vivissimo compiacimento dell'intera Accademia e suo personale.

Il prof. Hadamard manifesta la sua gratitudine per l'alta distinzione conferitagli dall'Accademia, alla quale egli si onora di appartenere, e ricorda le nobili figure dei Soci Lincei Tullio Levi-Civita, Vito Volterra, Salvatore Pincherle e Federigo Enriques, da lui ben conosciuti e purtroppo oggi scomparsi, inviando alla loro memoria un commosso saluto.

Il Senatore Castelnuovo ringrazia e si associa al gentile ricordo.

Il Presidente comunica quindi la triste notizia della morte del Socio Straniero ARNOLD SOMMERFELD, deceduto il 26 aprile a Monaco, la cui morte è stata conosciuta dall'Accademia solo pochi giorni fa.

Arnold Sommerfeld, uscito dalla Scuola Matematica di Gottinga, fu successivamente professore di meccanica e di meccanica tecnica in varie Università tedesche, finchè nel 1906 venne chiamato alla cattedra di fisica teorica dell'Università di Monaco. Egli fu uno degli scienziati che maggiormente contribuirono al progresso della fisica nell'ultimo trentennio e a lui si devono importanti studi sulla teoria quantistica degli atomi che culminarono con un fondamentale volume dal titolo: «Atombau und Spektrallinien» che ha avuto molte edizioni e che ancora oggi costituisce un testo classico delle teorie sull'atomo. La morte dell'insigne scienziato tedesco rappresenta un grave lutto per la scienza.

PLICHI SUGGELLATI

Il Senatore Castelnuovo presenta un plico suggellato del sig. Alberto Buscaglione e informa che l'Autore ha espresso il desiderio che il plico stesso

(21) A. CHAMORRO, «C. r. Soc. Biol.», CXLIII, 1540 (1949).

(22) J. G. HEYL, S. DE JONGH u. R. KOOY, «Acta brev. neerl. Physiol.», IV, 129 (1934).

sia aperto nella presente seduta e che il contenuto sia sottoposto all'esame di una Commissione della quale faccia parte il Socio Cecchini che è già disposto ad accettare tale incarico.

Constatata l'integrità dei sigilli, il Presidente procede all'apertura del plico stesso che risulta contenere un fascicolo dal titolo: « Considerazioni di meccanica celeste », nel quale, secondo quanto scritto dall'Autore, è riprodotta la copia dei primi quattro capitoli di un lavoro dello stesso sig. Buscaglione già depositato presso l'Accademia.

Il Presidente si riserva di nominare una Commissione e di chiamare a far parte della stessa il Socio Cecchini.

Il Senatore Castelnuovo presenta quindi due plichi suggellati, consegnati alla Cancelleria dal sig. Tommaso Martini, con una lettera in data 5 giugno, contenenti rispettivamente, secondo quanto dichiarato dall'Autore, una Memoria su « Il Salicomplex » e una Memoria su « Il composto M_I e il complesso M_I ».

La Classe, constatata l'integrità dei sigilli, delibera che i due citati plichi siano conservati nell'archivio accademico a disposizione dell'interessato.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Senatore Castelnuovo presenta il fascicolo n. 5 dei « Rendiconti » (maggio 1951).

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Cantelli, per incarico del dott. Giovanni Palma, Direttore Generale dell'Istituto Nazionale della Previdenza Sociale, offre in omaggio e illustra brevemente un volume edito dal predetto Istituto dal titolo: « Tecnica delle Assicurazioni Sociali », pubblicato in occasione del 13° Congresso Internazionale di Attuari, in memoria del prof. Ignazio Messina. Detto volume costituisce la seconda edizione dell'opera del predetto prof. Messina, edita nel 1943, e contiene inoltre la ristampa dei lavori sui quali l'Autore ha fondato la sua trattazione.

Il Socio Beccari presenta una sua monografia dal titolo: « Anatomia comparata dei vertebrati – 1) Classificazione dei vertebrati – Apparecchio tegumentario », mettendo in rilievo l'importanza dell'anatomia comparata come scienza e la necessità di un'opera che descriva tutti gli apparecchi dei vertebrati e che costituisca il testo del quale si lamenta da tempo la mancanza. Tale è l'intendimento dell'Autore il quale si propone appunto, sotto forma di monografie che vedranno la luce separatamente, di descrivere tutti i citati apparecchi.

Il Socio D'Ancona, riferendosi alla presentazione avvenuta nella seduta di aprile del Vol. I delle « Memorie di Biogeografia Adriatica » dell'Istituto di Studi Adriatici, desidera mettere in evidenza che detto volume, contiene

i primi risultati delle ricerche intese a documentare, in una visione d'insieme, l'esame faunistico delle terre periadriatiche e illustra brevemente i criteri scientifici con i quali esse sono state condotte nello studio di un problema di così grande interesse per le ricerche zoogeografiche, impostato nel quadro delle attuali concezioni genetico-evoluzionistiche. Al Vol. I, che contiene una Memoria del prof. E. Gridelli sul « Problema delle specie a diffusione transadriatica con particolare riguardo ai Coleotteri », ne seguiranno altri due, con la collaborazione di eminenti studiosi, tra i quali il Collega Negri che ha promesso un suo lavoro a carattere fitogeografico.

Il Socio Vallauri offre in omaggio una sua relazione dal titolo « Il magnetismo e le armi », presentata alla II Sessione del Centro Alti Studi Militari e concernente studi compiuti dallo stesso Socio durante il servizio navale sulle armi magnetiche e sulla difesa contro le armi magnetiche.

Il Segretario Accademico illustra brevemente le opere pervenute in omaggio mettendo in particolare evidenza il volume del Socio Krall dal titolo: « La diga di sbarramento a volta-cupola per laghi artificiali », il « Repertorio di matematiche » a cura del prof. Mario Villa, le « Memorie di un medico» del dott. Giuseppe Del Duca e il testo del discorso pronunciato dal Socio Colonnetti a Milano in occasione della « Giornata della Scienza » del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci: Perucca, Picone, Lombroso, Rolla, Crocco, Abetti, Armellini, Pupilli, Chain, Beccari e Spadolini (a mezzo del Collega Vernoni).

Il Socio Majorana, dopo aver presentato e brevemente illustrato una sua Nota dal titolo: « Ricerche sulla velocità della luce riflessa dai metalli », ricorda che egli continua sempre le sue ricerche ed esperienze di laboratorio rese assai difficili per la mancanza di mezzi e di strumenti adeguati, ai quali supplisce con dispositivi creati con mezzi di fortuna. Ringrazia il prof. Valle per la generosa ospitalità concessagli nell'Istituto Fisico dell'Università di Bologna e conclude esprimendo la speranza di poter comunicare all'Accademia, anche nei prossimi anni, i risultati delle ricerche sperimentali alle quali attende, che, confida, non saranno del tutto inutili ai fini che la scienza si propone e che costituiranno il suo testamento scientifico.

Il Socio Picone presenta una Memoria del prof. Carlo Miranda dal titolo: « Sui sistemi di tipo ellittico di equazioni lineari alle derivate parziali del primo ordine, in variabili indipendenti ».

Viene nominata un'apposita Commissione composta dallo stesso prof. Picone e dal Collega Caccioppoli.

Il Segretario Accademico dà lettura delle Note inviate alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

COLONNETTI G. – L'organizzazione della ricerca scientifica, problema fondamentale di vita nazionale.

CROCCO A. – La barriera delle temperature nei missili geodetici. III.

MAJORANA Q. – Ricerche sulla velocità della luce riflessa dai metalli.

PIRT S. J. e CHAIN E. B. – Un micrometodo per la determinazione in serie degli alogeni nei composti organici (pres. dal Socio Straniero E. B. CHAIN).

SPADOLINI I. – Fenomeni elettrici di facilitazione nel tetano cardiaco. (Considerazioni sul meccanismo delle reazioni graduate nel muscolo striato).

ALIBRANDI A. – Dell'azione di alte dosi di nicotinamide sul sistema nervoso centrale (pres. dal Socio C. CIACCIO).

ALIBRANDI A. – Sul significato della disposizione verso l'epilessia sperimentale riflessa (pres. dal Socio C. CIACCIO).

ALIBRANDI A. e ALIBRANDI G. – Sul meccanismo del riflesso condizionato della secrezione salivare (pres. dal Socio C. CIACCIO).

ALIBRANDI G. – Sul fattore nutritivo specifico per lo sviluppo sessuale del pollo (pres. dal Socio C. CIACCIO).

ALIBRANDI G. – Sull'azione epilettogena della tiamina (pres. dal Socio C. CIACCIO).

ALIBRANDI G. – Segnali condizionati sonori quali fattori scatenanti di crisi epilettiformi sperimentali (pres. dal Socio C. CIACCIO).

ALIBRANDI G. – Calcio ioni e disposizione verso l'epilessia riflessa (pres. dal Socio C. CIACCIO).

BIRINDELLI C. – Sul calcolo numerico degli integrali multipli (pres. dal Socio M. PICONE).

DAVIS C. F. e KIP A. F. e MALVANO R. – Risonanza paramagnetica a bassissima temperatura nel cloruro idrato di praseodimio (pres. dal Socio E. PERUCCA).

GALGANO M. e LANZA B. – Contributi intorno all'azione della temperatura e dell'ormone follicolostimolante sulla stasi spermategonica in *Rana temporaria* L. Nota preliminare (pres. dal Socio N. BECCARI).

GIALANELLA L. – Sulla possibile natura e origine elettromagnetica delle pulsazioni osservate nel diametro del Sole (pres. dal Socio G. ARMELLINI).

GIANNUZZI M. A. – Ricerche sopra l'assorbimento atmosferico della radiazione solare a Roma (pres. dal Socio G. ARMELLINI).

HACK M. – Area ed intensità della perturbazione solare del maggio 1951 (pres. dal Socio G. ABETTI).

IANDELLI A. e FERRO R. – Le amalgame del Lantanio (pres. dal Socio L. ROLLA).

LATTANZI F. – Applicazione della teoria dell'eclisse di elasticità trasversale allo studio di un'asta curva elasticamente vincolata agli estremi. III. (pres. dal Socio G. ARMELLINI).

MAZZA L. – Su una apparecchiatura a funzionamento continuo ed automatico per la separazione e per la determinazione quantitativa degli elementi

delle terre rare in miscela, mediante resine scambiatrici di ioni (pres. dal Socio L. ROLLA).

MUGGIA A. – Sul calcolo dell'interferenza elica–ala (pres. dal Corrisp. C. FERRARI).

PACELLA G. B. – Considerazioni sul contributo del Pizzetti e del Somigliana al problema di Stokes (pres. dal Socio G. SOMIGLIANA).

PONTREMOLI S. e MONTINI T. – Azione della florizina sulla deidrogenasi degli acidi grassi superiori a livello della mucosa intestinale e della sierosa peritoneale (pres. dal Socio U. LOMBROSO).

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Vernoni, anche a nome del Collega Meneghetti, legge la relazione sulla Memoria di P. Benigno e T. Berti dal titolo: « Influenza dei detergenti sullo sviluppo, sulla divisione e sulla respirazione di germi gram–negativi ».

Messa ai voti, la relazione che conclude proponendo la stampa del lavoro nelle Memorie accademiche, viene approvata con le solite riserve di carattere finanziario.

TEMI PER DISCUSSIONI

Il Senatore Castelnuovo comunica che la Classe deve proporre, discutere e approvare i temi di discussione e conferenze per il prossimo anno accademico e formulare inoltre proposte di sovvenzioni per studi, ricerche e iniziative.

Il Presidente ritiene opportuno informare i Colleghi che il Consiglio della Fondazione Volta ha proposto come tema del Convegno che avrà luogo nell'autunno del 1952 il seguente: « Problemi di fisica solare ».

Il Socio Armellini prospetta l'opportunità che il predetto tema sia ampliato nel senso di poter includervi anche discussioni sulle « teorie solari ».

Il Socio Abetti prende atto della proposta del Collega Armellini, ma fa notare che l'argomento generale di fisica solare prescelto dal Consiglio della Fondazione Volta è vastissimo in quanto esso rappresenta oggi i tre quarti delle ricerche astrofisiche ed implica pertanto numerosi temi, alcuni dei quali dovranno certamente essere precisati nella preparazione del Convegno, anche in relazione agli scienziati che verranno invitati.

Il Presidente di associa.

Il Socio Giuseppe Levi, a seguito di intese con alcuni membri della Categoria V, propone il seguente tema: « Accrescimento degli organismi » e fa presente che un programma particolareggiato e la divisione del lavoro potranno essere stabiliti in seguito, d'accordo con i Colleghi della predetta Categoria.

Il Socio Signorini propone il seguente tema: « Recenti progressi della scienza delle costruzioni », facendo notare che, per la relativa discussione, l'Accademia dispone di illustri specialisti in materia, quali i Soci Colonnetti e Krall e può contare inoltre sulla preziosa collaborazione del prof. Picone e del suo Istituto.

Il Socio Brunelli propone il seguente tema: « Problemi agricoli e industriali del Mezzogiorno e loro coordinamento », osservando che la discussione potrebbe essere efficacemente organizzata dal Collega Giordani, profondo e competente conoscitore dei problemi stessi.

Il Presidente riconosce che il tema proposto dal Collega Brunelli è indubbiamente interessante ma teme che l'Accademia non disponga di un nucleo abbastanza numeroso di Soci specificamente competenti in materia.

Il Socio Giordani, pur ringraziando il Collega Brunelli per le cortesi espressioni che gli ha rivolto, ritiene che l'argomento non sia adatto perchè implica problemi diversi e vastissimi con la conseguenza che l'Accademia, affrontandoli, rischierebbe di rimanere nella superficialità, mentre è compito dell'Accademia stessa dare, come ha sempre dato alle discussioni, un carattere profondamente scientifico.

Il Socio Brunelli ritira la proposta.

Il Presidente mette in votazione i due temi proposti dal Socio Giuseppe Levi e dal Socio Signorini che vengono approvati dalla Classe.

Resta pertanto stabilito che per il prossimo anno accademico i temi di discussione per la Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali saranno i seguenti: « Accrescimento degli organismi » e « Recenti progressi della scienza delle costruzioni ».

Il Presidente prega i Soci Giuseppe Levi e Signorini di mettersi in contatto con i Colleghi competenti per l'organizzazione delle due discussioni.

Per quanto concerne le proposte per studi, ricerche ed iniziative, il Socio Vercelli propone che sia dato un assegno al Collega Majorana affinchè questi se ne possa giovare per le ricerche sperimentali che va conducendo.

Numerosi Soci manifestano la loro adesione alla predetta proposta.

Il Presidente invita il proponente e quanti altri vorranno a lui unirsi, a fare pervenire una richiesta alla Presidenza, ricordando inoltre che tutte le eventuali proposte per sovvenzioni a studi, ricerche ed iniziative potranno senz'altro essere inoltrate alla Presidenza stessa.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 6 giugno 1951

BECCARI Nello. – *Anatomia comparata dei vertebrati. I. Classificazione dei vertebrati. Apparecchio tegumentario.* Firenze, Sansoni, 1951. Pp. VII–265, in–8°, con figg.

COLONNETTI Gustavo. – *La grande avventura.* Discorso. Biella, Soc. « Industria et Labor », 1951. Pp. 22, in–8°. (Consiglio Nazionale delle Ricerche, « Giornata della Scienza », Milano, 12 aprile 1951).

Conférence Générales (9me) des Poids et Mesures. – Comptes Rendus, Paris, Gauthier–Villars, 1949. Pp. 127, in–4°.

COURVOISIER Peter. – *Die Schwankungen des atmosphärisch–elektrischen Feldes.* Estr. da « Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft, St. Gallen », 1948.

DEL DUCA Giuseppe. – *Memorie di un medico.* Roma, Daily American Publishing Co., 1951, Pp. IX–251, in –8°.

DENOËL Albert. – *Contribution à l'étude analytique des préparations éphédrinées.* Liège, H. Vaillant–Carmanne S. A., 1944. Pp. 279, in–8°.

GRANDORI Remo. – *Ripercussioni economiche e sociali dei danni causati dai parassiti delle piante.* Estr. da « Atti della Ia Conferenza internazionale per l'esame dei mezzi di lotta contro i parassiti delle piante, 3–6 ottobre 1950 ».

HENNEBERGER Charlotte. – *Die Komponenten der Abkühlungsgrösse.* Estr. da « Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft, St. Gallen », 1948.

ISTITUTO NAZIONALE DELLA PREVIDENZA SOCIALE. – *Tecnica delle Assicurazioni Sociali.* Volume pubblicato in occasione del XIII Congresso Internazionale di Attuari in memoria del prof. Ignazio Messina. Roma, 1951. Pp. 274, in–8°.

KRALL Giulio. – *La diga di sbarramento a volta–cupola per laghi artificiali.* Nuovo metodo di calcolo. Roma, Casa ed. Perrella, 1951. Pp. 240, in–8°.

KÜMMEL Käthe. – *Die Stellung Südfrankreichs und der Krim im West–und Ostmediterranen Vegetationsstufenprofil.* Bonn, 1948, Pp. 45, in–8°, con carta annessa.

MICZAIKA G. R. – *Messungen des Balmer–Sprungs.* Estr. da « Zeitschrift für Naturforschung », vol. IV, 1949, n. 8.

MÖRIKOFER Walter. – *Neuere Gesichtspunkte in der Klimatologie.* Estr. da « Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft, St. Gallen », 1948.

— *Zur Terminologie in der Strahlungsforschung.* Estr. da « Archiv für Meteorologie, Geophysik und Bioklimatologie », ser. B, vol. I, 1948, n. 1.

MUSEU NACIONAL. RIO DE JANEIRO. – *Atividades Científicas em 1949.* Rio de Janeiro, Off. Graf. da V. B., s. d. Pp. 41, in-8° (Universidade do Brasil).

PÉRARD Albert. – *Les récents progrès du système métrique.* Rapport présenté à la neuvième Conférence Générale des Poids et Mesures. Paris, Gauthier–Villars, 1949, Pp. 50, in–4°.

Repertorio di Matematiche. A cura di Mario Villa. Padova, CEDAM, 1951. Pp. XVIII–730, in–8°.

SCHÜEPP Walter. – *Ueber den Wärmeaustausch im Eisfeld.* Estr. da « Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft, St. Gallen », 1948.

SPANDOS Basile N. – *La notion de l'onde associée étendue aux astres.* (Formule générale). Thessaloniki, 1951. Pp. 7, in–8°.

THOMSON R. H. – *That Man Thomson.* Seattle, University of Washington Press, 1950. Pp. 134, in–8°.

VALLAURI Giancarlo. – *Il magnetismo e le armi.* Roma, 1950–51, Pp. 23, in–8°. (Centro di Alti Studi Militari – 2a Sessione). Pp. 23, in–8°.

VILLA MARIO. – Vedi: *Repertorio di Matematiche.*

D. DE BLASI.

INDICI DEL VOLUME

INDICI PER AUTORI

A

ACCORDI B. – Rilevamento geologico nella zona del Pizzo Badile (Adamello sud-occidentale), *246*.

AMERIO L. – Sull'estensione delle nozioni di « colle », « nodo » e « fuoco » ai sistemi di due equazioni differenziali periodiche, in tre variabili. Nota I, *206*.

— Sull'estensione delle nozioni di « colle », « nodo » e « fuoco » ai sistemi di due equazioni differenziali periodiche in tre variabili. Nota II, *289*.

ANDREOTTI A. – Sopra le varietà di Picard d'una superficie algebrica e sulla classificazione delle superficie irregolari, *380*.

ARDY C. e MONTINI T. – Sui rapporti fra sistema nervoso autonomo e ricambio dei lipidi. Azione della dibenamina e dell'atropina sulla steatosi epatica da epatectomia parziale, *174*.

AROSIO R. e ORLANDI A. – Sulle proteine dell'organo elettrico di Torpedine, *422*.

ARRIGO L., vedi LOMBROSO U.

B

BACCHETTI T., vedi CANONICA L.

BAFFONI G. M. – L'andamento dell'ipertrofia reattiva in alcuni aspetti della cromatolisi della cellula nervosa, *319*.

BELOFF-CHAIN A., BOVET D., E. B. CHAIN e F. POCCHIARI – Metabolismo del glucosio-1-fosfato in conigli normali e diabetici da allossana, *233*.

BENIGNO P. e BERTI T., – Indagini quantitative sul meccanismo d'azione antibatterica dei detergenti. Nota II, *57*.

BERTI T., vedi BENIGNO P.

BONI A. – Notizie preliminari sulla tettonica del margine sudorientale della regione fra il Sebino e l'Eridio, *485*.

BONINO G. B. e CHIORBOLI P. – Effetti di iperconiugazione al legame carbonilico, *7*.

BONINO G. B. e CHIORBOLI P. – Perturbazioni intra- ed intermolecolari nei derivati del pirrolo. – I. N-acetilpirrolo ed α-acetilpirrolo, *104*.

BOVET D., vedi BELOFF-CHAIN A.

BURCKHARDT C. E. – Un giacimento sedimentogeno di magnetite nei Monti Peloritani, *156*.

C

CANONICA L. e BACCHETTI T. – Chetoni dai diazochetoni. – I. Sintesi di α—ω—diacetilparaffine, *479*.

CAPRARO V., PENNELLA P. e TIENGO M., – L'influenza del pH sul passaggio dell'acqua attraverso la cute di « Rana esculenta », *251*.

— e TIENGO M. – L'influenza della differenza di potenziale (D. P.) della cute sul passaggio di acqua attraverso la cute di Rana, *416*.

CENNAMO F. – Diffrazione di raggi X nei miscugli benzolo-tetraclururo di carbonio, *310*.

— Diffrazione di raggi X nel benzolo al variare della temperatura, *475*.

CHAIN E. B., vedi BELOFF-CHAIN A.

CHIORBOLI P., vedi BONINO G. B.

CHIORBOLI P., vedi GHIGI E.

COLACEVICH A. – Su una possibile deviazione della luce attraverso la nebulosa delle Pleiadi, *132*.

CONTI R. – Funzioni a variazione limitata in più variabili, nel senso di Fréchet e nel senso di Faedo, *462*.

CREPAX P., Ricerche elettroforetiche sulle proteine dei muscoli lisci di Mammiferi, *169*.

— Influenza della castrazione e delle sostanze estrogene sull'azione gozzigena del metiltiouracile nel ratto femmina, *500*.

CROCCO G. A., La barriera della temperatura nei missili geodetici, *97*.

D

D'Ancona U. – Ulteriori esperienze sull'azione degli ormoni steroidi sulla gonade dell'anguilla, *284*.

Danusso F. – Velocità ultrasonora e compressibilità adiabatiche di miscele liquide atermiche o ideali, *235*.

Del Pianto E. e Pantano E. – Azione tossica delle cumarine su embrioni di Anfibi, *230*.

Demangeot J. – Sur l'âge Villafranchien de l'ancien lac Aquilanien, *55*.

Desio A. – La creazione di un « Istituto del deserto » in Egitto, *183*.

De Schwarz M. J. – Su alcune questioni analitiche concernenti il calcolo del coefficiente di assorbimento acustico di cilindri rivestiti di feltro di vetro, *152*.

F

Fajer A., vedi Levi G.

Fantappiè L. – Le variazioni e i funzionali derivati degli autovalori e delle autofunzioni di un nucleo dato, *375*.

— Calcolo esatto degli autovalori e delle autofunzioni di un nucleo « variato », per una variazione di tipo elementare, *458*.

Ferro R., vedi Iandelli A.

Fichera G. – Suoi teoremi d'esistenza della teoria del potenziale e della rappresentazione conforme. Nota I, *356*.

— Sui teoremi d'esistenza della teoria del potenziale e della rappresentazione conforme. Nota II, *452*.

Fortini T. – L'assorbimento atmosferico della radiazione solare a Campo Imperatore, sul Gran Sasso d'Italia, *31*.

Franchetta A. – Forme algebriche sviluppabili e relative hessiane, *386*.

G

Gamba A. – Una strana conseguenza delle equazioni della nuova teoria unitaria di Einstein, *472*.

Ghigi E. e Chiorboli P. – Nuovi spettri Raman dell'α-acetilpirrolo e dell'N-acetilpirrolo, *242*.

Giannuzzi M. A. – Sopra l'orbita della σ Coronae Borealis, *36*.

Gotusso G. – Un principio variazionale in idrodinamica piana, *130*.

Graffi D. – Su alcune questioni di elasticità ereditaria, *25*.

H

Hornich H. – Su alcune successioni di serie i cui termini generali convergono a zero, *298*.

I

Iandelli A. e Ferro R. – La struttura cristallina dei composti LaHg, CeHg, PrHg, NdHg, *48*.

L

Lattanzi F. – Applicazione della teoria dell'ellisse di elasticità trasversale allo studio di un'asta curva elasticamente vincolata agli estremi. Nota I, *395*.

Levi E. – Ancora sopra un'applicazione dei polinomi di Bernstein all'approssimazione in media delle funzioni sommabili, *360*.

Levi G. – Relazione sul Congresso internazionale di Anatomia, *3*.

— Relazione sul VII Congresso della Società internazionale di Biologia cellulare, *4*.

— e Fajer A. – Lo smescolamento del citoplasma studiato in cellule coltivate « in vitro », *348*.

Lombardo-Radice L. – Sull'immersione di un piano grafico in uno spazio grafico a tre dimensioni, *203*.

Lombroso U. – Commemorazione del Socio Amedeo Herlitzka, *69*.

— e Arrigo L. – Sul meccanismo di azione di alcuni fattori lipotropi nella steatosi epatica da florizina, *12*.

— — e Pontremoli S. – Sul meccanismo di azione della tripsina quale fattore lipotropo. Enzima od ormone?, *199*.

M

Machne X. – Effetti della stimolazione del corpo striato nel piccione, *413*.

Manacorda T. – Sulle discontinuità delle derivate del potenziale della gravità attraverso una superficie di discontinuità per la densità, *42*.

Manunta G., Vedi Rowinski P.

MARGARIA R. – La respirazione di miscele d'aria e CO_2 a bassa pressione barometrica. *442*.
MARUSSI A. – Su alcune proprietà integrali delle rappresentazioni conformi di superfici su superfici, *307*.
MERLI L. – Su alcune disuguaglianze riguardanti i polinomi ultrasferici, *371*.
MINEO M. – Sul trasporto delle coordinate e dell'azimut lungo una geodetica e sul problema inverso sopra una superficie qualunque, *142*.
MIRANDA C. – Sulle proprietà di minimo e di massimo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali lineari del secondo ordine di tipo ellittico, *117*.
MOLLICA G., vedi STAGNO d'ALCONTRES G.
MONTINI T., vedi ARDY C.

N

NADEAU G. – Correction zonale de l'aberration spherique dans les lentilles magnetiques, *225*.
NOBILE V. – Il conflitto fra copernicisti e aristotelici nella sua essenza e nel pensiero di Galileo - Rilievi e precisazioni. Nota II, *337*.
NORZI L. – Il carico di punta di una colonna a maglie rettangolari, *217*.

O

ORLANDI A., vedi AROSIO R.

P

PACINI V., vedi URBANI-MISTRUZZI L.
PANTANO E., vedi DEL PIANTO E.
PAVARI A. – Risultati sperimentali e indagini sulle provenienze e razze dell'abete bianco (Abies alba), *193*.
PENNELLA P., vedi CAPRARO V.
PERRI T. – La determinazione di arti soprannumerari in « Bufo vulgaris ». Nota VII, *64*.
PERSICO E. – Sulla disposizione dei diaframmi negli spettrometri beta elicoidali, *344*.
PETRALIA S. – Sulla propagazione degli ultrasuoni nei ferromagnetici, *146*.
PETROSINI G. – Determinazione dell'attività perossidasica nei vegetali, *401*.
PILATI C. – Ulteriori ricerche sulla natura degli spermatidi degenerativi in « Cottus gobio », *263*.
PIRANI R. – I minerali del gruppo dell'Ortler. – II. Actinolite di Malga Mont in Val di Rabbi e di Celledizzo in Val di Peio, *315*.
POCCHIARI F., vedi BELOFF-CHAIN A.
PONTREMOLI S., vedi LOMBROSO U.
PRODI G. – Questioni di stabilità per equazioni non lineari alle derivate parziali di tipo parabolico, *365*.
— Nuovi criteri di stabilità per l'equazione $y''+A(x)y=0$. Nota I, *447*.
PUCCI C. – Sulla maggiorazione dell'integrale di una equazione differenziale lineare ordinaria del secondo ordine, *300*.

R

ROSINA B. A. – Sul numero dei diametri principali di una curva algebrica piana con punti all'infinito non tutti distinti, *213*.
ROSINO L. – Diagramma colore–grandezza e distanza dell'ammasso globulare M. 56. – I. Istrumenti, tecnica delle osservazioni e risultati, *136*.
— Diagramma colore–grandezza e distanza dell'ammasso globulare M. 56. - II. Distribuzione dei colori delle grandezze ed eccesso di colore, *220*.
ROTH L. – Sull'unirazionalità dell'intersezione di più quadriche, *19*.
— Sugli invarianti d'una varietà algebrica a tre dimensioni, *468*.
ROVERETO G. – Sull'origine e i viaggi delle ofioliti appenniniche, *439*.
ROWINSKI P. e MANUNTA G. – Comportamento del potassio dopo trattamento con acetato di desossicorticosterone in cani dei due sessi, *325*.
— Influenza dell'ovaio sulla sopravvivenza di ratti paratiroidectomizzati, *495*.
RUGGIERI G. – Sul Piano Calabriano Gignoux 1910. Nota preliminare, *491*.
RUSSO A. – Potere germinativo dei tessuti somatici e germi embrionali nell'origine dei neoplasmi, *109*.
RUSSO S. – Osservazioni sull'acido ribonucleico dell'oocite in crescita di « Myotis capaccini », Bonaparte, *164*.

S

SABAN G. – Sulle varietà quasi–asintotiche. – III. Ancora sulle varietà subordinate, *113*.
SACCONI L. – Spettrometria indiretta, *407*.

SANTI R. e SEREMBE M. – Circolazione dell'aureomicina nell'organismo con particolare riguardo ai suoi rapporti con la linfa, *265*.

SCARPA O. – Sulle corrosioni del ferro e dell'acciaio prodotte dai calcestruzzi contenenti Cloruro di Sodio, *189*.

— Corrosioni causate da correnti elettriche alternate ai ferri inclusi nei calcestruzzi, *275*.

SEGRE B. – Sull'esistenza, sia nel campo razionale che nel campo reale, di involuzioni piane non birazionali, *94*.

— Sulla perfezione delle coincidenze isolate, *335*.

SEREMBE M., vedi SANTI R.

STAGNO D'ALCONTRES G. e MOLLICA G. – Un nuovo modo di formazione dell'isossazolo, *52*.

STEFANELLI A. – Ciclo vitale e citomorfosi delle cellule nervose dei Vertebrati, *159*.

T

TEOFILATO P. – Applicazione del metodo delle caratteristiche alla corrente supersonica vorticosa, *124*.

TERRACINI A. – Trasformazioni dualistiche di tipo nullo nel piano e sistemi (G) proiettivamente deformabili, *89*.

— Sistemi (G) proiettivamente deformabili di tipo speciale, *186*.

TIENGO M., vedi CAPRARO V.

U

UDESCHINI P. – Le equazioni di seconda approssimazione nella nuova teoria relativistica unitaria di Einstein. Nota I, *21*.

— Le equazioni di seconda approssimazione nella nuova teoria relativistica unitaria di Einstein. Nota II, *121*.

— Sulle mutue azioni fra campo gravitazionale e campo elettromagnetico, *390*.

URBANI-MISTRUZZI L. e PACINI V. – Ergastoplasma e acidi nucleici nel ciclo secretorio di alcune ghiandole, *427*.

V

VANNINI E. – Sulle modificazioni volumetriche dei nucleoli negli ovociti in accrescimento. Osservazioni preliminari su «Antedon rosacea», *256*.

INDICE PER MATERIE

A

Analisi. — Sull'estensione delle nozioni di « colle », « nodo » e « fuoco » ai sistemi di due equazioni differenziali periodiche in tre variabili. Nota I. AMERIO L., *206*.
— Sull'estensione delle nozioni di « colle », « nodo » e « fuoco » ai sistemi di due equazioni differenziali periodiche, in tre variabili. Nota II. AMERIO L., *289*.
— Funzioni a variazione limitata in più variabili, nel senso di Fréchet e nel senso di Faedo. CONTI R., *462*.
— Su alcune successioni di serie i cui termini generali convergono a zero. HORNICH H., *298*.
— Sulle proprietà di minimo e di massimo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali lineari del secondo ordine di tipo ellittico. MIRANDA C., *117*.
Analisi funzionale. — Le variazioni e i funzionali derivati degli autovalori e delle autofunzioni di un nucleo dato. FANTAPPIÉ L., *375*.
— Calcolo esatto degli autovalori e delle autofunzioni di un nucleo « variato », per una variazione di tipo elementare. FANTAPPIÉ L., *458*.
Analisi matematica. — Sui teoremi d'esistenza della teoria del potenziale e della rappresentazione conforme. Nota I. FICHERA G., *356*.
— Sui teoremi d'esistenza della teoria del potenziale e della rappresentazione conforme. Nota II. FICHERA G., *452*.
— Ancora sopra un'applicazione dei polinomi di Bernstein all'approssimazione in media delle funzioni sommabili. LEVI E., *360*.
— Questioni di stabilità per equazioni non lineari alle derivate parziali di tipo parabolico. PRODI G., *365*.
Astronomia. — Su una possibile deviazione della luce attraverso la nebulosa delle Pleiadi. COLACEVICH A., *132*.
— L'assorbimento atmosferico della radiazione solare a Campo Imperatore, sul Gran Sasso d'Italia. FORTINI T., *31*.
— Sopra l'orbita della σ Coronae Borealis. GIANNUZZI M. A., *36*.
— Il conflitto fra copernicisti e aristotelici nella sua essenza e nel pensiero di Galileo. Rilievi e precisazioni. Nota II. NOBILE V., *337*.
— Diagramma colore–grandezza e distanza dell'ammasso globulare M. 56. – I. Istrumenti, tecnica delle osservazioni e risultati. ROSINO L., *136*.
— Diagramma colore–grandezza e distanza dell'ammasso globulare M 56. – II. Distribuzione dei colori e delle grandezze ed eccesso di colore. ROSINO L., *220*.

B

Biologia. — Sulle proteine dell'organo elettrico di Torpedine. AROSIO R. e ORLANDI A., *422*.
— L'andamento dell'ipertrofia reattiva in alcuni aspetti della cromatolisi della cellula nervosa. BAFFONI G. M., *319*.
— Ulteriori esperienze sull'azione degli ormoni steroidi sulla gonade dell'anguilla. D.ANCONA U., *284*.
— Lo smescolamento del citoplasma studiato in cellule coltivate « in vitro ». LEVI G. e FAJER A., *348*.
— La determinazione di arti soprannumerari in « Bufo vulgaris ». Nota VII. PERRI T., *64*.
— Ulteriori ricerche sulla natura degli spermatidi degenerativi in « Cottus gobio ». PILATI C., *263*.
— Potere germinativo dei tessuti somatici e germi embrionali nell'origine dei neoplasmi. RUSSO A., *109*.
— Osservazioni sull'acido ribonucleico dell'oocite in crescita di « Myotis capaccini », Bonaparte. RUSSO S., *164*.

— Circolazione dell'aureomicina nell'organismo con particolare riguardo ai suoi rapporti con la linfa. SANTI R. e SEREMBE M., *265*.

— Ciclo vitale e citomorfosi delle cellule nervose dei Vertebrati. STEFANELLI A., *159*.

— Ergastoplasma e acidi nucleici nel ciclo secretorio di alcune ghiandole. URBANI-MISTRUZZI L. e PACINI V., *427*.

— Sulle modificazioni volumetriche dei nucleoli negli ovociti in accrescimento. Osservazioni preliminari su «Antedon rosacea». VANNINI E., *256*.

Botanica. — Risultati sperimentali e indagini sulle provenienze e razze dell'abete bianco (Abies alba). PAVARI A., *193*.

C

Chimica. — Velocità ultrasonora e compressibilità adiabatiche di miscele liquide atermiche o ideali. DANUSSO F., *235*.

— Azione tossica delle cumarine su embrioni di Anfibi. DEL PIANTO E. e PANTANO E., *230*.

Chimica biologica. — Metabolismo del glucosio-1-fosfato in conigli normali e diabetici da allossana. BELOFF-CHAIN A., BOVET D., CHAIN E. B. e POCCHIARI F., *280*.

— Determinazione dell'attività perossidasica nei vegetali. PETROSINI G., *401*.

Chimica fisica. — Effetti di iperconiugazione al legame carbonilico. BONINO G. B. e CHIORBOLI P., *7*.

— Spettrometria indiretta. SACCONI L., *407*.

Chimica inorganica. — La struttura cristallina dei composti LaHg, CeHg., PrHg, NdHg. IANDELLI A. e FERRO R., *48*.

Chimica organica. — Perturbazioni intra- ed intermolecolari nei derivati del pirrolo. – I. N-acetilpirrolo ed α-acetilpirrolo. BONINO G. B. e CHIORBOLI P., *104*.

— Chetoni dai diazochetoni. – I. Sintesi di $\alpha - \omega -$ = diacetilparaffine. CANONICA L. e BACCHETTI T., *479*.

— Nuovi spettri Raman dell'α-acetilpirrolo e dell'N-acetilpirrolo. GHIGI E. e CHIORBOLI P., *242*.

— G., Un nuovo modo di formazione dell'isossazolo. STAGNO D'ALCONTRES G. e MOLLICA G., *52*.

Congressi internazionali. — Relazione sul Congresso internazionale di Anatomia. LEVI G., *3*.

— Relazione sul VII Congresso della Società internazionale di Biologia cellulare. LEVI G., *4*.

Commemorazioni. — Commemorazione del Socio Amedeo Herlitzka. LOMBROSO U., *69*.

Comunicazioni varie, *80, 179, 270, 331, 432, 504*.

E

Elettrochimica. — Sulle corrosioni del ferro e dell'acciaio prodotte dai calcestruzzi contenenti Cloruro di Sodio. SCARPA O., *189*.

— Corrosioni causate da correnti elettriche alternate ai ferri inclusi nei calcestruzzi. SCARPA O., *275*.

Equazioni differenziali. — Nuovi criteri di stabilità per l'equazione $y''+A(x)y=0$. Nota I. PRODI G., *447*.

F

Farmacologia. — Indagini quantitative sul meccanismo d'azione antibatterica dei detergenti. Nota II. BENIGNO P. e BERTI T., *57*.

Fisica. — Diffrazione di raggi X nei miscugli benzolo-tetracloruro di carbonio, CENNAMO F., *310*.

— Diffrazione di raggi X nel benzolo al variare della temperatura. CENNAMO F., *475*.

— Una strana conseguenza delle equazioni della nuova teoria unitaria di Einstein. GAMBA A., *472*.

— Correction zonale de l'aberration spherique dans les lentilles magnetiques. NADEAU G., *225*.

— Sulla disposizione dei diaframmi negli spettrometri beta elicoidali. PERSICO E., *344*.

— Sulla propagazione degli ultrasuoni nei ferromagnetici. PETRALIA S., *146*.

Fisica matematica. — Sulle discontinuità delle derivate del potenziale della gravità attraverso una superficie di discontinuità per la densità. MANACORDA T., *42*.

Fisica tecnica. — Su alcune questioni analitiche concernenti il calcolo del coef-

ficiente di assorbimento acustico di cilindri rivestiti di feltro di vetro. DE SCHWARZ M. J., *152*.

Fisiologia. — L'influenza del pH sul passaggio dell'acqua attraverso la cute di « Rana esculenta » CAPRARO V., PENNELLA P. e TIENGO M., *251*.

— L'influenza della differenza di potenziale (D. P.) della cute sul passaggio di acqua attraverso la cute di Rana. CAPRARO V. e TIENGO M., *416*.

— Ricerche elettroforetiche sulle proteine dei muscoli lisci di Mammiferi. CREPAX P., *169*.

— Influenza della castrazione e delle sostanze estrogene sull'azione gozzigena del metiltiouracile nel ratto femmina. CREPAX P., *500*.

— Effetti della stimolazione del corpo striato nel piccione. MACHNE X., *413*.

— La respirazione di miscele d'aria e CO_2 a bassa pressione barometrica. MARGARIA R., *442*.

— Comportamento del potassio dopo trattamento con acetato di desossicorticosterone in cani dei due sessi. ROWINSKI P. e MANUNTA G., *325*.

— Influenza dell'ovaio sulla sopravvivenza di ratti paratiroidectomizzati. ROWINSKI P. e MANUNTA G., *495*.

G

Geodesia. — Su alcune proprietà integrali delle rappresentazioni conformi di superfici su superfici. MARUSSI A., *307*.

— Sul trasporto delle coordinate e dell'azimut lungo una geodetica e sul problema inverso sopra una superficie qualunque. MINEO M., *142*.

Geologia. — Rilevamento geologico nella zona del Pizzo Badile (Adamello sud-occidentale). ACCORDI B., *246*.

— Notizie preliminari sulla tettonica del margine sud-orientale della regione fra il Sebino e l'Eridio. BONI A., *485*.

— Un giacimento sedimentogeno di magnetite nei Monti Peloritani. BURCKHARDT C. E., *156*.

— Sur l'âge Villafranchien de l'ancien lac Aquilanien. DEMANGEOT J., *55*.

— Sull'origine e i viaggi delle ofioliti appenniniche. ROVERETO G. *439*.

— Sul Piano Calabriano Gignoux 1910. Nota preliminare. RUGGIERI G., *491*.

Geometria. — Sopra le varietà di Picard d'una superficie algebrica e sulla classificazione delle superficie irregolari. ANDREOTTI A., *380*.

— Forme algebriche sviluppabili e relative hessiane. FRANCHETTA A., *386*.

— Sul numero dei diametri principali di una curva algebrica piana con punti all'infinito non tutti distinti. ROSINA B. A., *213*.

— Sull'unirazionalità dell'intersezione di più quadriche. ROTH L., *19*.

— Sugli invarianti d'una varietà algebrica a tre dimensioni. ROTH L., *468*.

— Sulle varietà quasi-asintotiche. – III. Ancora sulle varietà subordinate, SABAN G., *113*.

— Sull'esistenza, sia nel campo razionale che nel campo reale, di involuzioni piane non birazionali. SEGRE B., *94*.

— Sulla perfezione delle coincidenze isolate. SEGRE B., *335*.

— Trasformazioni dualistiche di tipo nullo nel piano e sistemi (G) proiettivamente deformabili. TERRACINI A., *89*.

— Sistemi (G) proiettivamente deformabili di tipo speciale, TERRACINI A., *186*.

M

Matematica. — Sull'immersione di un piano grafico in uno spazio grafico a tre dimensioni. LOMBARDO-RADICE L., *203*.

— Sulla maggiorazione dell'integrale di una equazione differenziale lineare ordinaria del secondo ordine. PUCCI C., *300*.

Meccanica. — La barriera della temperatura dei missili geodetici. CROCCO G. A., *97*.

— Un principio variazionale in idrodinamica piana. GOTUSSO G., *130*.

— Su alcune questioni di elasticità ereditaria. GRAFFI D., *25*.

— Applicazione della teoria dell'ellisse di elasticità trasversale allo studio di una asta curva elasticamente vincolata agli estremi. Nota I. LATTANZI F., *395*.

— Le equazioni di seconda approssimazione nella nuova teoria relativistica unitaria di Einstein. Nota I. UDESCHINI P., *21*.

— Le equazioni di seconda approssimazione nella nuova teoria relativistica unitaria di Einstein. Nota II. UDESCHINI P., *121*.

— Sulle mutue azioni fra campo gravitazionale e campo elettromagnetico. UDESCHINI P., *390*.

— Applicazione del metodo delle caratteristiche alla corrente supersonica vorticosa. TEOFILATO P., *124*.

Mineralogia. — I minerali del gruppo dell'Ortler. – II. Actinolite di Malga Mont in Val di Rabbi e di Celledizzo in Val di Peio, PIRANI R., *315*.

O

Opere pervenute in dono all'Accademia, *87, 181, 273, 334, 436, 509*.

P

Personale accademico, *80, 331, 433, 503*.

Plichi suggellati, *81, 179, 270, 433, 503*.

Polinomi ortogonali. — Su alcune disuguaglianze riguardanti i polinomi ultrasferici, MERLI L., *371*.

Premi in corso di assegnazione presso l'Accademia Nazionale dei Lincei, *84*.

Presentazione di libri, *82, 179, 270, 332, 433, 504*.

Presentazione di Note e Memorie. — *83, 180, 272, 332, 435, 505*.

R

Relazioni. — La creazione di un « Istituto del deserto » in Egitto. DESIO A., *183*.

Relazioni di Commissioni, *333, 507*.

S

Scienza dell'alimentazione. — Sui rapporti fra sistema nervoso autonomo e ricambio dei lipidi. Azione della dibenamina e dell'atropina sulla steatosi epatica da epatectomia parziale. ARDY C. e MONTINI T., *174*.

— Sul meccanismo di azione della tripsina quale fattore lipotropo. Enzima od ormone ? LOMBROSO U., ARRIGO L. e PONTREMOLI S., *199*.

Scienza della nutrizione. — Sul meccanismo di azione di alcuni fattori lipotropi nella steatosi epatica da florizina. LOMBROSO U. e ARRIGO L., *12*.

Scienza delle costruzioni. — Il carico di punta di una colonna a maglie rettangolari. NORZI L., *217*.

T

Temi per discussioni, *507*.

INDICI DEI FASCICOLI

FASCICOLO 1.

GENNAIO 1951.

NOTE DI SOCI

LEVI G., Relazione sul Congresso internazionale di Anatomia . . . . . Pag. 3
LEVI G., Relazione sul VII Congresso della Società internazionale di Biologia cellulare 4
BONINO G. B. e CHIORBOLI P., Effetti di iperconiugazione al legame carbonilico (pres. dal Socio *G. B. Bonino*) 7
LOMBROSO U. e ARRIGO L., Sul meccanismo di azione di alcuni fattori lipotropi nella steatosi epatica da florizina (pres. dal Socio *U. Lombroso*) 12

NOTE PRESENTATE DA SOCI

ROTH L., Sull'unirazionalità dell'intersezione di più quadriche (pres. dal Corrisp. *B. Segre*) . . . . . Pag. 19
UDESCHINI P., Le equazioni di seconda approssimazione nella nuova teoria relativistica unitaria di Einstein. Nota I (pres. dal Corrisp. *B. Finzi*) 21
GRAFFI D., Su alcune questioni di elasticità ereditaria (pres. dal Socio *A. Signorini*) . 25
FORTINI T., L'assorbimento atmosferico della radiazione solare a Campo Imperatore, sul Gran Sasso d'Italia (pres. dal Socio *G. Armellini*) 31
GIANNUZZI M. A., Sopra l'orbita della σ Coronae Borealis (pres. dal Socio *G. Armellini*) 36
MANACORDA T., Sulle discontinuità delle derivate del potenziale della gravità attraverso una superficie di discontinuità per la densità (pres. dal Corrisp. *G. Sansone*) . . 42
IANDELLI A. e FERRO R., La struttura cristallina dei composti LaHg, CeHg, PrHg, NdHg (pres. dal Socio *L. Rolla*) 48
STAGNO D'ALCONTRES G. e MOLLICA G., Un nuovo modo di formazione dell'isossazolo (pres. dal Corrisp. *A. Quilico*) 52
DEMANGEOT J., Sur l'âge Villafranchien de l'ancien lac Aquilanien (pres. dal Socio *R. Fabiani*) 55
BENIGNO P. e BERTI T., Indagini quantitative sul meccanismo d'azione antibatterica dei detergenti. Nota II (pres. dal Socio *E. Meneghetti*) 57
PERRI T., La determinazione di arti soprannumerari in « Bufo vulgaris ». Nota VII (pres. dal Socio *G. Cotronei*) 64

COMMEMORAZIONI

LOMBROSO U., Commemorazione del Socio Amedeo Herlitzka . . . . . Pag. 69

Personale accademico 80
Comunicazioni varie 80
Plichi suggellati 81
Presentazione di libri 82
Presentazione di Note e Memorie 83
Premi in corso di assegnazione presso l'Accademia Nazionale dei Lincei 84
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 13 gennaio 1951 87

FASCICOLO 2.

FEBBRAIO 1951.

NOTE DI SOCI

TERRACINI A., Trasformazioni dualistiche di tipo nullo nel piano e sistemi (G) proiettivamente deformabili . . . . . Pag. 89
SEGRE B., Sull'esistenza, sia nel campo razionale che nel campo reale, di involuzioni piane non birazionali 94
CROCCO G. A., La barriera della temperatura nei missili geodetici 97
BONINO G. B. e CHIORBOLI P., Perturbazioni intra- ed intermolecolari nei derivati del pirrolo. – I. N–acetilpirrolo ed α–acetilpirrolo 104
RUSSO A., Potere germinativo dei tessuti somatici e germi embrionali nell'origine dei neoplasmi 109

NOTE PRESENTATE DA SOCI

SABAN G., Sulle varietà quasi–asintotiche. – III. Ancora sulle varietà subordinate (pres. dal Socio *E. Bompiani*) . . . . . Pag. 113
MIRANDA C., Sulle proprietà di minimo e di massimo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali lineari del secondo ordine di tipo ellittico (pres. dal Socio *M. Picone*) 117
UDESCHINI P., Le equazioni di seconda approssimazione nella nuova teoria relativistica unitaria di Einstein. Nota II (pres. dal Corrisp. *B. Finzi*). 121
TEOFILATO P., Applicazione del metodo delle caratteristiche alla corrente supersonica vorticosa (pres. dal Socio *G. Armellini*) 124
GOTUSSO G., Un principio variazionale in idrodinamica piana (pres. dal Corrisp. *B. Finzi*) 130
COLACEVICH A., Su una possibile deviazione della luce attraverso la nebulosa delle Pleiadi (pres. dal Socio *G. Armellini*) 132
ROSINO L., Diagramma colore–grandezza e distanza dell'ammasso globulare M. 56. I. Istrumenti, tecnica delle osservazioni e risultati (pres. dal Socio *G. Silva*) . 136
MINEO M., Sul trasporto delle coordinate e dell'azimut lungo una geodetica e sul problema inverso sopra una superficie qualunque (pres. dal Corrisp. *C. Mineo*) 142
PETRALIA S., Sulla propagazione degli ultrasuoni nei ferromagnetici (pres. dal Corrisp. *G. Valle*) 146
DE SCHWARZ M. J., Su alcune questioni analitiche concernenti il calcolo del coefficiente di assorbimento acustico di cilindri rivestiti di feltro di vetro (pres. dal Socio *M. Picone*) . . . . . Pag. 152
BURCKHARDT C. E., Un giacimento sedimentogeno di magnetite nei Monti Peloritani (pres. dal Socio *R. Fabiani*) 156
STEFANELLI A., Ciclo vitale e citomorfosi delle cellule nervose dei Vertebrati (pres. dal Socio *G. Cotronei*) 159
RUSSO S., Osservazioni sull'acido ribonucleico dell'oocite in crescita di «Myotis capaccini», Bonaparte (pres. dal Socio *G. Cotronei*) 164
CREPAX P., Ricerche elettroforetiche sulle proteine dei muscoli lisci di Mammiferi (pres. dal Corrisp. *G. C. Pupilli*) 169
ARDY C. e MONTINI T., Sui rapporti fra sistema nervoso autonomo e ricambio dei lipidi. Azione della dibenamina e dell'atropina sulla steatosi epatica da epatectomia parziale (pres. dal Socio *U. Lombroso*). 174

Plichi suggellati. . . . . Pag. 179
Comunicazioni varie 179
Presentazione di libri 179
Presentazione di Note e Memorie 180
Opere pervenute in dono all'accademia presentate nella seduta del 10 febbraio 1951 . . 181

FASCICOLO 3.

MARZO 1951.

NOTE DI SOCI

DESIO A., La creazione di un « Istituto del deserto » in Egitto . . . . . Pag. 183
TERRACINI A., Sistemi (G) proiettivamente deformabili di tipo speciale 186
SCARPA O., Sulle corrosioni del ferro e dell'acciaio prodotte dai calcestruzzi contenenti Cloruro di Sodio 189
PAVARI A., Risultati sperimentali e indagini sulle provenienze e razze dell'abete bianco (Abies alba) 193
LOMBROSO U., ARRIGO L. e PONTREMOLI S., Sul meccanismo di azione della tripsina quale fattore lipotropo. Enzima od ormone ? (pres. dal Socio *U. Lombroso*) . . 199

NOTE PRESENTATE DA SOCI

LOMBARDO-RADICE L., Sull'immersione di un piano grafico in uno spazio grafico a tre dimensioni (pres. dal Corrisp. *B. Segre*) . . . . . Pag. 203
AMERIO L., Sull'estensione delle nozioni di « colle », « nodo » e « fuoco » ai sistemi di due equazioni differenziali periodiche in tre variabili. Nota I (pres. dal Corrisp. *B. Finzi*) 206
ROSINA B. A., Sul numero dei diametri principali di una curva algebrica piana con punti all'infinito non tutti distinti (pres. dal Socio *E. Bompiani*) 213
NORZI L., Il carico di punta di una colonna a maglie rettangolari (pres. dal Corrisp. *G. Albenga*) 217
ROSINO L., Diagramma colore-grandezza e distanza dell'ammasso globulare M 56. – II. Distribuzione dei colori e delle grandezze ed eccesso di colore (pres. dal Socio *G. Silva*) 220
NADEAU G., Correction zonale de l'aberration spherique dans les lentilles magnetiques (pres. dal Corrisp. *E. Persico*) 225
DEL PIANTO E. e PANTANO E., Azione tossica delle cumarine su embrioni di Anfibi (pres. dal Socio *G. Bargellini*) 230
DANUSSO F., Velocità ultrasonora e compressibilità adiabatiche di miscele liquide atermiche o ideali (pres. dal Corrisp. *G. Natta*) 235
GHIGI E. e CHIORBOLI P., Nuovi spettri Raman dell'α-acetilpirrolo e dell'N-acetilpirrolo (pres. dal Socio *G. B. Bonino*) 242
ACCORDI B., Rilevamento geologico nella zona del Pizzo Badile (Adamello sud-occidentale) (pres. dal Corrisp. *Gb. Dal Piaz*) 246
CAPRARO V., PENNELLA P. e TIENGO M., L'influenza del pH sul passaggio dell'acqua attraverso la cute di « Rana esculenta » (pres. dal Corrisp. *R. Margaria*) . . . 251
VANNINI E., Sulle modificazioni volumetriche dei nucleoli negli ovociti in accrescimento. Osservazioni preliminari su « Antedon rosacea » (pres. dal Corrisp. *U. D'Ancona*) 256

PILATI C., Ulteriori ricerche sulla natura degli spermatidi degenerativi in «Cottus gobio» (pres. dal Corrisp. *U. D'Ancona*) . . . . . Pag. 263
SANTI R. e SEREMBE M., Circolazione dell'aureomicina nell'organismo con particolare riguardo ai suoi rapporti con la linfa (pres. dal Socio *E. Meneghetti*) . . 265
Comunicazioni varie 270
Plichi suggellati 270
Presentazione di libri 270
Presentazione di Note e Memorie 272
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 10 marzo 1951 . 273

FASCICOLO 4.

APRILE 1951.

NOTE DI SOCI

SCARPA O., Corrosioni causate da correnti elettriche alternate ai ferri inclusi nei calcestruzzi . . . . . Pag. 275
BELOFF-CHAIN A., BOVET D., CHAIN E. B. e POCCHIARI F., Metabolismo del glucosio-1-fosfato in conigli normali e diabetici da allossana 280
D'ANCONA U., Ulteriori esperienze sull'azione degli ormoni steroidi sulla gonade dell'anguilla 284

NOTE PRESENTATE DA SOCI

AMERIO L., Sull'estensione delle nozioni di «colle», «nodo» e «fuoco» ai sistemi di due equazioni differenziali periodiche, in tre variabili. Nota II (pres. dal Corrisp. *B. Finzi*) . . . . . Pag. 289
HORNICH H., Su alcune successioni di serie i cui termini generali convergono a zero (pres. dal Socio *E. Bompiani*) 298
PUCCI C., Sulla maggiorazione dell'integrale di una equazione differenziale lineare ordinaria del secondo ordine (pres. dal Socio *M. Picone*) 300
MARUSSI A., Su alcune proprietà integrali delle rappresentazioni conformi di superfici su superfici (pres. dal Socio *P. Dore*) 307
CENNAMO F., Diffrazione di raggi X nei miscugli benzolo-tetracloruro di carbonio (pres. dal Socio *A. Carrelli*) 310
PIRANI R., I minerali del gruppo dell'Ortler. – II. Actinolite di Malga Mont in Val di Rabbi e di Celledizzo in Val di Peio (pres. dal Corrisp. *C. Andreatta*) 315
BAFFONI G. M., L'andamento dell'ipertrofia reattiva in alcuni aspetti della cromatolisi della cellula nervosa (pres. dal Socio *G. Cotronei*) 319
ROWINSKI P. e MANUNTA G., Comportamento del potassio dopo trattamento con acetato di desossicorticosterone in cani dei due sessi (pres. dal Socio *G. Levi*) 325
Personale Accademico 331
Comunicazioni varie 331
Presentazione di libri 332
Presentazione di Note e Memorie. 332
Relazioni di Commissioni 333
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 14 aprile 1951 . 334

FASCICOLO 5.

MAGGIO 1951.

NOTE DI SOCI

SEGRE B., Sulla perfezione delle coincidenze isolate . . . . . Pag. 335
NOBILE V., Il conflitto fra copernicisti e aristotelici nella sua essenza e nel pensiero di Galileo – Rilievi e precisazioni. Nota II 337
PERSICO E., Sulla disposizione dei diaframmi negli spettrometri beta elicoidali . . 344
LEVI G. e FAJER A., Lo smescolamento del citoplasma studiato in cellule coltivate «in vitro» (pres. dal Socio *G. Levi*) 348

NOTE PRESENTATE DA SOCI

FICHERA G., Sui teoremi d'esistenza della teoria del potenziale e della rappresentazione conforme. Nota I (pres. dal Socio *M. Picone*) . . . . . Pag. 356
LEVI E., Ancora sopra un'applicazione dei polinomi di Bernstein all'approssimazione in media delle funzioni sommabili (pres. dal Corrisp. *G. Ascoli*) 360
PRODI G., Questioni di stabilità per equazioni non lineari alle derivate parziali di tipo parabolico (pres. dal Corrisp. *B. Finzi*) 365
MERLI L., Su alcune disuguaglianze riguardanti i polinomi ultrasferici (pres. dal Corrisp. *G. Sansone*) 371
FANTAPPIÈ L., Le variazioni e i funzionali derivati degli autovalori e delle autofunzioni di un nucleo dato (pres. dal Socio *U. Amaldi*) 375
ANDREOTTI A., Sopra le varietà di Picard d'una superficie algebrica e sulla classificazione delle superficie irregolari (pres. dal Socio *F. Severi*) 380
FRANCHETTA A., Forme algebriche sviluppabili e relative hessiane (pres. dal Corrisp. *B. Segre*) 386
UDESCHINI P., Sulle mutue azioni fra campo gravitazionale e campo elettromagnetico (pres. dal Corrisp. *B. Finzi*) 390
LATTANZI F., Applicazione della teoria dell'ellisse di elasticità trasversale allo studio di un'asta curva elasticamente vincolata agli estremi (pres. dal Socio *G. Armellini*) 395
PETROSINI G., Determinazione dell'attività perossidasica nei vegetali (pres. dal Socio *F. Giordani*) 401
SACCONI L., Spettrometria indiretta (pres. dal Socio *L. Rolla*) 407
MACHNE X., Effetti della stimolazione del corpo striato nel piccione (pres. dal Corrisp. *G. C. Pupilli*) 413
CAPRARO V. e TIENGO M., L'influenza della differenza di potenziale (D. P.) della cute sul passaggio di acqua attraverso la cute di Rana (pres. dal Corrisp. *R. Margaria*) 416
AROSIO R. e ORLANDI A., Sulle proteine dell'organo elettrico di Torpedine (pres. dal Socio *L. Cambi*) 422
URBANI-MISTRUZZI L. e PACINI V., Ergastoplasma e acidi nucleici nel ciclo secretorio di alcune ghiandole (pres. dal Socio *G. Cotronei*) 427

Comunicazioni varie 432
Personale accademico 433
Plichi suggellati 433
Presentazione di libri 433
Presentazione di Note e Memorie 435
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 12 maggio 1951 . . 436

FASCICOLO 6.

GIUGNO 1951.

NOTE DI SOCI

ROVERETO G., Sull'origine e i viaggi delle ofioliti appenniniche . . . . . Pag. 439
MARGARIA R., La respirazione di miscele d'aria e CO_2 a bassa pressione barometrica 442

NOTE PRESENTATE DA SOCI

PRODI G., Nuovi criteri di stabilità per l'equazione $y'' + A(x)y = 0$. Nota I (pres. dal Corrisp. *G. Ascoli*) . . . . . Pag. 447
FICHERA G., Sui teoremi d'esistenza della teoria del potenziale e della rappresentazione conforme. Nota II (pres. dal Socio *M. Picone*) 452
FANTAPPIÈ L., Calcolo esatto degli autovalori e delle autofunzioni di un nucleo « variato », per una variazione di tipo elementare (pres. dal Socio *F. Severi*) . . 458
CONTI R., Funzioni a variazione limitata in più variabili, nel senso di Fréchet e nel senso di Faedo (pres. dal Corrisp. *G. Sansone*) 462
ROTH L., Sugli invarianti d'una varietà algebrica a tre dimensioni (pres. dal Corrisp. *B. Segre*) 468
GAMBA A., Una strana conseguenza delle equazioni della nuova teoria unitaria di Einstein (pres. dal Socio *E. Perucca*) 472
CENNAMO F., Diffrazione di raggi X nel benzolo al variare della temperatura (pres. dal Socio *A. Carrelli*) 475
CANONICA L. e BACCHETTI T., Chetoni dai diazochetoni. - I. Sintesi di $\alpha - \omega -$ = diacetilparaffine (pres. dal Socio *L. Cambi*) 479
BONI A., Notizie preliminari sulla tettonica del margine sudorientale della regione fra il Sebino e l'Eridio (pres. dal Corrisp. *G. B. Dal Piaz*) 485
RUGGIERI G., Sul Piano Calabriano Gignoux 1910. Nota preliminare (pres. dal Socio *M. Gortani*) 491
ROWINSKI P. e MANUNTA G., Influenza dell'ovaio sulla sopravvivenza di ratti paratiroidectomizzati (pres. dal Socio *G. Levi*) 495
CREPAX P., Influenza della castrazione e delle sostanze estrogene sull'azione gozzigena del metiltiouracile nel ratto femmina (pres. dal Socio *U. Lombroso*) 500

Personale accademico 503
Plichi suggellati 503
Comunicazioni varie 504
Presentazione di libri 504
Presentazione di Note e Memorie 505
Relazioni di Commissioni 507
Temi per discussioni 507
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella Seduta del 6 giugno 1951 509
Indice per Autori 513
Indice per materie 517
Indici dei fascicoli 521